MECÁNICA DE MATERIALES

Ferdinand P. Beer / E. Russell Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek

QUINTA EDICIÓN

Mc Graw Hill

Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI

Cantidad	Unidades de uso común en Estados Unidos	Equivalente del SI
Aceleración	$\mathrm{ft/s^2}$	$0.3048\ \mathrm{m/s^2}$
	$\mathrm{in./s^2}$	$0.0254\ \mathrm{m/s^2}$
Área	$\mathrm{ft^2}$	$0.0929\ \mathrm{m^2}$
	$\mathrm{in.^2}$	$645.2\ \mathrm{mm^2}$
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	$\mathrm{in.^4}$	$0.4162 \times 10^6\ \mathrm{mm^4}$
de una masa	$\mathrm{lb \cdot ft \cdot s^2}$	$1.356\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	$\mathrm{lb/ft^2}$	47.88 Pa
	$\mathrm{lb/in.^2}$ (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen, sólidos	$\mathrm{ft^3}$	$0.02832\ \mathrm{m^3}$
	$\mathrm{in.^3}$	$16.39\ \mathrm{cm^3}$
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J

MECÁNICA DE MATERIALES

MECÁNICA DE MATERIALES

Quinta edición

FERDINAND P. BEER (finado)
Late of Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

JOHN T. DEWOLF
University of Connecticut

DAVID F. MAZUREK
United States Coast Guard Academy

Revisión técnica:

Jesús Manuel Dorador G.
Universidad Nacional Autónoma de México

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Jesús Elmer Murrieta Murrieta

MECÁNICA DE MATERIALES
Quinta edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

Mc Graw Hill Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2010, 2007, 2003, 1993, 1982 respecto a la quinta edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma Núm. 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-607-15-0263-6
(ISBN: 970-10-6101-2 edición anterior)

Traducido de la quinta edición en inglés de: Mechanics of Materials, fifth edition.
Copyright © 2009 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.
ISBN 0-07-722140-0

1234567890 109876543210

Impreso en México *Printed in Mexico*

Acerca de los autores

Como editores de los libros escritos por Ferd Beer y Russ Johnston, a menudo se nos pregunta cómo fue que escribieron juntos sus libros, cuando uno de ellos trabaja en Lehigh y el otro en la University of Connecticut.

La respuesta a esta pregunta es sencilla. El primer trabajo docente de Russ Johnston fue en el Departamento de Ingeniería Civil y Mecánica de Lehigh University. Ahí conoció a Ferd Beer, quien había ingresado a ese departamento dos años antes y estaba al frente de los cursos de mecánica. Fred Beer nació en Francia y se educó en ese país y en Suiza. Alcanza el grado de maestro en Ciencias en la Sorbona y el de doctor en Ciencias en el campo de la mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Llegó a Estados Unidos tras servir en el ejército francés a comienzos de la Segunda Guerra Mundial. También enseñó durante cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de arte e ingeniería de Williams-MIT. Russ Johnston nació en Filadelfia y obtuvo el grado de licenciado en Ciencias en la University of Delaware y el grado de Doctor en Ciencias en el campo de ingeniería estructural en el MIT.

Beer se alegró al descubrir que el joven que había sido contratado principalmente para impartir cursos de posgrado en ingeniería estructural no sólo deseaba ayudarlo a reestructurar los cursos de mecánica, sino que estaba ansioso por hacerlo. Ambos compartían la idea de que estos cursos deberían enseñarse a partir de algunos principios básicos y que los estudiantes entenderían y recordarían mejor los diversos conceptos involucrados si éstos se presentaban de manera gráfica. Juntos redactaron notas para las cátedras de estática y dinámica, a las que después añadieron problemas que, pensaron, serían de interés para los futuros ingenieros. Pronto tuvieron en sus manos el manuscrito de la primera edición de *Mechanics for Engineers*. Cuando apareció la segunda edición de este texto y la primera edición de *Vector Mechanics for Engineers*, Russ Johnston se hallaba en el Worcester Polytechnics Institute. Al publicarse las siguientes ediciones ya trabajaba en la University of Connecticut. Mientras tanto, Beer y Johnston habían asumido responsabilidades administrativas en sus departamentos, y ambos estaban involucrados en la investigación, en la consultoría y en la supervisión de estudiantes: Beer en el área de los procesos estocásticos y de las vibraciones aleatorias, y Johnston en el área de la estabilidad elástica y del diseño y análisis estructural. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había menguado, y ambos dirigieron secciones de estos cursos mientras continuaban revisando sus textos y comenzaron a escribir juntos el manuscrito para la primera edición de *Mechanics of Materials*.

Las contribuciones de Beer y Johnston a la educación en la ingeniería les han hecho merecedores de varios premios y honores. Se les otorgó el premio Western Electric Fund Award por la excelencia en la instrucción de los estudiantes de ingeniería por sus secciones regionales respectivas de la American Society for Engineering Education, y ambos recibieron el Premio al Educador Distinguido (Distinguished Educator Award) de la División de Mecánica de la misma sociedad. En 1991 Jonhston recibió el Premio al Ingeniero Civil Sobresaliente (Outstanding Civil Engineer Award) de la sección del estado de Connecticut de la American Society of Civil Engineering, y en 1995 Beer obtuvo el grado honorario de doctor en ingeniería por la Lehigh University.

John T. DeWolf, profesor de ingeniería civil de la University of Connecticut, se unió al equipo de Beer y Johnston como autor en la segunda edición de *Mecánica de materiales*. John es licenciado en Ciencias en ingeniería civil por la University of Hawaii y obtuvo los grados de maestría y doctorado en ingeniería estructural por la Cornell University. Las áreas de su interés en la investigación son las de estabilidad elástica, monitoreo de puentes y análisis y diseño estructural. Es miembro de la Junta de Examinadores de Ingenieros Profesionales del Estado de Connecticut y fue seleccionado como miembro del Magisterio de la Universit y of Connecticut en 2006.

David F. Mazurek, profesor de ingeniería civil en la United States Coast Guard Academy, es un autor nuevo en esta edición. David cuenta con una licenciatura en Ingeniería oceanográfica y una maestría en Ingeniería civil por el Florida Institute of Technology, así como un doctorado en Ingeniería civil por la University of Connecticut. Los últimos diecisiete años ha trabajado para el Comité de Ingeniería y Mantenimiento de Vías y Caminos Estadounidenses en el área de estructuras de acero. Entre sus intereses profesionales se incluyen la ingeniería de puentes, el análisis forense de estructuras y el diseño resistente a las explosiones.

Contenido

Prefacio xv
Lista de símbolos xxi

1
INTRODUCCIÓN. EL CONCEPTO DE ESFUERZO
1

1.1 Introducción 2
1.2 Un breve repaso de los métodos de la estática 2
1.3 Esfuerzos en los elementos de una estructura 5
1.4 Análisis y diseño 6
1.5 Carga axial. Esfuerzo normal 7
1.6 Esfuerzo cortante 9
1.7 Esfuerzo de apoyo en conexiones 11
1.8 Aplicación al análisis y diseño de estructuras sencillas 12
1.9 Método para la solución de problemas 14
1.10 Exactitud numérica 15
1.11 Esfuerzos en un plano oblicuo bajo carga axial 23
1.12 Esfuerzos bajo condiciones generales de carga. Componentes del esfuerzo 24
1.13 Consideraciones de diseño 27
Repaso y resumen del capítulo 1 38

2
ESFUERZO Y DEFORMACIÓN. CARGA AXIAL
46

2.1 Introducción 47
2.2 Deformación normal bajo carga axial 48
2.3 Diagrama esfuerzo-deformación 50
*2.4 Esfuerzo y deformación verdaderos 55
2.5 Ley de Hooke. Módulo de elasticidad 56

2.6 Comportamiento elástico contra comportamiento plástico de un material 57
2.7 Cargas repetidas. Fatiga 59
2.8 Deformaciones de elementos sometidas a carga axial 61
2.9 Problemas estáticamente indeterminados 70
2.10 Problemas que involucran cambios de temperatura 74
2.11 Relación de Poisson 84
2.12 Carga multiaxial. Ley de Hooke generalizada 85
*2.13 Dilatación. Módulo de elasticidad volumétrico (o módulo de compresibilidad) 87
2.14 Deformación unitaria cortante 89
2.15 Análisis adicional de las deformaciones bajo carga axial. Relación entre E, ν y G 92
*2.16 Relaciones de esfuerzo-deformación para materiales compuestos reforzados con fibras 95
2.17 Distribución del esfuerzo y de la deformación bajo carga axial. Principio de Saint-Venant 104
2.18 Concentraciones de esfuerzos 107
2.19 Deformaciones plásticas 109
*2.20 Esfuerzos residuales 113

Repaso y resumen del capítulo 2 121

3
TORSIÓN
131

3.1 Introducción 132
3.2 Análisis preliminar de los esfuerzos en un eje 134
3.3 Deformaciones en un eje circular 136
3.4 Esfuerzos en el rango elástico 139
3.5 Ángulo de giro en el rango elástico 150
3.6 Ejes estáticamente indeterminados 153
3.7 Diseño de ejes de transmisión 165
3.8 Concentraciones de esfuerzo en ejes circulares 167
*3.9 Deformaciones plásticas en ejes circulares 172
*3.10 Ejes circulares hechos de un material elastoplástico 174
*3.11 Esfuerzos residuales en ejes circulares 177
*3.12 Torsión de elementos no circulares 186
*3.13 Ejes huecos de pared delgada 189

Repaso y resumen del capítulo 3 198

4
FLEXIÓN PURA
208

4.1 Introducción 209
4.2 Elemento simétrico sometido a flexión pura 211
4.3 Deformaciones en un elemento simétrico sometido a flexión pura 213

4.4 Esfuerzos y deformaciones en el rango elástico 216
4.5 Deformaciones en una sección transversal 220
4.6 Flexión de elementos hechos de varios materiales 230
4.7 Concentración de esfuerzos 234
*4.8 Deformaciones plásticas 243
*4.9 Elementos hechos de material elastoplástico 246
*4.10 Deformaciones plásticas en elementos con un solo plano de simetría 250
*4.11 Esfuerzos residuales 250
4.12 Carga axial excéntrica en un plano de simetría 260
4.13 Flexión asimétrica 270
4.14 Caso general de carga axial excéntrica 276
*4.15 Flexión de elementos curvos 285

Repaso y resumen del capítulo 4 298

5
ANÁLISIS Y DISEÑO DE VIGAS PARA FLEXIÓN
307

5.1 Introducción 308
5.2 Diagramas de cortante y de momento flector 311
5.3 Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector 322
5.4 Diseño de vigas prismáticas a la flexión 332
*5.5 Uso de funciones de singularidad para determinar el cortante y el momento flector en una viga 343
*5.6 Vigas no prismáticas 354

Repaso y resumen del capítulo 5 363

6
ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS Y EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA
371

6.1 Introducción 372
6.2 Cortante en la cara horizontal de un elemento de una viga 374
6.3 Determinación de los esfuerzos cortantes en una viga 376
6.4 Esfuerzos cortantes τ_{xy} en tipos comunes de vigas 377
*6.5 Análisis adicional sobre la distribución de esfuerzos en una viga rectangular delgada 380
6.6 Corte longitudinal en un elemento de viga con forma arbitraria 388
6.7 Esfuerzos cortantes en elementos de pared delgada 390
*6.8 Deformaciones plásticas 392
*6.9 Carga asimétrica de elementos de pared delgada. Centro de cortante 402

Repaso y resumen del capítulo 6 414

7
TRANSFORMACIONES DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES
422

7.1 Introducción 423
7.2 Transformación de esfuerzo plano 425
7.3 Esfuerzos principales. Esfuerzo cortante máximo 428
7.4 Círculo de Mohr para esfuerzo plano 436
7.5 Estado general de esfuerzos 446
7.6 Aplicación del círculo de Mohr al análisis tridimensional de esfuerzos 448
*7.7 Criterios de fluencia para materiales dúctiles bajo esfuerzo plano 451
*7.8 Criterios de fractura para materiales frágiles bajo esfuerzo plano 453
7.9 Esfuerzos en recipientes de pared delgada a presión 462
*7.10 Transformación de deformación plana 470
*7.11 Círculo de Mohr para deformación plana 473
*7.12 Análisis tridimensional de la deformación 475
*7.13 Mediciones de la deformación. Roseta de deformación 478

Repaso y resumen del capítulo 7 486

8
ESFUERZOS PRINCIPALES BAJO UNA CARGA DADA
495

*8.1 Introducción 496
*8.2 Esfuerzos principales en una viga 497
*8.3 Diseño de ejes de transmisión 500
*8.4 Esfuerzos bajo cargas combinadas 508

Repaso y resumen del capítulo 8 521

9
DEFLEXIÓN DE VIGAS
529

9.1 Introducción 530
9.2 Deformación de una viga bajo carga transversal 532
9.3 Ecuación de la curva elástica 533
*9.4 Determinación directa de la curva elástica a partir de la distribución de carga 538
9.5 Vigas estáticamente indeterminadas 540
*9.6 Uso de funciones de singularidad para determinar la pendiente y la deflexión de una viga 549
9.7 Método de superposición 558

9.8 Aplicación de la superposición a vigas estáticamente indeterminadas 560
*9.9 Teoremas de momento de área 569
*9.10 Aplicación a vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas 571
*9.11 Diagramas de momento flector por partes 573
*9.12 Aplicación de los teoremas de momento de área a vigas con cargas asimétricas 582
*9.13 Deflexión máxima 584
*9.14 Uso de los teoremas de momento de área con vigas estáticamente indeterminadas 586

Repaso y resumen del capítulo 9 594

10
COLUMNAS
606

10.1 Introducción 607
10.2 Estabilidad de estructuras 608
10.3 Fórmula de Euler para columnas articuladas 610
10.4 Extensión de la fórmula de Euler para columnas con otras condiciones de extremo 614
*10.5 Carga excéntrica. Fórmula de la secante 625
10.6 Diseño de columnas bajo una carga céntrica 636
10.7 Diseño de columnas bajo una carga excéntrica 652

Repaso y resumen del capítulo 10 662

11
MÉTODOS DE ENERGÍA
669

11.1 Introducción 670
11.2 Energía de deformación 670
11.3 Densidad de energía de deformación 672
11.4 Energía elástica de deformación para esfuerzos normales 674
11.5 Energía de deformación elástica para esfuerzos cortantes 677
11.6 Energía de deformación para un estado general de esfuerzos 680
11.7 Cargas de impacto 693
11.8 Diseño para cargas de impacto 695
11.9 Trabajo y energía bajo una carga única 696
11.10 Deflexión bajo una carga única por el método de trabajo-energía 698
*11.11 Trabajo y energía bajo varias cargas 709
*11.12 Teorema de Castigliano 711
*11.13 Deflexiones por el teorema de Castigliano 712
*11.14 Estructuras estáticamente indeterminadas 716

Repaso y resumen del capítulo 11 726

APÉNDICES
735

A Momentos de áreas 736
B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería 746
C Propiedades de perfiles laminados de acero 750
D Deflexiones y pendientes de vigas 762
E Fundamentos de la certificación en ingeniería en Estados Unidos 763

Créditos de fotografías 765

Índice 767

Respuestas a los problemas 777

PREFACIO

OBJETIVOS

El objetivo principal de un curso básico de mecánica es lograr que el estudiante de ingeniería desarrolle su capacidad para analizar de una manera sencilla y lógica un problema dado, y que aplique a su solución unos pocos principios fundamentales bien entendidos. Este libro se diseñó para el primer curso de mecánica de materiales —o de resistencia de materiales— que se imparte a los estudiantes de ingeniería de segundo o tercer año. Los autores esperan que la presente obra ayude al profesor a alcanzar esta meta en un curso en particular, de la misma manera que sus otros libros pueden haberle ayudado en estática y dinámica.

ENFOQUE GENERAL

En este libro el estudio de la mecánica de materiales se basa en la comprensión de los conceptos básicos y en el uso de modelos simplificados. Este enfoque hace posible deducir todas las fórmulas necesarias de manera lógica y racional, e indicar claramente las condiciones bajo las que pueden aplicarse con seguridad al análisis y diseño de estructuras ingenieriles y componentes de máquinas reales.

Los diagramas de cuerpo libre se usan de manera extensa. Los diagramas de cuerpo libre se emplean extensamente en todo el libro para determinar las fuerzas internas o externas. El uso de "ecuaciones en dibujo" también permitirá a los estudiantes comprender la superposición de cargas, así como los esfuerzos y las deformaciones resultantes.

Los conceptos de diseño se estudian a lo largo de todo el libro y en el momento apropiado. En el capítulo 1 puede encontrarse un análisis de la aplicación del factor de seguridad en el diseño, donde se presentan los conceptos tanto de diseño por esfuerzo permisible como de diseño por factor de carga y resistencia.

Se mantiene un balance cuidadoso entre las unidades del SI y las del sistema inglés. Puesto que es esencial que los estudiantes sean capaces de manejar tanto las unidades del sistema métrico o SI como las del sistema inglés, la mitad de los ejemplos, los problemas modelo y los problemas de repaso se han planteado en unidades SI, y la otra mitad en unidades estadounidenses. Como hay disponible un gran número de problemas, los instructores pueden asignarlos utilizando cada sistema de unidades en la proporción que consideren más deseable para su clase.

En las secciones opcionales se ofrecen temas avanzados o especializados. En las secciones optativas se han incluido temas adicionales, como esfuerzos residuales, torsión de elementos no circulares y de pared delgada, flexión de vigas curvas, esfuerzos cortantes en elementos no simétricos, y criterios de falla, temas que pueden usarse en cursos con distintos alcances. Para conservar la integridad del material de estudio, estos temas se presentan, en la secuencia adecuada, dentro de las secciones a las que por lógica pertenecen. Así, aun cuando no se cubran en el curso, están altamente evidenciados, y el estudiante puede consultarlos si así lo requiere en cursos posteriores o en su práctica de la ingeniería. Por conveniencia, todas las secciones optativas se han destacado con asteriscos.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS

Se espera que los estudiantes que empleen este texto ya hayan completado un curso de estática. Sin embargo, el capítulo 1 se diseñó para brindarles la oportunidad de repasar los conceptos aprendidos en dicho curso, mientras que los diagramas de cortante y de momento flexionante se cubren con detalle en las secciones 5.2 y 5.3. Las propiedades de momentos y centroides de áreas se describen en el apéndice A; este material puede emplearse para reforzar el análisis de la determinación de esfuerzos normales y cortantes en vigas (capítulos 4, 5 y 6).

Los primeros cuatro capítulos del libro se dedican al análisis de los esfuerzos y las deformaciones correspondientes en diversos elementos estructurales, considerando sucesivamente carga axial, torsión y flexión pura. Cada análisis se sustenta en algunos conceptos básicos, tales como las condiciones de equilibrio de las fuerzas ejercidas sobre el elemento, las relaciones existentes entre el esfuerzo y la deformación unitaria del material, y las condiciones impuestas por los apoyos y la carga del elemento. El estudio de cada tipo de condición de carga se complementa con un gran número de ejemplos, problemas modelo y problemas por resolver, diseñados en su totalidad para fortalecer la comprensión del tema por parte de los alumnos.

En el capítulo 1 se introduce el concepto de esfuerzo en un punto, donde se muestra que una carga axial puede producir esfuerzos cortantes así como esfuerzos normales, dependiendo de la sección considerada. El que los esfuerzos dependen de la orientación de la superficie sobre la que se calculan se enfatiza de nuevo en los capítulos 3 y 4, en los casos de torsión y flexión pura. Sin embargo, el análisis de las técnicas de cálculo —como el círculo de Mohr— empleadas para la transformación del esfuerzo en un punto se presenta en el capítulo 7, después de que los estudiantes han tenido la oportunidad de resolver los problemas que involucran una combinación de las cargas básicas y han descubierto por sí mismos la necesidad de tales técnicas.

En el capítulo 2, el análisis de la relación entre el esfuerzo y la deformación en varios materiales incluye los materiales compuestos con reforzamiento fibroso. También, el estudio de vigas bajo carga transversal se cubre en dos capítulos por separado. El capítulo 5 está dedicado a la determinación de los esfuerzos normales en una viga y al diseño de vigas con base en los esfuerzos normales permisibles en el material empleado (sección 5.4). El capítulo empieza con un análisis de los diagramas de cortante y de momento flexionante (secciones 5.2 y 5.3) e incluye una sección opcional acerca del uso de las funciones de singularidad para la determinación del cortante y del momento flexionante en una viga (sección 5.5). El capítulo termina con una sección optativa acerca de vigas no prismáticas (sección 5.6).

El capítulo 6 se dedica a la determinación de los esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada bajo cargas transversales. La fórmula del flujo por cortante, $q = VQ/I$, se determina de la manera tradicional. Los aspectos más avanzados del diseño de vigas, como la determinación de los esfuerzos principales en la unión del patín y el alma de una viga W, se encuentran en el capítulo 8, un capítulo optativo que puede cubrirse después de haber estudiado las transformaciones de esfuerzos en el capítulo 7. El diseño de ejes de transmisión está en ese capítulo por la misma razón, así como la determinación de esfuerzos bajo cargas combinadas que ahora puede incluir la determinación de los esfuerzos principales, de los planos principales, y del esfuerzo cortante máximo en un punto dado.

Los problemas estáticamente indeterminados se analizan primero en el capítulo 2, y después se manejan a lo largo de todo el texto para las diversas condiciones de carga encontradas. De esta manera, se les presenta a los estudiantes, desde una etapa temprana, un método de solución que combina el análisis de deformaciones con el análisis convencional de fuerzas empleado en estática. Así, se busca que al finalizar el curso el estudiante se encuentre completamente familiarizado con dicho método fundamental. Además, este enfoque ayuda a los estudiantes a darse cuenta de que los esfuerzos son estáticamente indeterminados y sólo pueden calcularse considerando la correspondiente distribución de deformaciones unitarias.

El concepto de deformación plástica se introduce en el capítulo 2, donde se aplica al análisis de elementos bajo carga axial. Los problemas que involucran la deformación plástica de ejes circulares y de vigas prismáticas se consideran también en las secciones opcionales de los capítulos 3, 4 y 6. Aunque el profesor puede omitir parte de este material, si así lo cree pertinente, su inclusión en el cuerpo del libro se debió a que se considera útil que los estudiantes comprendan las limitaciones de la suposición de una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria, y servirá para prevenirlos contra el uso inapropiado de las fórmulas de torsión y de flexión elástica.

En el capítulo 9 se estudia la determinación de la deflexión en vigas. La primera parte del capítulo se dedica a los métodos de integración y de superposición, e incluye una sección opcional (la sección 9.6) que se basa en el uso de las funciones de singularidad. (Esta sección deberá usarse únicamente después de haber cubierto la 5.5.) La segunda parte del capítulo 9 es opcional. Presenta el método de área de momento en dos lecciones.

El capítulo 10 se dedica al estudio de columnas y contiene material acerca del diseño de columnas de acero, aluminio y madera. El capítulo 11 cubre los métodos de energía, incluyendo el teorema de Castigliano.

ASPECTOS PEDAGÓGICOS

Cada capítulo comienza con una sección introductoria que establece el propósito y las metas del capítulo, y describe en términos sencillos el material a ser estudiado y sus aplicaciones a la solución de problemas de ingeniería.

Lecciones del capítulo. El cuerpo del texto se ha dividido en unidades, y cada unidad consta de una o varias secciones de teoría seguidas de problemas modelo y de un gran número de problemas de repaso. Cada unidad corresponde a un tema bien definido y, por lo general, puede cubrirse en una sola lección.

Ejemplos y problemas modelo. Las secciones de teoría incluyen muchos ejemplos diseñados para ilustrar el material que se presenta y facilitar su comprensión. Los problemas modelo tienen la intención de mostrar algunas de las aplicaciones de la teoría a la solución de problemas de ingeniería. Como estos problemas se plantean casi de la misma manera que los estudiantes utilizarán para resolver los ejercicios asignados, los problemas modelo tienen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar el tipo de trabajo limpio y ordenado que los estudiantes deberán seguir en sus propias soluciones.

Series de problemas de tarea. La mayor parte de los problemas son de naturaleza práctica y deben resultar atractivos a los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, se diseñaron principalmente para ilustrar el material presentado en el texto y para ayudar a los estudiantes a comprender los principios básicos que se usan en la mecánica de materiales. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las secciones del material que ilustran y se han acomodado en orden ascendente de dificultad. Los problemas que requieren atención especial se indican con asteriscos. Las respuestas a los problemas se encuentran al final del libro, con excepción de aquellos cuyo número se ha impreso en cursiva.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo termina con un repaso y un resumen del material cubierto en el capítulo. Se han incluido notas al margen para ayudar a los estudiantes a organizar su trabajo de repaso, y se dan referencias cruzadas para ayudarles a encontrar las partes que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye una serie de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. La disponibilidad de las computadoras personales permite a los estudiantes de ingeniería resolver un gran número de problemas complejos. Al final de cada capítulo puede encontrarse un grupo de seis o más problemas diseñados para resolverse con una computadora. El desarrollo del algoritmo requerido para resolver un problema dado beneficiará a los estudiantes de dos maneras distintas: (1) les ayudará a obtener una mejor comprensión de los principios de mecánica involucrados; (2) les brindará la oportunidad de aplicar las habilidades adquiridas en su curso de programación de computadoras a la solución de problemas significativos de ingeniería.

Examen de fundamentos de ingeniería. Los ingenieros que deseen obtener una licencia como *ingenieros profesionales* en Estados Unidos deben presentar dos exámenes. El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, incluye temas pertenecientes a la *Mecánica de materiales*. En el apéndice E de este libro se presenta una lista de los temas de *Mecánica de materiales* que se cubren en este examen junto con algunos problemas que pueden resolverse para repasar dichos temas.

RECURSOS COMPLEMENTARIOS

Manual de soluciones del profesor. El Manual de soluciones del profesor que acompaña a la quinta edición continúa una tradición de exactitud excepcional y presenta las soluciones contenidas en una sola página con el fin de tener una referencia más sencilla. El Manual también contiene tablas diseñadas para ayudar a los profesores en la creación de un programa de tareas para sus cursos. En la tabla I se enlistan los diferentes temas cubiertos en el texto, asimismo se indica un número sugerido de sesiones que pueden dedicarse a cada tema. En la tabla II se proporciona una descripción breve de todos los grupos de problemas y una clasificación de los problemas en cada grupo de acuerdo con las unidades. Dentro del manual también aparecen muestras de cómo realizar la programación de lecciones.

ARIS de McGraw-Hill. Sistema de evaluación, repaso e instrucción. ARIS (*Assesment, Review, and Instruction System*) es un sistema completo de tutoría en línea, tareas electrónicas y administración del curso diseñado para que los profesores elaboren y califiquen tareas, editen preguntas y algoritmos, importen contenidos propios, diseñen y compartan materiales de clase con otros profesores y publiquen anuncios y fechas de entrega para las tareas. ARIS califica y hace informes automáticos de las tareas y exámenes que genera de manera algorítmica. Los estudiantes obtienen el beneficio de la práctica ilimitada que les ofrecen los problemas algorítmicos. Entre los recursos disponibles en ARIS se incluyen archivos en PowerPoint e imágenes extraídas del texto. Visite el sitio en www.mhhe.com/beerjohnston.

Hands-On Mechanics. Hands-On Mechanics (o mecánica práctica) es un sitio Web diseñado por profesores interesados en incorporar ayudas prácticas tridimensionales a los temas que imparten durante sus clases. Este sitio, que fue elaborado por McGraw-Hill en sociedad con el Departamento de Ingeniería Civil y Mecánica de la United States Military Academy en West Point, no sólo proporciona instrucciones detalladas de cómo construir herramientas tridimensionales con materiales que se pueden encontrar en cualquier laboratorio o tienda de materiales, sino que también proporciona el acceso a una comunidad donde los educadores pueden compartir ideas, intercambiar sus mejores prácticas y enviar sus propias demostraciones para colocarlas en el sitio. Visite www.handsonmechanics.com para ver cómo puede utilizar el sitio en su salón de clases.

RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen a las numerosas empresas que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer el gran esfuerzo y la paciencia de la persona encargada de recopilar las fotografías, Sabina Dowell. Se reconoce, con gratitud, a Dennis Ormand de FineLine Illustrations de Farmingdale, Nueva York, por las ingeniosas ilustraciones que contribuyeron en gran medida a la eficacia del texto.

Un agradecimiento especial para el profesor Dean Updike, del departamento de ingeniería mecánica de Lehigh University, por su paciencia y cooperación al revisar las soluciones y respuestas a todos los problemas de esta edición.

También se agradece la ayuda, los comentarios y las sugerencias ofrecidas por los numerosos usuarios de las ediciones previas de *Mecánica de materiales.*

E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

Lista de símbolos

a	Constante; distancia
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Fuerzas; reacciones
$A, B, C, \ldots$	Puntos
$A, \mathcal{A}$	Área
b	Distancia; ancho
c	Constante; distancia; radio
C	Centroide
$C_1, C_2, \ldots$	Constantes de integración
C_P	Factor de estabilidad de una columna
d	Distancia; diámetro; profundidad
D	Diámetro
e	Distancia; excentricidad; dilatación
E	Módulo de elasticidad
f	Frecuencia; función
$\mathbf{F}$	Fuerza
$F.S.$	Factor de seguridad
G	Módulo de rigidez; módulo de corte
h	Distancia; altura
$\mathbf{H}$	Fuerza
H, J, K	Puntos
$I, I_x, \ldots$	Momento de inercia
$I_{xy}, \ldots$	Producto de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de resorte; factor de forma; módulo volumétrico; constante
K	Factor de concentración de esfuerzos; constante de resorte de torsión
l	Longitud; claro
L	Longitud; claro
L_e	Longitud efectiva
m	Masa
$\mathbf{M}$	Par
$M, M_x, \ldots$	Momento flector
M_D	Momento flector, carga muerta (DCFR)
M_L	Momento flector, carga viva (DCFR)
M_U	Momento flector, carga última (DCFR)
n	Número, relación de módulos de elasticidad; dirección normal
p	Presión
$\mathbf{P}$	Fuerza; carga concentrada
P_D	Carga muerta (DCFR)
P_L	Carga viva (DCFR)
P_U	Carga última (DCFR)
q	Fuerza cortante por unidad de longitud; flujo cortante
$\mathbf{Q}$	Fuerza
Q	Primer momento de área
r	Radio; radio de giro
$\mathbf{R}$	Fuerza; reacción
R	Radio; módulo de ruptura
s	Longitud
S	Módulo elástico de sección
t	Espesor; distancia; desviación tangencial
$\mathbf{T}$	Momento de torsión
T	Temperatura
u, v	Coordenadas rectangulares
u	Densidad de energía de deformación
U	Energía de deformación; trabajo
$\mathbf{v}$	Velocidad
$\mathbf{V}$	Fuerza cortante
V	Volumen; corte
w	Ancho; distancia; carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}, W$	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancia; desplazamientos; deflexiones
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas del centroide
Z	Módulo plástico de sección
α, β, γ	Ángulos
α	Coeficiente de expansión térmica; coeficiente de influencia
γ	Deformación de corte; peso específico
γ_D	Factor de carga, carga muerta (DCFR)
γ_L	Factor de carga, carga viva (DCFR)
δ	Deformación; desplazamiento
ϵ	Deformación unitaria normal
θ	Ángulo; pendiente
λ	Coseno director
ν	Relación de Poisson
ρ	Radio de curvatura; distancia; densidad
σ	Esfuerzo normal
τ	Esfuerzo cortante
ϕ	Ángulo; ángulo de giro; factor de resistencia
ω	Velocidad angular

MECÁNICA DE MATERIALES

CAPÍTULO

1

Introducción. El concepto de esfuerzo

Este capítulo se dedica al estudio de los esfuerzos que ocurren en muchos de los elementos contenidos en estas excavadoras, como los elementos con dos fuerzas, los ejes, los pernos y los pasadores.

1.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo principal del estudio de la mecánica de materiales es suministrar al futuro ingeniero los conocimientos para analizar y diseñar las diversas máquinas y estructuras portadoras de carga.

Tanto el análisis como el diseño de una estructura dada involucran la determinación de *esfuerzos* y *deformaciones*. Este primer capítulo está dedicado al concepto de *esfuerzo*.

La sección 1.2 es un breve repaso de los métodos básicos de la estática y de la aplicación de esos métodos a la determinación de las fuerzas en los elementos de una estructura sencilla que se componga de elementos unidos entre sí por pernos. En la sección 1.3 se introducirá el concepto de *esfuerzo* en un elemento de una estructura, y se mostrará cómo puede determinarse ese esfuerzo a partir de la *fuerza* en el elemento. Tras una breve revisión del análisis y diseño de ingeniería (sección 1.4), se abordan, de manera sucesiva, los *esfuerzos normales* en un elemento bajo carga axial (sección 1.5), los *esfuerzos cortantes* ocasionados por la aplicación de fuerzas transversales iguales y opuestas (sección 1.6) y los *esfuerzos de apoyo* creados por los pernos y pasadores en los elementos que conectan (sección 1.7). Estos conceptos serán aplicados en la sección 1.8 a la determinación de los esfuerzos en la estructura sencilla que se consideró en la sección 1.2.

La primera parte del capítulo termina con una descripción del método que deberá utilizarse en la solución de problemas propuestos (sección 1.9) y con el estudio de la exactitud numérica adecuada para los cálculos de ingeniería (sección 1.10).

En la sección 1.11, donde un elemento con dos fuerzas bajo carga axial se considera de nuevo, se observará que los esfuerzos en un plano *oblicuo* incluyen tanto esfuerzos *normales* como *cortantes*, mientras que en la sección 1.12 se analizará que se requieren *seis componentes* para describir el estado de esfuerzos en un punto en un cuerpo bajo las condiciones más generales de carga.

Finalmente, la sección 1.13 se enfocará a la determinación, a partir de especímenes de prueba, de la *resistencia última* de un material dado y al uso de un *factor de seguridad* en el cálculo de la *carga permisible* para un componente estructural fabricado con dicho material.

1.2 UN BREVE REPASO DE LOS MÉTODOS DE LA ESTÁTICA

En esta sección se repasarán los métodos básicos de la estática al mismo tiempo que se determinan las fuerzas en los elementos de una estructura sencilla.

Considere la estructura mostrada en la figura 1.1, diseñada para soportar una carga de 30 kN. Consta de un aguilón *AB* con una sección transversal rectangular de 30 × 50 mm y de una varilla *BC* con una sección transversal circular de 20 mm de diámetro. El aguilón y la varilla están conectados por un perno en *B* y los soportan pernos y ménsulas en *A* y en *C*, respectivamente. El primer paso será dibujar el *diagrama de cuerpo libre* de la estructura, desprendiéndola de sus soportes en *A* y en *C*, y mostrando las reacciones que estos soportes ejercen sobre la estructura (figura 1.2). Advierta que el boceto de la estructura se ha simplificado omitiendo los detalles innecesarios. En este punto algunos habrán reconocido que *AB* y *BC* son *elementos con dos fuerzas*. Para quienes no lo hayan hecho, se proseguirá el análisis, ignorando este hecho y suponiendo que las direcciones de las reacciones en *A* y en *C* se desconocen. Cada una de estas reacciones, por lo tanto, será

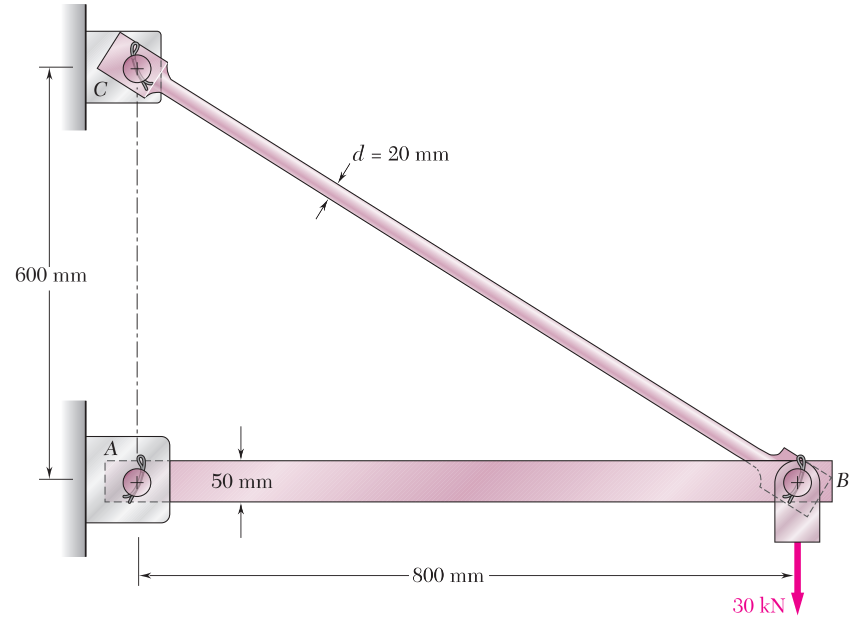


Figura 1.1

representada por dos componentes, $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ en A, y $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ en C. Se escribirán las tres siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad A_x(0.6 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) = 0$$

$$A_x = +40 \text{ kN} \tag{1.1}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x + C_x = 0$$

$$C_x = -A_x \qquad C_x = -40 \text{ kN} \tag{1.2}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y + C_y - 30 \text{ kN} = 0$$

$$A_y + C_y = +30 \text{ kN} \tag{1.3}$$

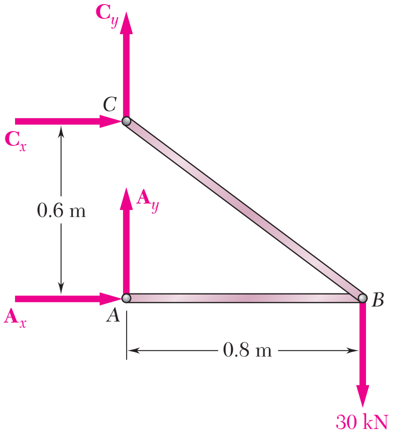


Figura 1.2

Note que se han encontrado dos de las cuatro incógnitas, pero que no es posible determinar las otras dos de estas ecuaciones, y no pueden obtenerse ecuaciones independientes adicionales a partir del diagrama de cuerpo libre de la estructura. Ahora debe desmembrarse la estructura. Considerando el diagrama de cuerpo libre del aguilón AB (figura 1.3), se escribirá la siguiente ecuación de equilibrio:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(0.8 \text{ m}) = 0 \qquad A_y = 0 \tag{1.4}$$

Al sustituir A_y de la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3), se obtiene que $C_y = +30$ kN. Expresando los resultados obtenidos para las reacciones en A y en C en forma vectorial, se tiene que

$$\mathbf{A} = 40 \text{ kN} \rightarrow \qquad \mathbf{C}_x = 40 \text{ kN} \leftarrow, \mathbf{C}_y = 30 \text{ kN}\uparrow$$

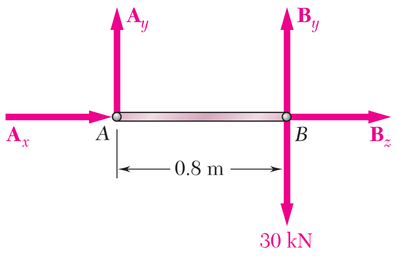


Figura 1.3

Observe que la reacción en A se dirige a lo largo del eje del aguilón AB y que causa compresión en ese elemento. Al notar que los componentes C_x y C_y de la reacción en C son respectivamente proporcionales a las componentes horizontal y vertical de la distancia de B a C, se concluye que la reacción en C es igual a 50 kN, que está dirigida a lo largo del eje de la varilla BC, y que causa tensión en ese elemento.

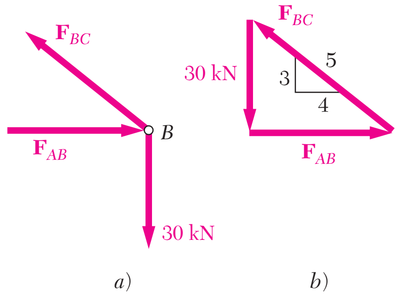


Figura 1.4

Estos resultados podrían haberse anticipado reconociendo que *AB* y *BC* son elementos con dos fuerzas, es decir, elementos sometidos a fuerzas sólo en dos puntos, siendo estos puntos *A* y *B* para el elemento *AB* y *B* y *C* para el elemento *BC*. De hecho, para un elemento con dos fuerzas las líneas de acción de las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de los dos puntos son iguales y opuestas y pasan a través de ambos puntos. Utilizando esta propiedad, podría haberse obtenido una solución más sencilla si se considera el diagrama de cuerpo libre del perno *B*. Las fuerzas sobre el perno *B* son las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ ejercidas, respectivamente, por los elementos *AB* y *BC*, y la carga de 30 kN (figura 1.4*a*). Se dice que el perno *B* está en equilibrio dibujando el triángulo de fuerzas correspondiente (figura 1.4*b*).

Ya que la fuerza $\mathbf{F}_{BC}$ se dirige a lo largo del elemento *BC*, su pendiente es la misma que *BC*, es decir, 3/4. Por lo tanto, puede escribirse la proporción

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

de la que se obtiene

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \qquad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

Las fuerzas $\mathbf{F}'_{AB}$ y $\mathbf{F}'_{BC}$ que el perno *B* ejerce sobre, respectivamente, el aguilón *AB* y sobre la varilla *BC* son iguales y opuestas a $\mathbf{F}_{AB}$ y a $\mathbf{F}_{BC}$ (figura 1.5).

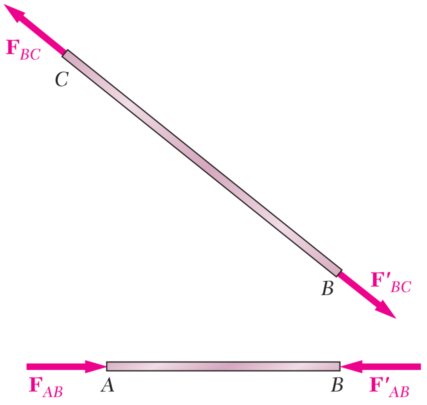


Figura 1.5

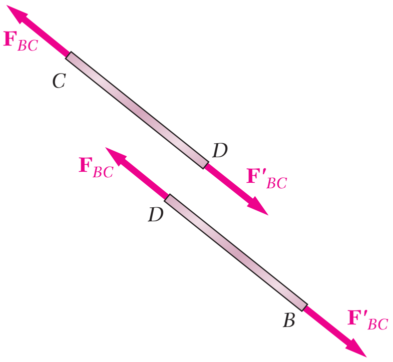


Figura 1.6

Si se conocen las fuerzas en los extremos de cada uno de los elementos, es posible determinar las fuerzas internas de estos elementos. Al efectuar un corte en algún punto arbitrario, *D*, en la varilla *BC*, se obtienen dos porciones, *BD* y *CD* (figura 1.6). Como deben aplicarse fuerzas de 50 kN en *D* a ambas porciones de la varilla, para mantenerlas en equilibrio, se concluye que una fuerza interna de 50 kN se produce en la varilla *BC* cuando se aplica una carga de 30 kN en *B*. Se constata, de manera adicional, por las direcciones en las fuerzas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}'_{BC}$ en la figura 1.6, que la varilla se encuentra en tensión. Un procedimiento similar permitiría determinar que la fuerza interna en el aguilón *AB* es de 40 kN y que el aguilón está en compresión.

1.3 ESFUERZOS EN LOS ELEMENTOS DE UNA ESTRUCTURA

Si bien los resultados obtenidos en la sección precedente representan un primer paso necesario en el análisis de la estructura dada, ellos son insuficientes para determinar si la carga puede ser soportada con seguridad. Por ejemplo, el que la varilla *BC* pueda romperse o no hacerlo bajo esta carga depende no sólo del valor encontrado para la fuerza interna F_{BC}, sino también del área transversal de la varilla y del material con que ésta haya sido elaborada. De hecho, la fuerza interna F_{BC} en realidad representa la resultante de las fuerzas elementales distribuidas a lo largo de toda el área *A* de la sección transversal (figura 1.7), y la intensidad promedio de estas fuerzas distribuidas es igual a la fuerza por unidad de área, F_{BC}/A, en la sección. El hecho de que la varilla se rompa o no bajo la carga dada, depende claramente de la capacidad que tenga el material de soportar el valor correspondiente F_{BC}/A de la intensidad de las fuerzas internas distribuidas. Por lo tanto, la resistencia a la fractura depende de la fuerza F_{BC}, del área transversal *A* y del material de la varilla.

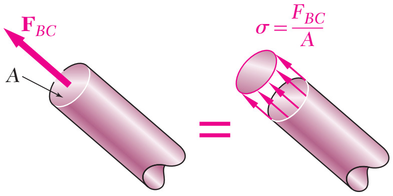


Figura 1.7

La fuerza por unidad de área, o la intensidad de las fuerzas distribuidas a través de una sección dada, se llama *esfuerzo* sobre esa sección y se representa con la letra griega σ (sigma). El esfuerzo en un elemento con área transversal *A* sometido a una carga axial **P** (figura 1.8) se obtiene, por lo tanto, al dividir la magnitud *P* de la carga entre el área *A*:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

Se empleará un signo positivo para indicar un esfuerzo de tensión (el elemento a tensión) y un signo negativo para indicar un esfuerzo compresivo (el elemento a compresión).

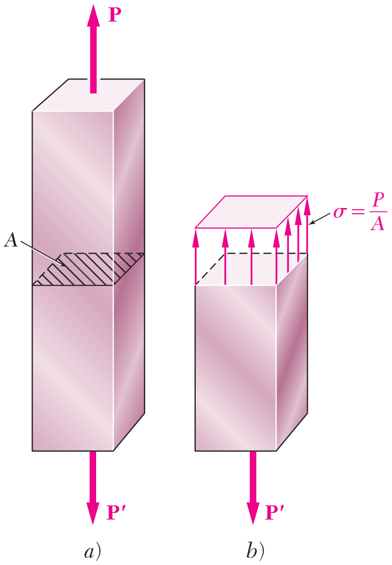


Figura 1.8

Debido a que se emplean unidades del sistema SI en estos análisis, con *P* expresada en newtons (N) y *A* en metros cuadrados (m^2), el esfuerzo σ se expresará en N/m^2. Esta unidad se denomina *pascal* (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad muy pequeña, por lo que, en la práctica, deben emplearse múltiplos de esta unidad, como el kilopascal (kPa), el megapascal (MPa) y el gigapascal (GPa). Se tiene que

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

Cuando se utilizan las unidades acostumbradas en Estados Unidos, la fuerza *P* comúnmente se expresa en libras (lb) o kilolibras (kip), y el área transversal *A* en pulgadas cuadradas (in.^{2}). El esfuerzo σ, en consecuencia, se presenta en libras por pulgada cuadrada (psi) o en kilolibras por pulgada cuadrada (ksi).†

---

† Las unidades principales SI y americanas utilizadas en mecánica se incluyen en tablas en el interior de la cubierta frontal de este libro. De la tabla del lado derecho, se observa que 1 psi es aproximadamente igual a 7 kPa, y que 1 ksi se aproxima a 7 MPa.

1.4 ANÁLISIS Y DISEÑO

Considerando nuevamente la estructura de la figura 1.1, suponga que la varilla *BC* es de un acero que presenta un esfuerzo máximo permisible $\sigma_{\text{perm}} = 165$ MPa. ¿Puede soportar la varilla *BC* con seguridad la carga a la que se le someterá? La magnitud de la fuerza F_{BC} en la varilla se calculó con anterioridad en un valor de 50 kN. Recuerde que el diámetro de la varilla es de 20 mm, por lo que deberá utilizarse la ecuación (1.5) para determinar el esfuerzo creado en la varilla por la carga dada. Así se tiene que

$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{20 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

Como el valor obtenido para σ es menor que el valor σ_{perm} del esfuerzo permisible del acero utilizado, se concluye que la varilla *BC* soportará con seguridad la carga a la que será sujeta. Para que el análisis de la estructura dada sea completo, también deberá incluirse la determinación del esfuerzo de compresión en el aguilón *AB*, así como una investigación de los esfuerzos producidos en los pasadores y en sus soportes. Esto se estudiará más adelante en este mismo capítulo. También es necesario determinar si las deformaciones producidas por la carga dada son aceptables. El estudio de la deformación bajo cargas axiales será el tema del capítulo 2. Una consideración adicional, requerida por los elementos bajo compresión, involucra la *estabilidad* del elemento, es decir, su capacidad para soportar una carga dada sin experimentar un cambio súbito de configuración. Este tema se abordará en el capítulo 10.

El papel del ingeniero no se restringe al análisis de las estructuras y máquinas existentes sometidas a condiciones dadas de carga. Un asunto de mayor importancia que interesa a los ingenieros es el *diseño* de estructuras y máquinas nuevas, es decir, la selección de los componentes apropiados para desempeñar una tarea dada. Como ejemplo de diseño, véase otra vez la estructura de la figura 1.1; suponga que se empleará en ella aluminio, el cual tiene un esfuerzo permisible $\sigma_{\text{perm}} = 100$ MPa. Debido a que la fuerza en la varilla *BC* será $P = F_{BC} = 50$ kN bajo la carga dada, se emplea la ecuación (1.5),

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

y, ya que $A = \pi r^2$,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12.62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12.62 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25.2 \text{ mm}$$

Se concluye que una varilla de aluminio de 26 mm, o de diámetro mayor, será adecuada.

1.5 CARGA AXIAL. ESFUERZO NORMAL

Como ya se ha indicado, la varilla *BC* del ejemplo considerado en la sección precedente es un elemento sometido a dos fuerzas y, por lo tanto, las fuerzas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}'_{BC}$ que actúan en sus extremos *B* y *C* (figura 1.5) se dirigen a lo largo del eje de la varilla. Se dice que la varilla se encuentra bajo *carga axial*. Un ejemplo real de elementos estructurales bajo carga axial es dado por los elementos de la armadura del puente que se muestra en la figura 1.9.

Figura 1.9 Esta armadura de puente se compone de elementos de dos fuerzas que pueden estar en tensión o en compresión.

Retornando a la varilla *BC* de la figura 1.5, hay que recordar que la escisión a la que se le sometió para determinar su fuerza interna y su correspondiente esfuerzo era perpendicular a su eje; la fuerza interna era, por lo tanto, normal al plano de la sección (figura 1.7) y el esfuerzo correspondiente se describe como un *esfuerzo normal*. Así, la fórmula (1.5) da el *esfuerzo normal en un elemento bajo carga axial*:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

Es preciso advertir que, en la fórmula (1.5), σ se obtiene al dividir la magnitud *P* de la resultante de las fuerzas internas distribuidas en la sección transversal entre el área *A* de la sección transversal; representa, por lo tanto, el *valor promedio* del esfuerzo a través de la sección transversal, y no el valor de un esfuerzo en un punto específico de la sección transversal.

Para definir el esfuerzo en un punto dado *Q* en la sección transversal, debe considerarse una pequeña área ΔA (figura 1.10). Cuando se divide la magnitud de $\Delta\mathbf{F}$ entre ΔA, se obtiene el valor promedio del esfuerzo a través de ΔA. Al aproximar ΔA a cero, se halla el esfuerzo en el punto *Q*:

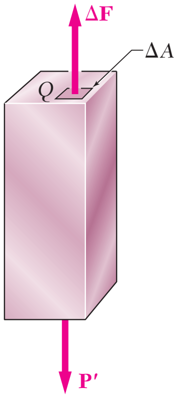


Figura 1.10

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

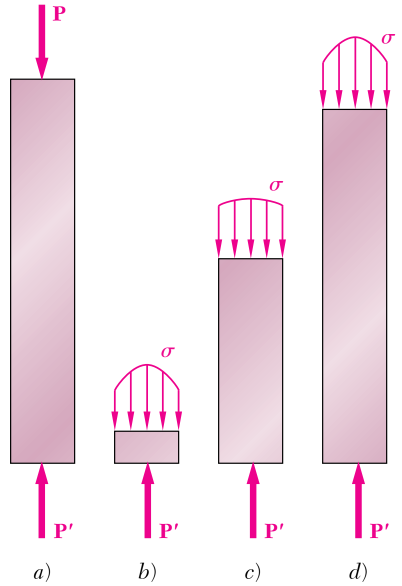


Figura 1.11

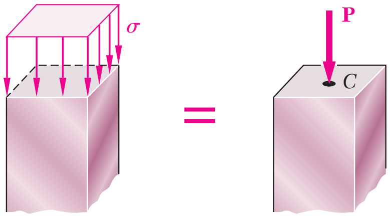


Figura 1.12

En general, el valor obtenido para el esfuerzo, σ, en un punto dado, Q, de la sección es diferente al valor del esfuerzo promedio dado por la fórmula (1.5), y se encuentra que σ varía a través de la sección. En una varilla delgada sujeta a cargas concentradas, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$, iguales y opuestas (figura 1.11*a*), la variación es pequeña en una sección que se encuentre lejos de los puntos de aplicación de las cargas concentradas (figura 1.11*c*), pero es bastante notoria en el vecindario de estos puntos (figuras 1.11*b* y *d*).

De la ecuación (1.6), se deduce que la magnitud de la resultante de las fuerzas internas distribuidas es

$$\int dF = \int_A \sigma \, dA$$

No obstante, las condiciones de equilibrio de cada una de las porciones de varilla mostradas en la figura 1.11 requiere que esta magnitud sea igual a la magnitud P de las cargas concentradas. Se tiene, entonces,

$$P = \int dF = \int_A \sigma \, dA \tag{1.7}$$

lo que significa que el volumen bajo cada una de las superficies esforzadas en la figura 1.11 debe ser igual a la magnitud P de las cargas. Esto, sin embargo, es la única información que es posible determinar a partir de nuestro conocimiento sobre estática, con respecto a la distribución de los esfuerzos normales en las diversas secciones de la varilla. La distribución real de los esfuerzos en cualquier sección dada es *estáticamente indeterminada*. Para saber más acerca de esta distribución, es necesario considerar las deformaciones que resultan del modo particular de la aplicación de las cargas en los extremos de la varilla. Esto se explicará con mayor atención en el capítulo 2.

En la práctica, se supondrá que la distribución de los esfuerzos normales en un elemento cargado axialmente es uniforme, excepto en la vecindad inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. El valor σ del esfuerzo es entonces igual a σ_{prom} y puede calcularse con la fórmula (1.5). Sin embargo, hay que darse cuenta de que, cuando se supone una distribución uniforme de los esfuerzos en la sección, es decir, cuando se supone que las fuerzas internas se encuentran distribuidas uniformemente a través de la sección, la estática elemental† dice que la resultante $\mathbf{P}$ de las fuerzas internas debe aplicarse en el centroide C de la sección (figura 1.12). Esto significa que *una distribución uniforme del esfuerzo es posible sólo si la línea de acción de las cargas concentradas* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{P}'$ *pasa a través del centroide de la sección considerada* (figura 1.13). Este tipo de carga se denomina *carga céntrica* y se supondrá que tiene lugar en todos los elementos rectos de dos fuerzas que se encuentran en armaduras y en estructuras conectadas con pasadores, como la que se considera en la figura 1.1. Sin embargo, si un elemento con dos fuerzas está cargado de manera axial, pero *excéntricamente*, como en la figura

---

† Véase Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1987, o *Vector Mechanics for Engineers*, 6a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1996, secciones 5.2 y 5.3.

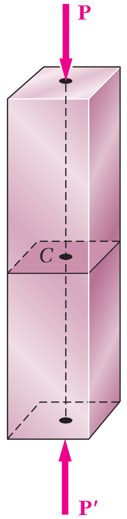


Figura 1.13

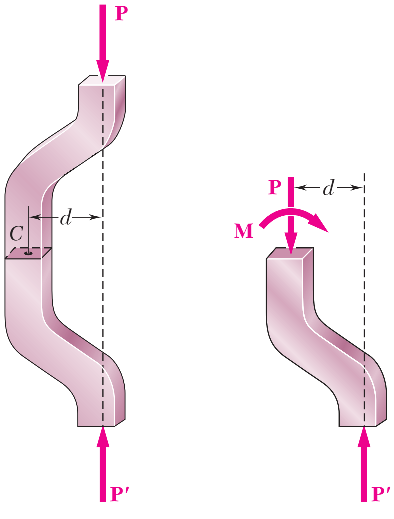


Figura 1.14

1.14*a*, se encuentra que, a partir de las condiciones de equilibrio de la porción del elemento que se muestra en la figura 1.14*b*, las fuerzas internas en una sección dada deben ser equivalentes a una fuerza **P** aplicada al centroide de la sección y a un par **M** cuyo momento es $M = Pd$. La distribución de fuerzas —y, por lo tanto, la correspondiente distribución de esfuerzos— *no puede ser uniforme*. Tampoco la distribución de esfuerzos puede ser simétrica como se muestra en la figura 1.11. Este punto se analizará detalladamente en el capítulo 4.

1.6 ESFUERZO CORTANTE

Las fuerzas internas y sus correspondientes esfuerzos estudiados en las secciones 1.2 y 1.3, eran normales a la sección considerada. Un tipo muy diferente de esfuerzo se obtiene cuando se aplican fuerzas transversales **P** y **P′** a un elemento *AB* (figura 1.15). Al efectuar un corte en *C* entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas (figura 1.16*a*), obtenemos el diagrama de la porción *AC* que se muestra en la figura 1.16*b*. Se concluye que deben existir fuerzas internas en el plano de la sección, y que su resultante es igual a **P**. Estas fuerzas internas elementales se conocen como *fuerzas cortantes*, y la magnitud *P* de su resultante es el *cortante* en la sección. Al dividir el cor-

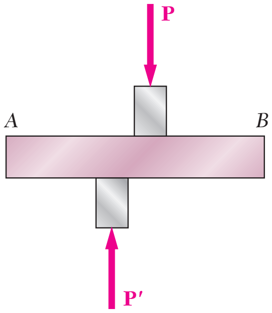


Figura 1.15

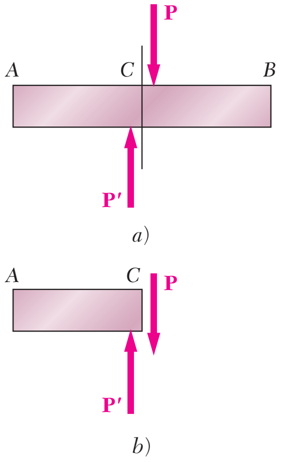


Figura 1.16

tante P entre el área A de la sección transversal, se obtiene el *esfuerzo cortante promedio* en la sección. Representando el esfuerzo cortante con la letra griega τ (tau), se escribe

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

Debe enfatizarse que el valor obtenido es un valor promedio para el esfuerzo cortante sobre toda la sección. Al contrario de lo dicho con anterioridad para los esfuerzos normales, en este caso *no puede* suponerse que la distribución de los esfuerzos cortantes a través de una sección sea uniforme. Como se verá en el capítulo 6, el valor real τ del esfuerzo cortante varía de cero en la superficie del elemento hasta un valor máximo $\tau_{\text{máx}}$ que puede ser mucho mayor que el valor promedio, τ_{prom}.

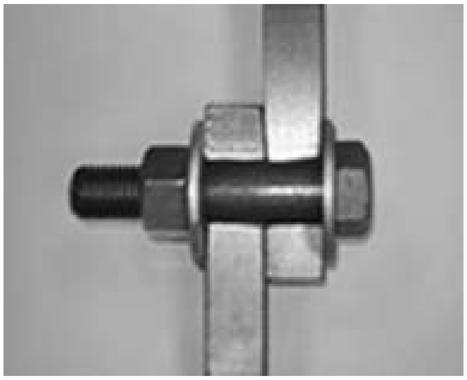


Figura 1.17 Vista en corte de una conexión con un perno en cortante.

Los esfuerzos cortantes se encuentran comúnmente en pernos, pasadores y remaches utilizados para conectar diversos elementos estructurales y componentes de máquinas (figura 1.17). Considere dos placas A y B conectadas por un perno CD (figura 1.18). Si a las placas se les somete a fuerzas de tensión de magnitud F, se desarrollarán esfuerzos en la sección del perno que corresponde al plano EE'. Al dibujar los diagramas del perno y de la porción localizada por encima del plano EE' (figura 1.19), se concluye que el cortante P en la sección es igual a F. Se obtiene el esfuerzo cortante promedio en la sección, de acuerdo con la fórmula (1.8), dividiendo el cortante $P = F$ entre el área A de la sección transversal:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

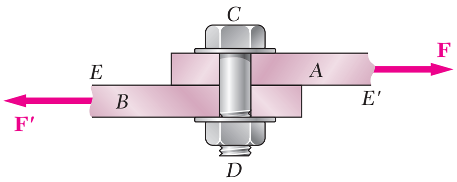


Figura 1.18

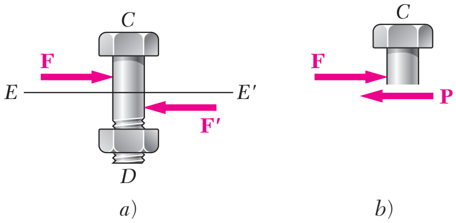


Figura 1.19

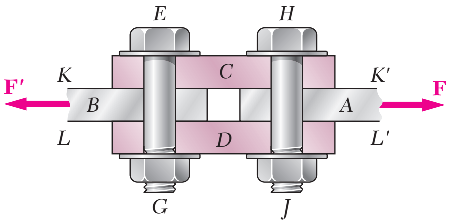
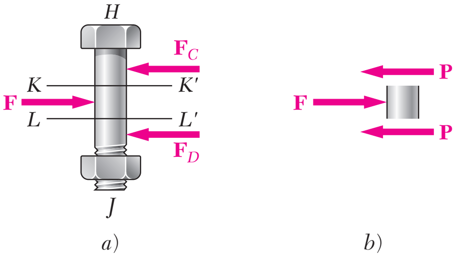


Figura 1.20



a) b)

Figura 1.21

El perno que se ha considerado está en lo que se conoce como *cortante simple*. Sin embargo, pueden surgir diferentes condiciones de carga. Por ejemplo, si las placas de empalme C y D se emplean para conectar las placas A y B (figura 1.20), el corte tendrá lugar en el perno HJ en cada uno de los dos planos KK' y LL' (al igual que en el perno EG). Se dice que los pernos están en *corte doble*. Para determinar el esfuerzo cortante promedio en cada plano, se dibujan los diagramas de cuerpo libre del perno HJ y de la porción del perno localizada entre los dos planos (figura 1.21). Observando que el corte P en cada una de las secciones es $P = F/2$, se concluye que el esfuerzo cortante promedio es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \qquad (1.10)$$

1.7 ESFUERZO DE APOYO EN CONEXIONES

Los pernos, pasadores y remaches crean esfuerzos en la *superficie de apoyo* o superficie de contacto de los elementos que conectan. Por ejemplo, considere nuevamente las dos placas A y B conectadas por un perno CD que se analizaron en la sección precedente (figura 1.18). El perno ejerce una fuerza **P** sobre la placa A igual y opuesta a la fuerza **F** ejercida por la placa sobre el perno (figura 1.22). La fuerza **P** representa la resultante de las fuerzas elementales distribuidas en la superficie interior de un medio cilindro de diámetro d y longitud t igual al espesor de la placa. Como la distribución de estas fuerzas, y de los esfuerzos correspondientes, es muy complicada, en la práctica se utiliza un valor nominal promedio σ_b para el esfuerzo, llamado *esfuerzo de apoyo*, que se obtiene de dividir la carga P entre el área del rectángulo que representa la proyección del perno sobre la sección de la placa (figura 1.23). Debido a que esta área es igual a td, donde t es el espesor de la placa y d el diámetro del perno, se tiene que

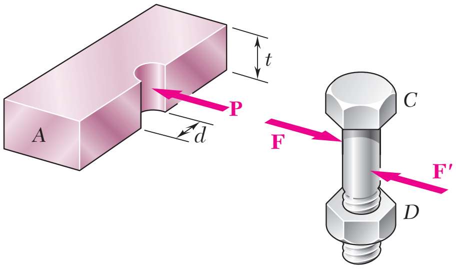


Figura 1.22

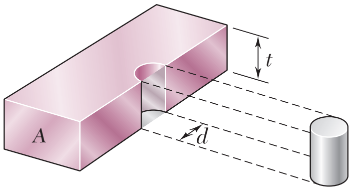


Figura 1.23

$$\boxed{\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}} \qquad (1.11)$$

1.8 APLICACIÓN AL ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS SENCILLAS

Después de revisar los temas anteriores, ahora ya se está en posibilidad de determinar los esfuerzos en los elementos y conexiones de varias estructuras bidimensionales sencillas y, por lo tanto, de diseñar tales estructuras.

Como ejemplo, véase la estructura de la figura 1.1, que ya se ha considerado en la sección 1.2, para especificar los apoyos y conexiones en *A*, *B* y *C*. Como se observa en la figura 1.24, la varilla de 20 mm de diámetro *BC* tiene extremos planos de sección rectangular de 20 × 40 mm, en tanto que el aguilón *AB* tiene una sección transversal de 30 × 50 mm y está provista de una horquilla en el extremo *B*. Ambos elementos se conectan en *B* por un pasador del que cuelga la carga de 30 kN por medio de una ménsula en forma de U. Al aguilón *AB* lo soporta en *A* un pasador introducido en una ménsula doble, mientras que la varilla *BC* se conecta en *C* a una ménsula simple. Todos los pasadores tienen 25 mm de diámetro.

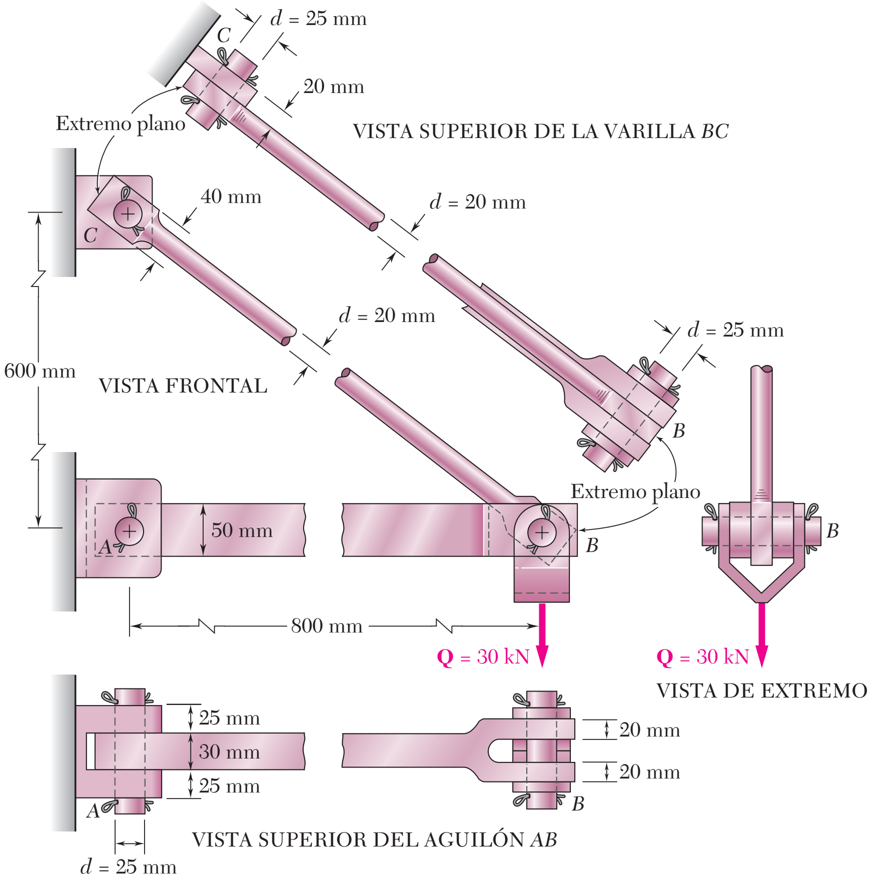

d = 25 mm
C
20 mm
Extremo plano
VISTA SUPERIOR DE LA VARILLA BC
40 mm
C
d = 20 mm
d = 20 mm
d = 25 mm
600 mm
VISTA FRONTAL
B
Extremo plano
A
50 mm
B
B
800 mm
Q = 30 kN
Q = 30 kN
VISTA DE EXTREMO
25 mm
30 mm
25 mm
20 mm
20 mm
A
B
VISTA SUPERIOR DEL AGUILÓN AB
d = 25 mm

Figura 1.24

a. Determinación del esfuerzo normal en el aguilón *AB* y en la varilla *BC*. Como se ha visto en las secciones 1.2 y 1.4, la fuerza en la varilla *BC* es $F_{BC} = 50$ kN (a tensión) y el área de su sección transversal circular es $A = 314 \times 10^{-6}$ m^2; el esfuerzo normal promedio correspondiente es $\sigma_{BC} = +159$ MPa. Sin embargo, las partes planas de la varilla también se encuentran bajo tensión y en la sección más angosta, donde se encuentra el agujero, se tiene

$$A = (20\text{ mm})(40\text{ mm} - 25\text{ mm}) = 300 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

El valor promedio correspondiente para el esfuerzo, por lo tanto, es

$$(\sigma_{BC})_{\text{extremo}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{300 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 167\text{ MPa}$$

Advierta que éste es sólo un *valor promedio*, ya que cerca del agujero, el esfuerzo alcanzará en realidad un valor mucho mayor, como se verá en la sección 2.18. Está claro que, si la carga aumenta, la varilla fallará cerca de uno de los agujeros, más que en su porción cilíndrica; su diseño, por lo tanto, podrá mejorarse aumentando el ancho o el espesor de los extremos planos de la varilla.

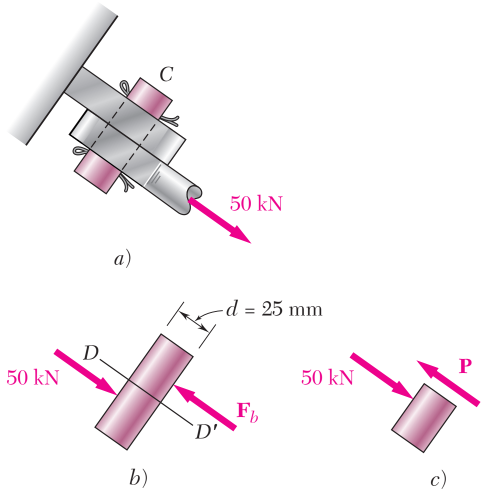


Figura 1.25

Ahora, tome en consideración al aguilón AB, recordando que en la sección 1.2 se vio que la fuerza en él es $F_{AB} = 40$ kN (a compresión). Puesto que el área de la sección transversal rectangular del aguilón es $A = 30\text{ mm} \times 50\text{ mm} = 1.5 \times 10^{-3}\text{ m}^2$, el valor promedio del esfuerzo normal en la parte principal del aguilón, entre los pasadores A y B, es

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3\text{ N}}{1.5 \times 10^{-3}\text{ m}^2} = -26.7 \times 10^6\text{ Pa} = -26.7\text{ MPa}$$

Advierta que las secciones de área mínima en A y B no se encuentran bajo esfuerzo, ya que el aguilón está en compresión y, por lo tanto, *empuja* sobre los pasadores (en lugar de *jalarlos* como lo hace la varilla BC).

b. Determinación del esfuerzo cortante en las distintas conexiones. Para determinar el esfuerzo cortante en una conexión como un perno, pasador o remache, primero deben mostrarse con claridad las fuerzas ejercidas por los distintos elementos que conecta. Así, en el caso del pasador C del ejemplo (figura 1.25*a*), se dibuja la figura 1.25*b*, que muestra la fuerza de 50 kN ejercida por el elemento BC sobre el pasador, y la fuerza igual y opuesta ejercida por la ménsula. Al dibujar ahora el diagrama de la porción del pasador localizada bajo el plano DD' donde ocurren los esfuerzos cortantes (figura 1.25*c*), se concluye que la fuerza cortante en ese plano es $P = 50$ kN. Como el área transversal del pasador es

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25\text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12.5 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

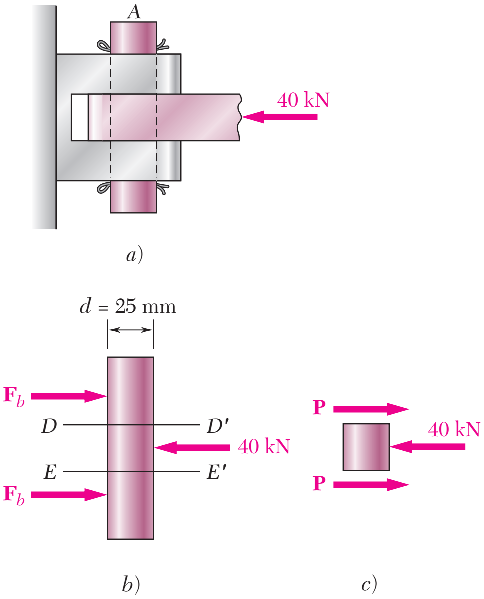


Figura 1.26

resulta que el valor promedio del esfuerzo cortante en el pasador en C es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 102\text{ MPa}$$

Considerando ahora el pasador en A (figura 1.26) se observa que se encuentra bajo corte doble. Al dibujar los diagramas de cuerpo libre del pasador y de la porción del pasador colocada entre los planos DD' y EE' donde ocurren los esfuerzos cortantes, se llega a la conclusión de que $P = 20$ kN y que

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{20\text{ kN}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 40.7\text{ MPa}$$

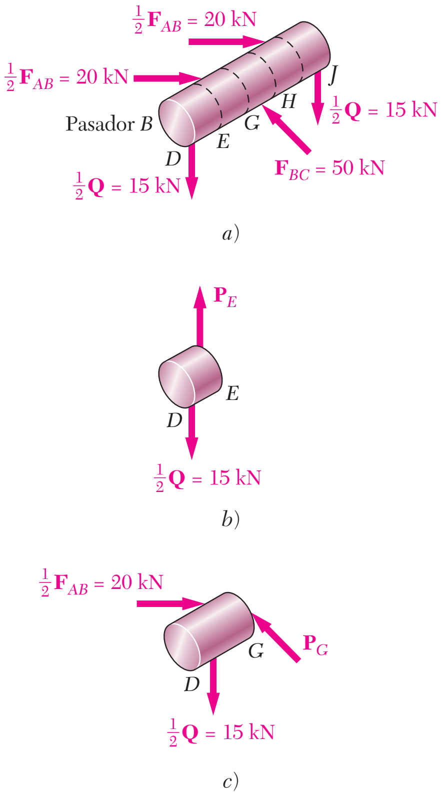

$\frac{1}{2}\mathbf{F}_{AB}$ = 20 kN
$\frac{1}{2}\mathbf{F}_{AB}$ = 20 kN
J
Pasador B
H
G
$\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ = 15 kN
E
D
$\mathbf{F}_{BC}$ = 50 kN
$\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ = 15 kN
a)
$\mathbf{P}_E$
E
D
$\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ = 15 kN
b)
$\frac{1}{2}\mathbf{F}_{AB}$ = 20 kN
$\mathbf{P}_G$
G
D
$\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ = 15 kN
c)

Figura 1.27

Al considerar el pasador en B (figura 1.27*a*), se advierte que el pasador puede dividirse en cinco porciones sobre las que actúan fuerzas ejercidas por el aguilón, la varilla y la ménsula. Tomando en cuenta, en forma sucesiva, las porciones DE (figura 1.27*b*) y DG (figura 1.27*c*), se llega a la conclusión de que la fuerza de corte en la sección E es $P_E = 15$ kN, mientras que la fuerza de corte en la sección G es $P_G = 25$ kN. Como la carga del pasador es simétrica, se concluye que el valor máximo de la fuerza de corte en el pasador B es $P_G = 25$ kN, y que los mayores esfuerzos cortantes ocurren en las secciones G y H, donde

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50.9 \text{ MPa}$$

c. Determinación de los esfuerzos de apoyo. Para obtener los esfuerzos nominales de apoyo en A en el elemento AB, se utiliza la fórmula (1.11) de la sección 1.7. De la figura 1.24, se tiene que $t = 30$ mm y $d = 25$ mm. Recuerde que $P = F_{AB} = 40$ kN, se tiene que

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53.3 \text{ MPa}$$

Para obtener el esfuerzo de apoyo sobre la ménsula en A, se emplea $t = 2(25 \text{ mm}) = 50$ mm y $d = 25$ mm:

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32.0 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos de apoyo en B en el elemento AB, en B y en C en el elemento BC y en la ménsula en C se calculan de manera similar.

1.9 MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Quienes estudian este texto deben aproximarse a un problema de mecánica de materiales como lo harían con una situación ingenieril real. Su propia experiencia e intuición les ayudarán a comprender y formular mejor el problema. Sin embargo, una vez que el problema ha sido planteado con claridad, no es posible solucionarlo utilizando el gusto personal. La solución de ese tipo de problemas debe basarse en los principios fundamentales de la estática y en los principios que se analizan en este curso. Cada paso que se tome debe justificarse sobre esa base, sin dejar espacio para la "intuición". Después de que se ha obtenido una respuesta, ésta deberá verificarse. Nuevamente, puede utilizarse sentido común y su experiencia personal. Si no se está satisfecho por completo con el resultado obtenido, deberá revisarse con cuidado la formulación del problema, la validez de los métodos empleados en su solución y la exactitud de los cálculos.

El *planteamiento* del problema deberá ser claro y preciso. Necesitará incluir los datos dados e indicar el tipo de información que se requiere. Deberá incluir un dibujo simplificado que muestre todas las cantidades esenciales involucradas. La solución para la mayoría de los problemas que encontrará hará necesario que primero se determinen las *reacciones* en los *apoyos* y las *fuerzas* y los *pares internos*. Esto requerirá dibujar uno o más *diagramas de* *cuerpo libre*, como ya se hizo en la sección 1.2, de los que podrán escribirse las *ecuaciones de equilibrio*. Estas ecuaciones deben resolverse para conocer las fuerzas desconocidas, a partir de las que pueden calcularse los *esfuerzos* y *deformaciones* requeridas.

Después de haber obtenido la respuesta, deberá *verificarse cuidadosamente*. Los errores en el *razonamiento* pueden encontrarse con frecuencia analizando las unidades a través de los cálculos y verificando las unidades obtenidas para la respuesta. Por ejemplo, en el diseño de la varilla que se estudió en la sección 1.4, se encontró, después de utilizar las unidades a través de nuestros cálculos, que el diámetro requerido por la varilla se expresó en milímetros, que es la unidad correcta para una dimensión; si se hubiera encontrado otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo*, por lo general, serán evidentes cuando se sustituyan los valores numéricos obtenidos en una ecuación que aún no ha sido utilizada y verificando que la ecuación se satisface. Hay que resaltar que en la ingeniería es muy importante que los cálculos sean correctos.

1.10 EXACTITUD NUMÉRICA

La exactitud de la solución de un problema depende de dos aspectos: 1) la exactitud de los datos recibidos y 2) la exactitud de los cálculos desarrollados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores. Por ejemplo, si se sabe que la carga de una viga es de 75 000 lb con un error posible de 100 lb en cualquier sentido, el error relativo que mide el grado de exactitud de los datos es

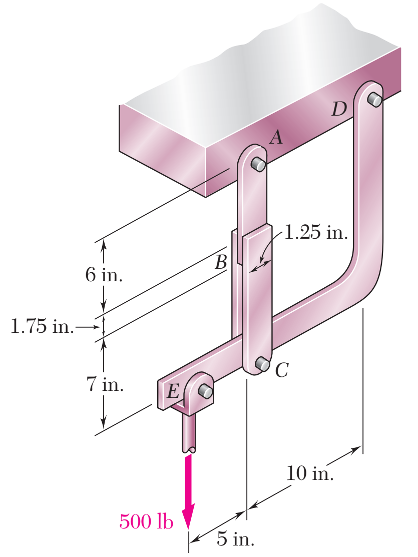
$$\frac{100 \text{ lb}}{75\,000 \text{ lb}} = 0.0013 = 0.13\%$$

Al calcular la reacción en uno de los apoyos de la viga, sería entonces irrelevante registrarlo como de 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor que el 13%, sin importar cuán exactos sean los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como (0.13/100)(14 322 lb) ≈ 20 lb. El registro apropiado de la respuesta sería de 14320 ± 20 lb.

En los problemas de ingeniería, los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor del 0.2%. Por lo tanto, rara vez se justifica escribir la respuesta a dichos problemas con una precisión mayor del 0.2%. Una regla práctica es utilizar 4 cifras para registrar los números que comienzan con "1" y 3 cifras para todos los otros casos. A menos que se indique lo contrario, los datos ofrecidos en un problema deben suponerse conocidos con un grado comparable de exactitud. Una fuerza de 40 lb, por ejemplo, debería leerse 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb debería leerse 15.00 lb.

Los ingenieros practicantes y los estudiantes de ingeniería emplean con gran frecuencia calculadoras de bolsillo y computadoras. La rapidez y exactitud de estos aparatos facilitan los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deberán registrar más cifras significativas que las que puedan justificarse sólo porque pueden obtenerse con facilidad. Como se señaló anteriormente, una exactitud mayor que 0.2% es rara vez necesaria o significativa en la solución de los problemas prácticos de ingeniería.

PROBLEMA MODELO 1.1

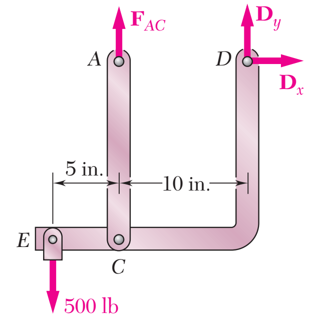


D
A
1.25 in.
B
6 in.
1.75 in.
7 in.
C
E
10 in.
500 lb
5 in.

En el soporte mostrado la porción superior del eslabón ABC es de $\frac{3}{8}$ in. de grueso y las porciones inferiores son cada uno de $\frac{1}{4}$ in. de grueso. Se utiliza resina epóxica para unir la porción superior con la inferior en B. El pasador en A tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ in. mientras que en C se emplea un pasador de $\frac{1}{4}$ in. Determine *a*) el esfuerzo cortante en el pasador A, *b*) el esfuerzo cortante en el pasador C, *c*) el máximo esfuerzo normal en el eslabón ABC, *d*) el esfuerzo cortante promedio en las superficies pegadas en B y *e*) el esfuerzo de apoyo en el eslabón en C.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: soporte entero. Como el eslabón ABC es un elemento con dos fuerzas, la reacción en A es vertical; la reacción en D está representada por sus componentes $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$. Se escribe:



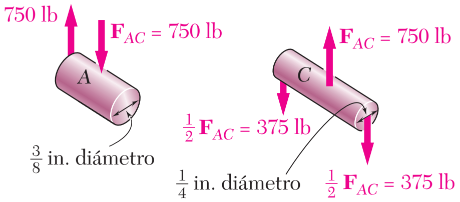
F_AC
D_y
A
D
D_x
5 in.
10 in.
E
C
500 lb

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad (500 \text{ lb})(15 \text{ in.}) - F_{AC}(10 \text{ in.}) = 0$$

$$F_{AC} = +750 \text{ lb} \qquad F_{AC} = 750 \text{ lb} \qquad \textit{tensión}$$

***a*) Esfuerzo cortante en el pasador *A*.** Ya que este pasador de $\frac{3}{8}$ in. de diámetro está en cortante único, se escribe

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{750 \text{ lb}}{\frac{1}{4}\pi(0.375 \text{ in.})^2} \qquad \tau_A = 6\,790 \text{ psi} \blacktriangleleft$$



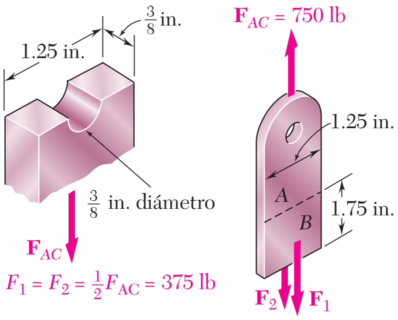
750 lb
F_AC = 750 lb
A
3/8 in. diámetro
F_AC = 750 lb
C
1/2 F_AC = 375 lb
1/4 in. diámetro
1/2 F_AC = 375 lb

***b*) Esfuerzo cortante en el pasador *C*.** Como este pasador de $\frac{1}{4}$ in. de diámetro está en cortante doble, se anota

$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{\frac{1}{4}\pi(0.25 \text{ in.})^2} \qquad \tau_C = 7\,640 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

***c*) Máximo esfuerzo normal en el eslabón *ABC*.** El máximo esfuerzo se encuentra donde el área es más pequeña; esto ocurre en la sección transversal en A donde se localiza el agujero de $\frac{3}{8}$ in. Así, se tiene que

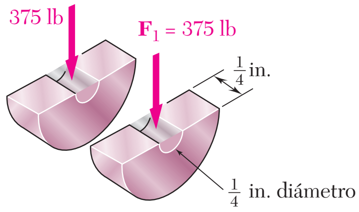
$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{neto}}} = \frac{750 \text{ lb}}{(\frac{3}{8} \text{ in.})(1.25 \text{ in.} - 0.375 \text{ in.})} = \frac{750 \text{ lb}}{0.328 \text{ in.}^2} \qquad \sigma_A = 2\,290 \text{ psi} \blacktriangleleft$$



1.25 in.
3/8 in.
F_AC = 750 lb
3/8 in. diámetro
F_AC
F_1 = F_2 = 1/2 F_AC = 375 lb
1.25 in.
A
1.75 in.
B
F_2
F_1

***d*) Esfuerzo cortante promedio en *B*.** Se advierte que existe adhesión en ambos lados de la porción superior del eslabón y que la fuerza cortante en cada lado es $F_1 = (750 \text{ lb})/2 = 375$ lb. Por lo tanto, el esfuerzo cortante promedio en cada superficie es

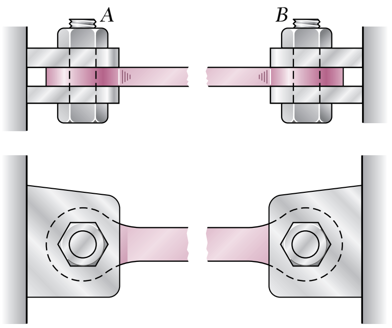
$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{(1.25 \text{ in.})(1.75 \text{ in.})} \qquad \tau_B = 171.4 \text{ psi} \blacktriangleleft$$



375 lb
F_1 = 375 lb
1/4 in.
1/4 in. diámetro

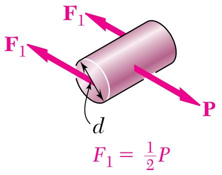
***e*) Esfuerzo de apoyo en el eslabón en *C*.** Para cada porción del eslabón, $F_1 = 375$ lb y el área nominal de apoyo es de (0.25 in.)(0.25 in.) = 0.0625 in.^{2}.

$$\sigma_b = \frac{F_1}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{0.0625 \text{ in.}^2} \qquad \sigma_b = 6\,000 \text{ psi} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 1.2

La barra de sujeción de acero que se muestra ha de diseñarse para soportar una fuerza de tensión de magnitud $P = 120$ kN cuando se asegure con pasadores entre ménsulas dobles en A y B. La barra se fabricará de placa de 20 mm de espesor. Para el grado de acero que se usa, los esfuerzos máximos permisibles son: $\sigma = 175$ MPa, $\tau = 100$ MPa, $\sigma_b = 350$ MPa. Diseñe la barra de sujeción determinando los valores requeridos para *a*) el diámetro d del pasador, *b*) la dimensión b en cada extremo de la barra, *c*) la dimensión h de la barra.

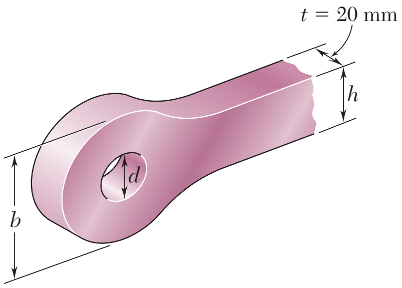


SOLUCIÓN

***a*) Diámetro del pasador.** Debido a que el pasador se encuentra en cortante doble, $F_1 = \frac{1}{2}P = 60$ kN.

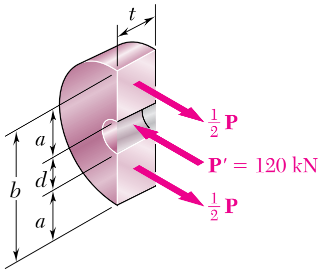
$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad 100 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad d = 27.6 \text{ mm}$$

Se usará $d = 28$ mm ◀



En este punto se verifica el esfuerzo de apoyo entre la placa de 20 mm de espesor y el pasador de 28 mm de diámetro.

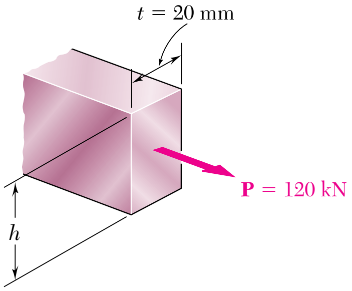
$$\tau_b = \frac{P}{td} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.020 \text{ m})(0.028 \text{ m})} = 214 \text{ MPa} < 350 \text{ MPa} \qquad \text{OK}$$



***b*) Dimensión *b* en cada extremo de la barra.** Se considera una de las porciones de extremo de la barra. Como el espesor de la placa de acero es de $t = 20$ mm y el esfuerzo promedio de tensión promedio no debe exceder los 175 MPa, se escribe

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}P}{ta} \qquad 175 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{(0.02 \text{ m})a} \qquad a = 17.14 \text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28 \text{ mm} + 2(17.14 \text{ mm}) \qquad b = 62.3 \text{ mm} ◀$$



***c*) Dimensión *h* de la barra.** Recordando que el espesor de la placa de acero es $t = 20$ mm, se tiene que

$$\sigma = \frac{P}{th} \qquad 175 \text{ MPa} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.020 \text{ m})h} \qquad h = 34.3 \text{ mm}$$

Se utilizará $h = 35$ mm ◀

PROBLEMAS

1.1 Dos varillas cilíndricas sólidas *AB* y *BC* están soldadas en *B* y cargadas como se muestra. Determine la magnitud de la fuerza **P** para la cual el esfuerzo de tensión en la varilla *AB* tiene el doble de magnitud del esfuerzo de compresión en la varilla *BC*.

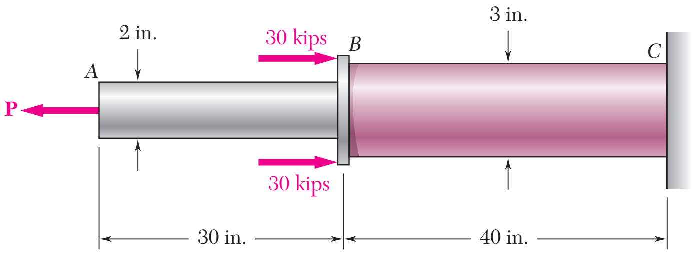


Figura P1.1

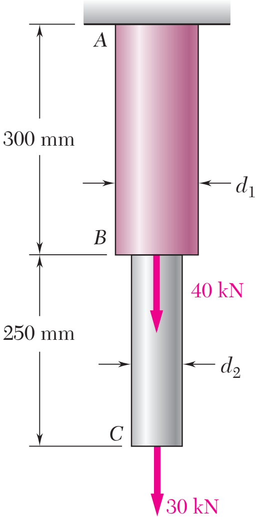


Figura P1.3 y P1.4

1.2 En el problema 1.1, si se sabe que $P = 40$ kips, determine el esfuerzo normal promedio en la sección media de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

1.3 Dos varillas cilíndricas sólidas, *AB* y *BC*, están soldadas en *B* y cargadas como se muestra. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio no debe ser mayor que 175 MPa en la varilla *AB* y 150 MPa en la varilla *BC*, determine los valores mínimos permisibles de d_1 y d_2.

1.4 Las varillas cilíndricas sólidas *AB* y *BC* están soldadas en *B* y cargadas como se muestra en la figura. Si se sabe que $d_1 = 50$ mm y $d_2 = 30$ mm, encuentre el esfuerzo normal promedio en la sección media de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

1.5 Una galga extensométrica, localizada en *C* en la superficie del hueso *AB*, indica que el esfuerzo normal promedio en el hueso es de 3.80 MPa cuando el hueso se somete a dos fuerzas de 1 200 N como se muestra en la figura. Si se supone que la sección transversal del hueso en *C* es anular y se sabe que su diámetro exterior es de 25 mm, determine el diámetro interior de la sección transversal del hueso en *C*.

1.6 Dos placas de acero deben sujetarse por medio de pasadores de acero de alta resistencia de 16 mm de diámetro que embonan con suavidad dentro de espaciadores cilíndricos de latón. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio no debe exceder 200 MPa en los pasadores y 130 MPa en los espaciadores, determine el diámetro exterior de los espaciadores que ofrece el diseño más económico y seguro.

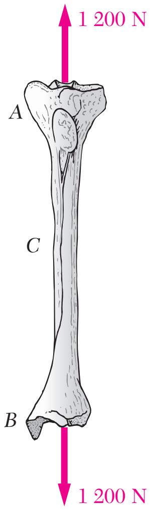


Figura *P1.5*

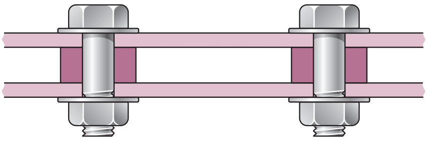


Figura *P1.6*

1.7 Cada uno de los cuatro eslabones verticales tiene una sección transversal rectangular uniforme de 8 × 36 mm y cada uno de los cuatro pasadores tiene un diámetro de 16 mm. Determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan *a*) los puntos *B* y *D*, *b*) los puntos *C* y *E*.

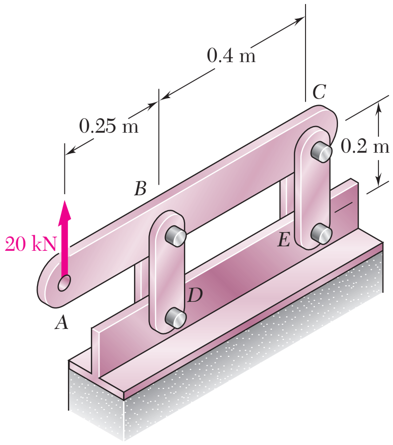


Figura P1.7

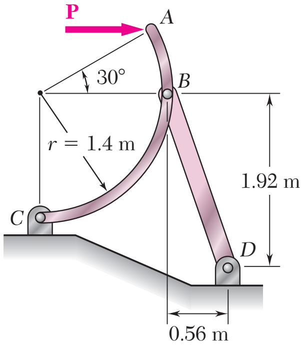


Figura P1.8

1.8 Si se sabe que la sección transversal de la porción central del eslabón *BD* tiene un área de 800 mm^2, determine la magnitud de la carga **P** para la cual el esfuerzo normal en esa porción de *BD* es de 50 MPa.

1.9 Si se sabe que el eslabón *DE* tiene $\frac{1}{8}$ in. de grosor y 1 in. de ancho, determine el esfuerzo normal en la porción central de dicho eslabón cuando *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$.

1.10 El eslabón *AC* tiene una sección transversal rectangular uniforme de $\frac{1}{16}$ in. de espesor y $\frac{1}{4}$ in. de ancho. Determine el esfuerzo normal en la porción central de dicho eslabón.

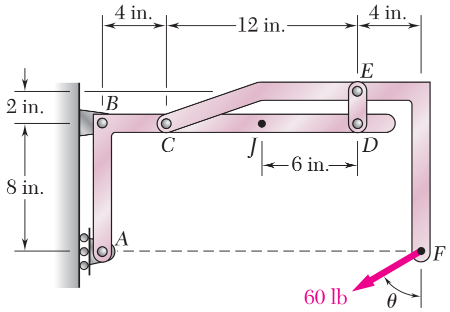


Figura *P1.9*

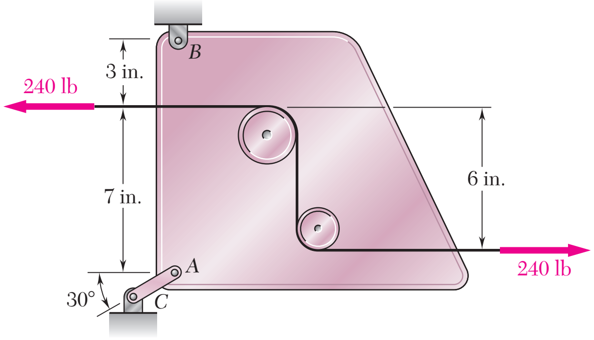


Figura *P1.10*

1.11 La barra rígida *EFG* está sostenida por el sistema de armaduras que se muestra en la figura. Si se sabe que el elemento *CG* es una varilla circular sólida de 0.75 in. de diámetro, determine el esfuerzo normal en *CG*.

1.12 La barra rígida *EFG* está sostenida por el sistema de armaduras que se muestra en la figura. Determine el área de la sección transversal del elemento *AE* para la cual el esfuerzo normal en él es de 15 ksi.

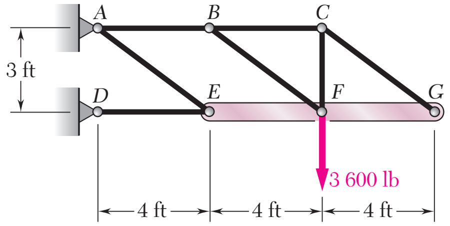


Figura P1.11 y P1.12

1.13 Un par **M** con magnitud de 1 500 N · m se aplica a la manivela de un motor. Para la posición mostrada, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mantener en equilibrio al sistema de la máquina, *b*) el esfuerzo normal promedio en la biela *BC*, la cual tiene una sección transversal uniforme de 450 mm^2.

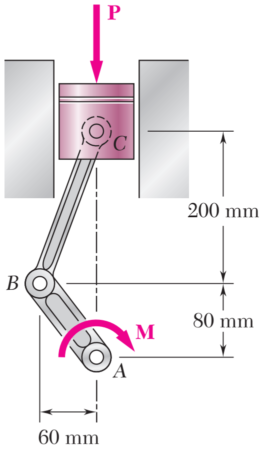


Figura P1.13

1.14 La barra de un remolque para aviones se posiciona mediante un cilindro hidráulico sencillo, conectado mediante una varilla de acero de 25 mm de diámetro a las dos unidades idénticas de brazo *DEF* y a la rueda. La masa de toda la barra del remolque es de 200 kg y su centro de gravedad se localiza en *G*. Para la posición mostrada, determine el esfuerzo normal en la varilla.

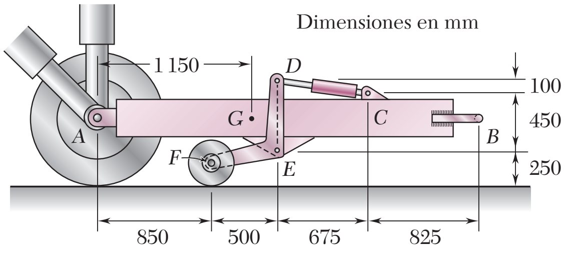


Figura P1.14

1.15 Los elementos de madera *A* y *B* deben unirse mediante láminas de madera contrachapada que se pegarán por completo sobre las superficies en contacto. Como parte del diseño de la junta y puesto que el claro entre los extremos de los elementos será de 6 mm, determine la longitud mínima permisible *L*, si el esfuerzo cortante promedio en el pegamento no debe exceder 700 kPa.

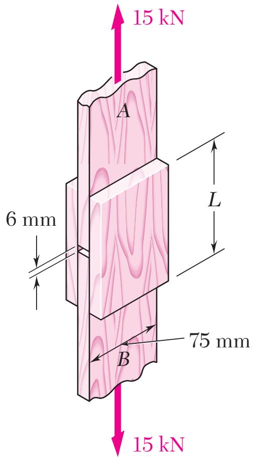


Figura P1.15

1.16 Cuando la fuerza **P** alcanzó 1 600 lb, el elemento de madera mostrado falló a cortante a lo largo de la superficie indicada por la línea punteada. Determine el esfuerzo cortante promedio a lo largo de esa superficie en el momento de la falla.

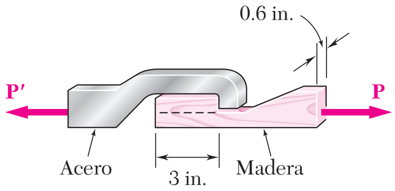


Figura P1.16

1.17 Dos planchas de madera, cada una de $\frac{1}{2}$ in. de espesor y 9 in. de ancho, están unidas por el ensamble pegado de mortaja que se muestra en la figura. Si se sabe que la junta fallará a lo largo de su grano cuando el esfuerzo cortante promedio en el pegamento alcance 1.20 ksi, determine la magnitud P de la carga axial que causará una falla en la junta.

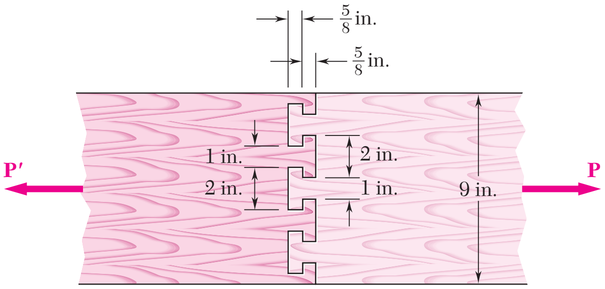


Figura *P1.17*

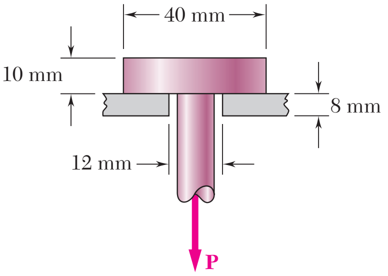


Figura P1.18

1.18 Una carga **P** se aplica a una varilla de acero soportada, como se muestra en la figura, por una placa de aluminio en la que se ha perforado un barreno de 12 mm de diámetro. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 180 MPa en la varilla de acero y 70 MPa en la placa de aluminio, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse a la varilla.

1.19 La fuerza axial en la columna que soporta la viga de madera que se muestra en la figura es $P = 20$ kips. Determine la longitud mínima permisible L de la zapata de carga si el esfuerzo de apoyo en la madera no debe ser mayor que 400 psi.

1.20 La carga **P** aplicada sobre una varilla de acero se distribuye hacia una viga de soporte mediante una arandela anular. El diámetro de la varilla es de 22 mm y el diámetro interior de la arandela es de 25 mm, un poco mayor que el diámetro del orificio. Determine el máximo diámetro exterior d permisible para la arandela, si se sabe que el esfuerzo normal axial en la varilla de acero es de 35 MPa y que el esfuerzo de apoyo promedio entre la arandela y la viga no debe exceder 5 MPa.

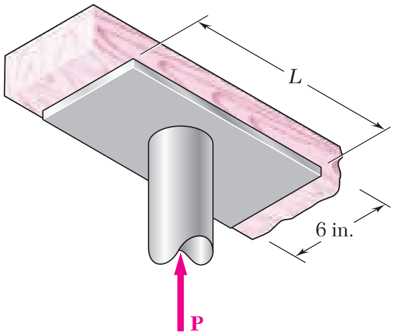


Figura P1.19

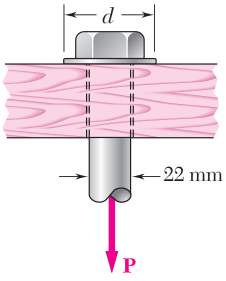


Figura P1.20

1.21 Una carga axial de 40 kN se aplica sobre un poste corto de madera, sostenido por un basamento de concreto que descansa sobre suelo regular. Determine *a*) el esfuerzo de apoyo máximo sobre el basamento de concreto, *b*) el tamaño del basamento para el cual el esfuerzo de apoyo promedio en el suelo es de 145 kPa.

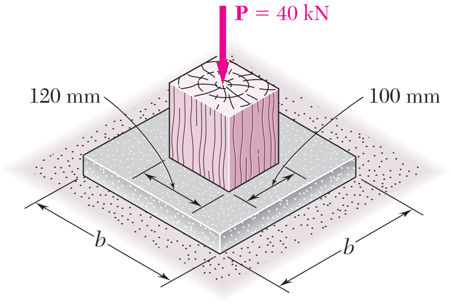


Figura P1.21

1.22 Una carga axial **P** es soportada por una columna corta W8 × 40 con un área de sección transversal $A = 11.7 \text{ in.}^2$ y se distribuye hacia un cimiento de concreto mediante una placa cuadrada como se observa en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio en la columna no debe exceder 30 ksi y que el esfuerzo de apoyo sobre el cimiento de concreto no debe exceder 3.0 ksi, determine el lado *a* de la placa que proporcionará el diseño más económico y seguro.

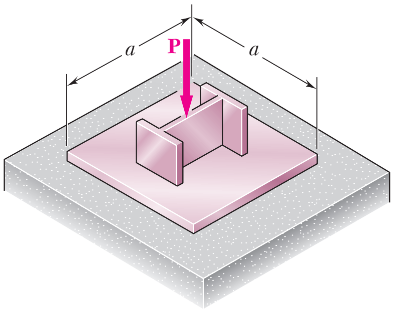


Figura *P1.22*

1.23 Un pasador de 6 mm de diámetro se utiliza en la conexión *C* del pedal que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ N, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador, *b*) el esfuerzo de apoyo nominal en el pedal en *C*, *c*) el esfuerzo de apoyo nominal en cada ménsula de apoyo en *C*.

1.24 Si se sabe que una fuerza **P** con una magnitud de 750 N se aplica al pedal que se muestra en la figura, determine *a*) el diámetro del pasador en *C* para el cual el esfuerzo cortante promedio en el pasador es de 40 MPa, *b*) el esfuerzo de apoyo correspondiente en el pedal en *C*, *c*) el esfuerzo de apoyo correspondiente en cada ménsula de apoyo en *C*.

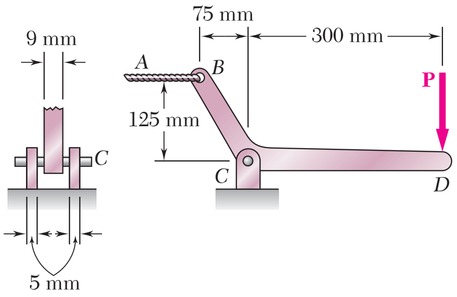


Figura P1.23 y *P1.24*

1.25 Una varilla de acero *AB* con $\frac{5}{8}$ in. de diámetro se ajusta a un orificio redondo cerca del extremo *C* del elemento de madera *CD*. Para la carga mostrada, determine *a*) el esfuerzo máximo normal promedio en la madera, *b*) la distancia *b* para la cual el esfuerzo cortante promedio es de 100 psi sobre las superficies indicadas por líneas punteadas, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio sobre la madera.

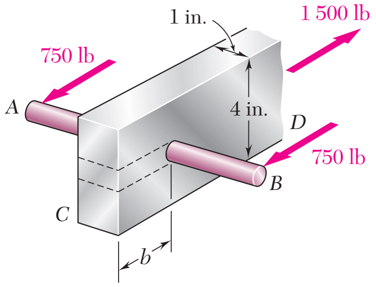


Figura P1.25

1.26 Dos sistemas idénticos de eslabón y cilindro hidráulico controlan la posición de las horquillas de un montacargas. La carga soportada para el sistema que se muestra en la figura es de 1 500 lb. Si se sabe que el grosor del elemento *BD* es $\frac{5}{8}$ in., determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador de $\frac{1}{2}$ in. de diámetro en *B*, *b*) el esfuerzo de apoyo en *B* en el elemento *BD*.

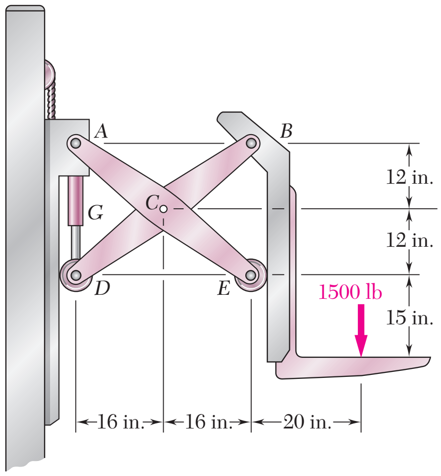


Figura P1.26

1.27 Para el ensamble y la carga del problema 1.7, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador en *B*, *b*) el esfuerzo de apoyo promedio en *B* en el elemento *BD*, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio en *B* en el elemento *ABC*, si se sabe que este elemento tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10 × 50 mm.

1.28 El eslabón *AB*, cuyo ancho es $b = 50$ mm y su grosor $t = 6$ mm, se emplea para soportar el extremo de una viga horizontal. Si se sabe que el esfuerzo normal promedio en el eslabón es de –140 MPa y que el esfuerzo cortante promedio en cada uno de los pasadores es de 80 MPa, determine *a*) el diámetro *d* de los pasadores, *b*) el esfuerzo promedio de apoyo en el eslabón.

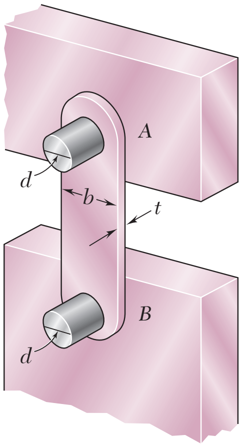


Figura P1.28

1.11 ESFUERZOS EN UN PLANO OBLICUO BAJO CARGA AXIAL

En las secciones precedentes, se encontró que las fuerzas axiales ejercidas en un elemento sometido a dos fuerzas (figura 1.28*a*) causan esfuerzos normales en ese elemento (figura 1.28*b*), mientras que también se encontró que las fuerzas transversales ejercidas sobre pernos y pasadores (figura 1.29*a*) causan esfuerzos cortantes en esas conexiones (figura 1.29*b*). La razón de que tal relación observada entre las fuerzas axiales y los esfuerzos normales, por una parte, y las fuerzas transversales y los esfuerzos cortantes, por la otra, fue que los esfuerzos se determinaron únicamente en los planos perpendiculares al eje del elemento o conexión. Como se verá en esta sección, las fuerzas axiales causan esfuerzos tanto normales como cortantes en planos que no son perpendiculares al eje del elemento. De manera similar, las fuerzas transversales ejercidas sobre un perno o pasador producen esfuerzos tanto normales como cortantes en planos que no son perpendiculares al eje del perno o pasador.

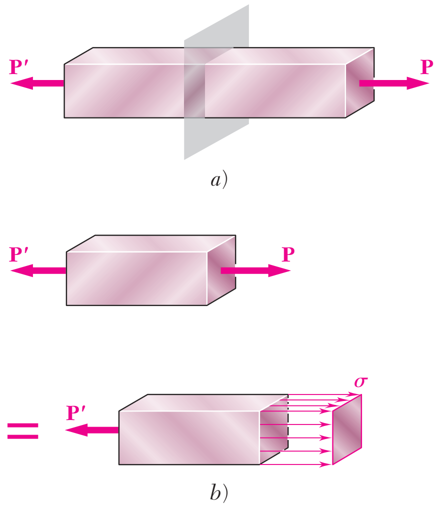


Figura 1.28

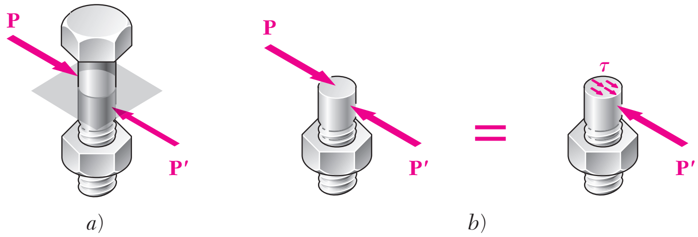


Figura 1.29

Considere el elemento de dos fuerzas de la figura 1.28, que se encuentra sometido a fuerzas axiales **P** y **P**′. Si se realiza un corte en dicho elemento, que forme un ángulo θ con un plano normal (figura 1.30*a*) y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción del elemento localizada a la izquierda de ese corte (figura 1.30*b*), se encuentra a partir de las condiciones de equilibrio del cuerpo libre que las fuerzas distribuidas que actúan en la sección deben ser equivalentes a la fuerza **P**.

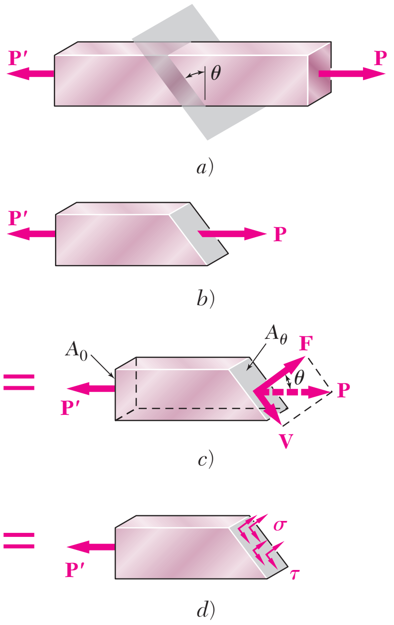


Figura 1.30

Separando **P** en sus componentes **F** y **V**, que son, respectivamente normal y tangencial al corte (figura 1.30*c*), se tiene que

$$F = P \cos \theta \qquad V = P \operatorname{sen} \theta \tag{1.12}$$

La fuerza **F** representa la resultante de las fuerzas normales distribuidas a través de la sección, y la fuerza **V** la resultante de las fuerzas cortantes (figura 1.30*d*). Los valores promedio de los esfuerzos normales y cortantes correspondientes se obtienen dividiendo, respectivamente, F y V entre el área A_θ de la sección:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \qquad \tau = \frac{V}{A_\theta} \tag{1.13}$$

Al sustituir los valores de F y V de la ecuación (1.12) en la ecuación (1.13), y observando de la figura 1.30*c* que $A_0 = A_\theta \cos \theta$, o que $A_\theta = A_0/\cos \theta$, donde A_0 denota el área de una sección perpendicular al eje del elemento, de lo que se obtiene

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0/\cos \theta} \qquad \tau = \frac{P \operatorname{sen} \theta}{A_0/\cos \theta}$$

o

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2 \theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tag{1.14}$$

De la primera de las ecuaciones (1.14) se observa que el valor del esfuerzo normal σ es el máximo cuando $\theta = 0$, es decir, cuando el plano de la sección es perpendicular al eje del elemento, y que se aproxima a cero al aproximarse θ a 90°. Se verifica que el valor de σ cuando $\theta = 0$ es

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \tag{1.15}$$

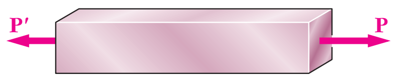
como se encontró en la sección 1.3. La segunda de las ecuaciones (1.14) muestra que el esfuerzo cortante τ es cero para $\theta = 0$ y para $\theta = 90°$, y que para $\theta = 45°$ alcanza su valor máximo

$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \operatorname{sen} 45° \cos 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.16}$$

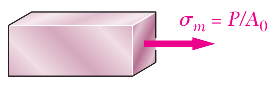
La primera de las ecuaciones (1.14) indica que, cuando $\theta = 45°$, el esfuerzo normal σ' también es igual a $P/2A_0$:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0}\cos^2 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.17}$$

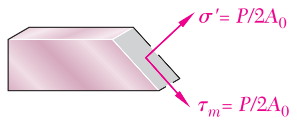
Los resultados obtenidos en las ecuaciones (1.15), (1.16) y (1.17) se muestran gráficamente en la figura 1.31. Se observa que la misma carga produce un esfuerzo normal $\sigma_m = P/A_0$ y ningún esfuerzo cortante (figura 1.31*b*), o un esfuerzo normal y un esfuerzo cortante de la misma magnitud $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$ (figura 1.31*c* y *d*), dependiendo de la orientación del corte.



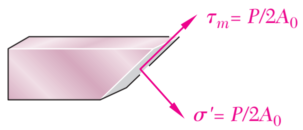
a) Carga axial



b) Esfuerzos para $\theta = 0$



c) Esfuerzos para $\theta = 45°$



d) Esfuerzos para $\theta = -45°$

Figura 1.31

1.12 ESFUERZOS BAJO CONDICIONES GENERALES DE CARGA. COMPONENTES DEL ESFUERZO

Los ejemplos de las secciones previas estuvieron restringidos a elementos bajo carga axial y a conexiones bajo carga transversal. La mayoría de los elementos estructurales y de los componentes de maquinaria se encuentran bajo condiciones de carga más complicadas.

Sea un cuerpo sujeto a varias cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, etc., (figura 1.32). Para comprender la condición de esfuerzos creada por estas cargas en algún punto Q dentro del cuerpo, primero se efectuará un corte a través de Q, utilizando un plano paralelo al plano yz. La porción del cuerpo a la izquierda de la sección está sujeta a algunas de las cargas originales, y a las fuerzas normales y de corte distribuidas a través de la sección. Denotaremos con $\Delta\mathbf{F}^x$ y $\Delta\mathbf{V}^x$, respectivamente, las fuerzas normales y de corte que actúan sobre una pequeña

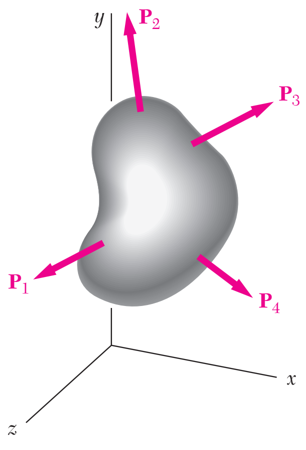
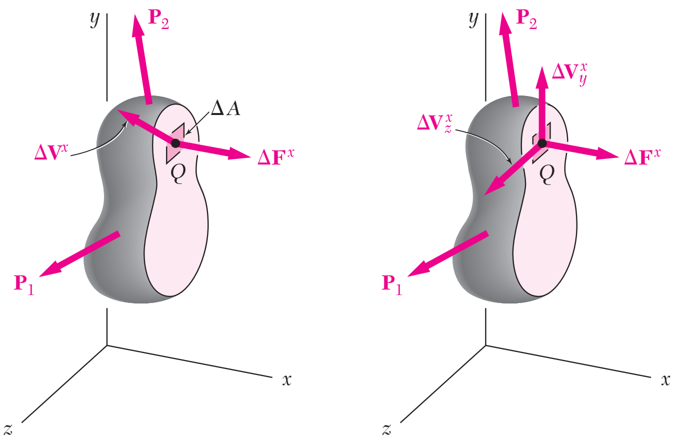


Figura 1.32



a) *b*)

Figura 1.33

área ΔA que rodea al punto Q (figura 1.33*a*). Note que el superíndice x se emplea para indicar que las fuerzas $\Delta\mathbf{F}^x$ y $\Delta\mathbf{V}^x$ actúan sobre una superficie perpendicular al eje x. En tanto que la fuerza normal $\Delta\mathbf{F}^x$ tiene una dirección bien definida, la fuerza cortante $\Delta\mathbf{V}^x$ puede tener cualquier dirección en el plano de la sección. Por lo tanto, descomponemos $\Delta\mathbf{V}^x$ en dos fuerzas componentes, $\Delta\mathbf{V}_y^x$ y $\Delta\mathbf{V}_z^x$, en direcciones paralelas a los ejes y y z, respectivamente (figura 1.33*b*). Dividiendo ahora la magnitud de cada fuerza entre el área ΔA, y haciendo que ΔA se aproxime a cero, se definen las tres componentes del esfuerzo mostradas en la figura 1.34:

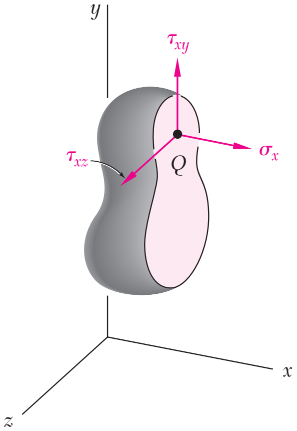


Figura 1.34

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \tag{1.18}$$

Se observa que el primer subíndice en σ_x, τ_{xy} y τ_{xz} se emplea para indicar que los esfuerzos bajo consideración se ejercen *sobre una superficie perpendicular al eje x*. El segundo subíndice en τ_{xy} y en τ_{xz} identifica *la dirección de la componente*. El esfuerzo normal σ_x es positivo si la flecha correspondiente apunta en la dirección x positiva, es decir, si el cuerpo está en tensión, y negativa de otra manera. En forma similar, las componentes del esfuerzo cortante τ_{xy} y τ_{xz} son positivas si las flechas correspondientes apuntan, respectivamente, en las direcciones y y z positivas.

El análisis anterior puede también llevarse a cabo considerando la porción del cuerpo localizada a la derecha del plano vertical que pasa a través de Q (figura 1.35). Las mismas magnitudes, pero con direcciones opuestas, se obtienen para las fuerzas normal y cortante $\Delta\mathbf{F}^x$, $\Delta\mathbf{V}_y^x$ y $\Delta\mathbf{V}_z^x$. Por lo tanto, los mismos valores se obtienen para las componentes correspondientes de los esfuerzos, pero ya que la sección en la figura 1.35 apunta ahora al *eje x negativo*, un signo positivo para σ_x indicará que la flecha correspondiente apunta ahora *en la dirección x negativa*. De manera similar, los signos positivos en τ_{xy} y τ_{xz} indicarán que las flechas correspondientes apuntan, respectivamente, en las direcciones y y z negativas, como indica la figura 1.35.

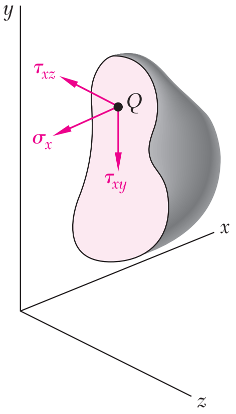


Figura 1.35

Haciendo un corte a través de Q paralelo al plano zx, se definen de la misma manera las componentes de esfuerzo σ_y, τ_{yz} y τ_{yx}. Por último, un corte a través de Q paralelo al plano xy da las componentes σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}.

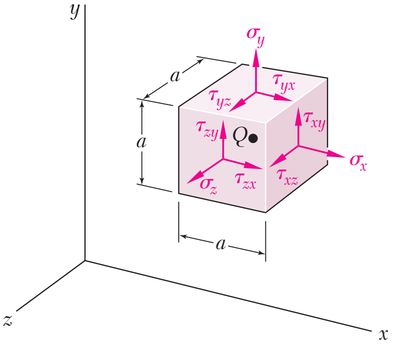


Figura 1.36

Para simplificar la visualización de la condición de esfuerzos en el punto Q, considere un pequeño cubo de lado a centrado en Q y que los esfuerzos se ejercen en cada una de las seis caras del cubo (figura 1.36). Las componentes de los esfuerzos mostradas en la figura son σ_x, σ_y y σ_z, que representan los esfuerzos normales en las caras perpendiculares respectivamente a los ejes x, y y z, y las seis componentes de los esfuerzos cortantes τ_{xy}, τ_{xz}, etc. Es preciso recordar que, de acuerdo con la definición de las componentes del esfuerzo cortante, τ_{xy} representa la componente y del esfuerzo cortante que es ejercida en la cara que es perpendicular al eje x, mientras que τ_{yx} representa la componente x del esfuerzo cortante que se ejerce sobre la cara que es perpendicular al eje y. Advierta que sólo tres caras del cubo son visibles en la figura 1.36, y que en las caras opuestas actúan componentes de esfuerzos iguales y opuestas. En tanto que los esfuerzos que actúan sobre las caras del cubo difieren ligeramente de los esfuerzos en Q, el error involucrado es pequeño y desaparece cuando el lado a del cubo se aproxima a cero.

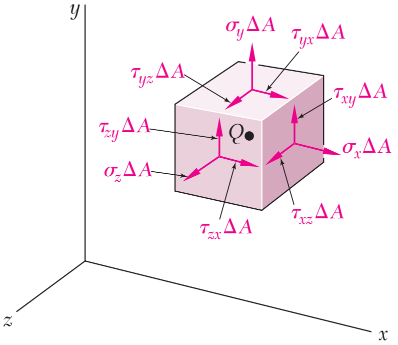


Figura 1.37

Ahora se deducirán algunas relaciones importantes entre las componentes del esfuerzo cortante. Considere el diagrama de cuerpo libre del pequeño cubo centrado en el punto Q (figura 1.37). Las fuerzas normales y cortantes que actúan sobre las diversas caras del cubo se obtienen multiplicando las componentes correspondientes del esfuerzo por el área ΔA de cada cara. Primero se escribirán las tres ecuaciones de equilibrio siguientes:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{1.19}$$

Como hay fuerzas iguales y opuestas a las fuerzas mostradas en la figura 1.37 actuando sobre las caras ocultas del cubo, es claro que las ecuaciones (1.19) se satisfacen. Considerando, ahora, los momentos de las fuerzas alrededor de los ejes Qx', Qy' y Qz' dibujados desde Q en direcciones paralelas respectivamente a los ejes x, y y z, se anotarán tres ecuaciones adicionales

$$\Sigma M_{x'} = 0 \qquad \Sigma M_{y'} = 0 \qquad \Sigma M_{z'} = 0 \tag{1.20}$$

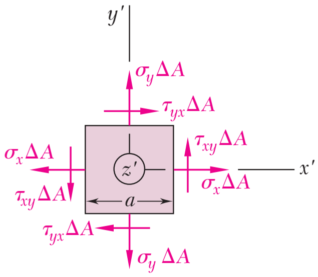


Figura 1.38

Utilizando una proyección sobre el plano $x'y'$ (figura 1.38), se advierte que las únicas fuerzas con momentos alrededor del eje z distintas de cero son las fuerzas cortantes. Estas fuerzas forman dos pares, uno de ellos es un momento $(\tau_{xy}\,\Delta A)a$, en la dirección antihoraria (positiva), y el otro es un momento $-(\tau_{yx}\,\Delta A)a$, en dirección horaria (negativa). La última de las tres ecuaciones (1.20) da, por lo tanto

$$+\circlearrowleft \Sigma M_z = 0: \qquad (\tau_{xy}\,\Delta A)a - (\tau_{yx}\,\Delta A)a = 0$$

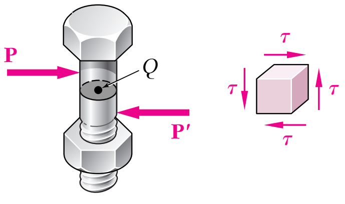
de donde se concluye que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.21}$$

La relación obtenida muestra que la componente y del esfuerzo cortante ejercida sobre una cara perpendicular al eje x es igual a la componente x del momento cortante ejercido sobre una cara perpendicular al eje y. De las dos ecuaciones (1.20) restantes, deducimos de manera similar las relaciones

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.22}$$

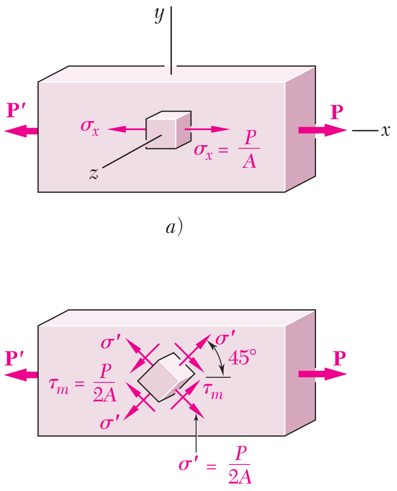
Se concluye, a partir de las ecuaciones (1.21) y (1.22), que sólo se requieren seis componentes de esfuerzo para definir la condición de esfuerzo en un punto dado Q, en lugar de nueve como se supuso al principio. Estas seis componentes son σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}. También se observa que, en un punto dado, *el cortante no puede ocurrir en un plano únicamente*; un esfuerzo cortante igual debe ser ejercido en otro plano perpendicular al primero. Por ejemplo, considerando de nuevo el pasador de la figura 1.29 y un pequeño cubo en el centro Q del pasador (figura 1.39*a*), se encuentra que deben ejercerse esfuerzos cortantes de igual magnitud en las dos caras horizontales del cubo y en las dos caras que son perpendiculares a las fuerzas **P** y **P′** (figura 1.39*b*).



a) *b*)

Figura 1.39

Antes de concluir este análisis sobre las componentes del esfuerzo, considere de nuevo el caso de un elemento bajo carga axial. Si se estudia un pequeño cubo con caras paralelas a las caras del elemento y se recuerdan los resultados de la sección 1.11, se verá que las condiciones de esfuerzo en el elemento pueden describirse como se muestra en la figura 1.40*a*. Los únicos esfuerzos son los esfuerzos normales σ_x ejercidos sobre las caras del cubo que son perpendiculares al eje x. No obstante, si se gira el pequeño cubo 45° alrededor del eje z de tal manera que su nueva orientación sea igual a la orientación de las secciones consideradas en la figura 1.31*c* y *d*, se concluye que se ejercen esfuerzos normales y cortantes de igual magnitud sobre cuatro caras del cubo (figura 1.40*b*). Se observará, de esta manera, que la misma condición de carga puede conducir a distintas interpretaciones de la situación de esfuerzos en un punto dado, dependiendo de la orientación del elemento considerado. En el capítulo 7 se explicará más este aspecto.



a)

b)

Figura 1.40

1.13 CONSIDERACIONES DE DISEÑO

En las secciones previas se aprendió a determinar los esfuerzos en varillas, pernos y pasadores en condiciones sencillas de carga. En capítulos posteriores se aprenderá a determinar esfuerzos en situaciones más complejas. En las aplicaciones de ingeniería, sin embargo, la determinación de esfuerzos rara vez es un fin en sí misma. Al contrario, el conocimiento de los esfuerzos lo emplean los ingenieros como un apoyo a su tarea más importante: el diseño de estructuras y máquinas que puedan desempeñar una tarea específica en forma segura y económica.

a. Determinación de la resistencia última del material. Un elemento importante que debe considerar un diseñador es cómo se comportará el material que ha seleccionado cuando esté sometido a una carga. Para un material dado, esto se determina realizando ensayos específicos sobre muestras preparadas del material. Por ejemplo, una probeta de acero puede prepararse y colocarse en una máquina de ensayo de laboratorio para someterla a una fuerza centrada axial de tensión conocida, como se describe en la sección 2.3. Al aumentar la magnitud de la fuerza, se miden varios cambios en la probeta, por ejemplo, cambios en su longitud y diámetro. Finalmente se alcanzará la máxima fuerza que puede aplicarse a la probeta, la cual se romperá o comenzará a soportar menos carga. Esta máxima fuerza se llama la *carga última* del material y se denota como P_U. Debido a que la carga aplicada es centrada, puede dividirse la carga última por el área transversal original de la varilla para obtener el *esfuerzo último normal* del material usado. Este esfuerzo, también conocido como la *resistencia última a la tensión* del material, es

$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \tag{1.23}$$

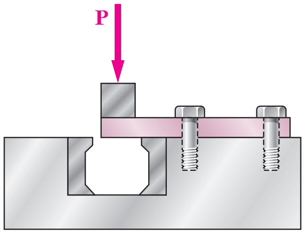


Figura 1.41

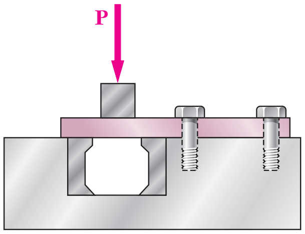


Figura 1.42

Se encuentran disponibles varios procedimientos de ensayo para determinar el *esfuerzo cortante último*, o *resistencia última al corte*, de un material. El más común consiste en el torcimiento de un tubo circular (sección 3.5). Uno más directo, aunque menos exacto, consiste en sujetar una barra rectangular o redonda en una herramienta de corte (figura 1.41) y aplicarle una carga P que va siempre en aumento hasta obtener la carga última P_U para corte único. Si el extremo libre de la probeta descansa sobre ambos dados endurecidos (figura 1.42), se obtiene la carga última para cortante doble. En cualquier caso, el esfuerzo cortante último τ_U se obtiene al dividir la carga última entre el área total sobre la que ha ocurrido el corte. Recuerde que, en el caso del corte puro, esta área es el área de sección transversal A del espécimen, mientras que en corte doble es dos veces el área de sección transversal.

b. Carga permisible y esfuerzo permisible. Factor de seguridad. La máxima carga que puede soportar a un elemento estructural o un componente de maquinaria en condiciones normales de uso es considerablemente más pequeña que la carga última. Esta carga más pequeña se conoce como la *carga permisible* y, en ocasiones, como la *carga de trabajo* o *carga de diseño*. Así, sólo una fracción de la capacidad última de carga del elemento se utiliza cuando se aplica la carga permisible. El remanente de la capacidad portadora de carga del elemento se mantiene en reserva para asegurar su desempeño seguro. La razón de la carga última a la carga permisible se emplea para definir el *factor de seguridad*.† Se tiene que

$$\text{Factor de seguridad} = F.S. = \frac{\text{carga última}}{\text{carga permisible}} \tag{1.24}$$

Una definición alterna del factor de seguridad se basa en el uso de esfuerzos:

$$\text{Factor de seguridad} = F.S. = \frac{\text{esfuerzo último}}{\text{esfuerzo permisible}} \tag{1.25}$$

Las dos expresiones dadas para el factor de seguridad en las ecuaciones (1.24) y (1.25) son idénticas cuando existe una relación lineal entre la carga y el esfuerzo. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería esta relación deja de ser lineal al acercarse la carga a su valor último, y el factor de seguridad obtenido de la ecuación (1.25) no suministra una evaluación válida de la seguridad de un diseño dado. Sin embargo, el *método de diseño por esfuerzo permisible*, basado en el uso de la ecuación (1.25), se utiliza ampliamente.

---

† En algunos campos de la ingeniería, sobre todo en el de la ingeniería aeronáutica, el *margen de seguridad* se emplea en lugar del factor de seguridad. El margen de seguridad se define como el factor de seguridad. El margen de seguridad se define como el factor de seguridad menos uno; esto es, margen de seguridad = $F.S. - 1.00$.

c. Selección de un factor de seguridad adecuado. La selección del factor de seguridad que debe usarse en distintas aplicaciones es una de las tareas más importantes de los ingenieros. Por una parte, si el factor de seguridad se elige demasiado pequeño, la posibilidad de falla se torna inaceptablemente grande; por otra, si se elige demasiado grande, el resultado es un diseño caro o no funcional. La elección de un factor de seguridad apropiado para una determinada aplicación de diseño requiere de un acertado juicio por parte del ingeniero basado en muchas consideraciones como las siguientes:

1. *Variaciones que pueden ocurrir en las propiedades del elemento bajo consideración*. La composición, resistencia y dimensiones del elemento están sujetas a pequeñas variaciones durante la manufactura. Además, las propiedades del material pueden alterarse y, con ello, introducir esfuerzos residuales debido al calentamiento o deformación que puedan ocurrir durante la manufactura, almacenamiento, transporte o construcción del material.
2. *Número de cargas que puedan esperarse durante la vida de la estructura o máquina*. Para la mayoría de los materiales el esfuerzo último disminuye al aumentar el número de aplicaciones de carga. Este fenómeno se conoce como *fatiga* y, si se ignora, puede provocar una falla repentina (sección 2.7).
3. *Tipo de cargas que se han planeado para el diseño, o que puedan ocurrir en el futuro*. Muy pocas situaciones de carga se conocen con certeza. La mayoría de las cargas de diseño son aproximaciones. Además, las alteraciones futuras o cambios en el uso pueden introducir cambios en la carga real. Para cargas dinámicas, cíclicas o de impulso, se requieren mayores factores de seguridad.
4. *Tipo de falla que pueda ocurrir*. Los materiales frágiles comúnmente fallan de manera repentina, sin indicación previa de que el colapso es inminente. Por otra parte, los materiales dúctiles, como el acero estructural, con frecuencia sufren una sustancial deformación, llamada *cedencia*, antes de fallar, dando así una advertencia de que existe la sobrecarga. Sin embargo, la mayoría de las fallas de estabilidad o por pandeo son repentinas, sea frágil el material o no. Cuando existe la posibilidad de falla repentina, debe emplearse un mayor factor de seguridad que cuando la falla es precedida por señales obvias de advertencia.
5. *Incertidumbre debida a los métodos de análisis*. Todos los métodos de diseño se basan en ciertas suposiciones simplificadoras que se traducen en que los esfuerzos calculados sean sólo aproximaciones de los esfuerzos reales.
6. *Deterioro que pueda ocurrir en el futuro por mantenimiento incorrecto o por causas naturales inevitables*. Un factor de seguridad mayor es necesario en localidades donde las condiciones como la corrosión y la putrefacción son difíciles de controlar o hasta de descubrir.
7. *Importancia de un elemento dado a la integridad de la estructura completa*. Los refuerzos y los elementos secundarios pueden diseñarse en muchos casos, con un factor de seguridad menor que el empleado para los elementos principales.

Además de lo anterior, hay la consideración adicional relativa al riesgo para la vida y para la propiedad que una falla produciría. Cuando una falla no implica un riesgo para la vida, sino sólo un riesgo mínimo para la propiedad, puede considerarse el uso de un factor de seguridad menor. Por último, está la consideración práctica de que, a menos que se utilice un diseño cuidadoso con un factor de seguridad no excesivo, una estructura o máquina puede no desempeñar la función para la que fue diseñada. Por ejemplo, algunos altos factores de seguridad en aviación pueden tener un efecto inaceptable sobre el peso de una aeronave.

Para la mayor parte de las aplicaciones estructurales y de maquinaria, los factores de seguridad se establecen en las especificaciones de diseño o en los códigos de construcción elaborados por comités de experimentados ingenieros que trabajan con sociedades profesionales, con la industria o con agencias federales, estatales o municipales. Ejemplos de tales especificaciones de diseño y de códigos de construcción en Estados Unidos son:

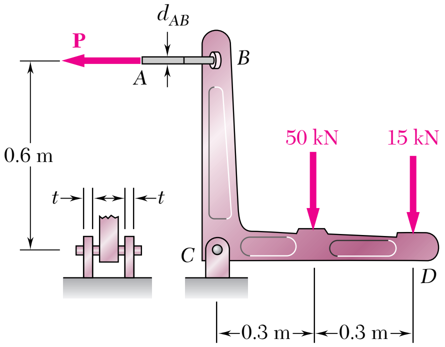
1. *Acero:* American Institute of Steel Construction, Specifications for Structural Steel Buildings.
2. *Concreto:* American Concrete Institute, Building Code Requirement for Structural Concrete.
3. *Madera:* American Forest and Paper Association, National Design Specification for Wood Construction.
4. *Puentes para carreteras:* American Association of State Highway Officials, Standard Specifications for Highway Bridges.

***d. Diseño por carga y por factor de resistencia.** Como se vio antes, el método de esfuerzo permisible requiere que todas las incertidumbres asociadas con el diseño de una estructura o elemento de máquina se agrupen en un solo factor de seguridad. Un método alterno de diseño, que está ganando aceptación, sobre todo entre los ingenieros estructurales, hace posible distinguir entre las incertidumbres asociadas con la estructura misma y aquellas asociadas con la carga para cuyo soporte está diseñada, por medio de tres diferentes factores. Este método, denominado *Diseño por Carga y por Factor de Resistencia* (*DCFR*), también permite al diseñador distinguir entre las incertidumbres asociadas con la *carga viva*, P_V, esto es, con la carga que será soportada por la estructura, y con la *carga muerta*, P_M, que es el peso de la porción de la estructura que contribuye a la carga total.

Cuando se emplea este método de diseño, la *carga última*, P_U, de la estructura, esto es, la carga a la que la estructura deja de ser útil, deberá determinarse primero. El diseño propuesto es aceptable si se satisface la siguiente desigualdad:

$$\gamma_M P_M + \gamma_V P_V \leq \phi P_U \tag{1.26}$$

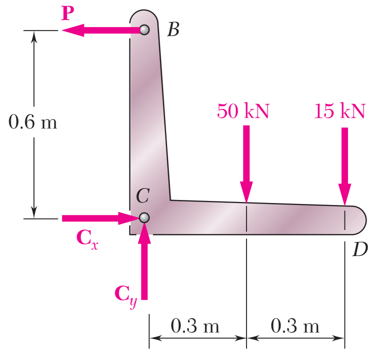
El coeficiente ϕ se denomina *factor de resistencia*; tiene en cuenta las incertidumbres asociadas con la estructura misma y normalmente será menos de 1. Los coeficientes γ_M y γ_V se conocen como los *factores de carga*; tienen en cuenta las incertidumbres asociadas, respectivamente, con la carga muerta y serán normalmente mayores que 1, siendo γ_V generalmente mayor que γ_M. A pesar de que algunos ejemplos y problemas asignados que utilizan DCFR se han incluido en este capítulo y en los capítulos 5 y 10, el método de diseño de esfuerzo permisible será el empleado en este libro.



PROBLEMA MODELO 1.3

Se aplican dos fuerzas a la ménsula *BCD* como se muestra en la figura. *a*) Sabiendo que la varilla de control *AB* será de acero con un esfuerzo normal último de 600 MPa, determine el diámetro de la varilla utilizando un factor de seguridad de 3.3. *b*) El perno en *C* será de un acero con un esfuerzo último al corte de 350 MPa. Encuentre el diámetro del perno *C* tomando en cuenta que el factor de seguridad con respecto al corte también será de 3.3. *c*) Halle el espesor requerido de los soportes de la ménsula en *C* sabiendo que el esfuerzo permisible de apoyo del acero utilizado es de 300 MPa.

SOLUCIÓN



Cuerpo libre: ménsula entera. La reacción en *C* está representada por sus componentes $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$.

$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$: $P(0.6 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(0.3 \text{ m}) - (15 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) = 0 \quad P = 40 \text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0$: $C_x = 40$ k

$\Sigma F_y = 0$: $C_y = 65$ kN

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76.3 \text{ kN}$$

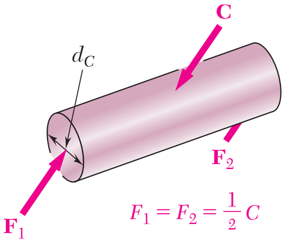
***a*) Varilla de control *AB*.** Como el factor de seguridad debe ser 3.3, el esfuerzo permisible será

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{600 \text{ MPa}}{3.3} = 181.8 \text{ MPa}$$

Para $P = 40$ kN el área requerida por la sección transversal es

$$A_{\text{req}} = \frac{P}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{40 \text{ kN}}{181.8 \text{ MPa}} = 220 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{req}} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 220 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \qquad d_{AB} = 16.74 \text{ mm} \blacktriangleleft$$



***b*) Corte en el perno *C*.** Para un factor de seguridad de 3.3, se tiene que

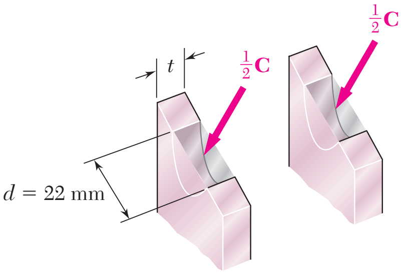
$$\tau_{\text{perm}} = \frac{\tau_U}{F.S.} = \frac{350 \text{ MPa}}{3.3} = 106.1 \text{ MPa}$$

Como el perno se encuentra en cortante doble

$$A_{\text{req}} = \frac{C/2}{\tau_{\text{perm}}} = \frac{(76.3 \text{ kN})/2}{106.1 \text{ MPa}} = 360 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{req}} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 360 \text{ mm}^2 \qquad d_C = 21.4 \text{ mm} \qquad \text{Use: } d_C = 22 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

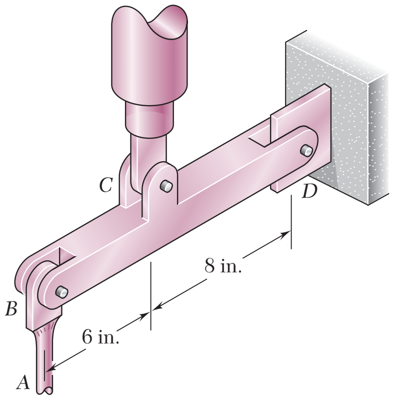
El siguiente tamaño más grande disponible de perno es de 22 mm y es el que deberá usarse.



***c*) Cojinete en *C*.** Utilizando $d = 22$ mm, el área nominal de apoyo para cada ménsula es de $22t$. Ya que la fuerza que soporta cada ménsula es de $C/2$ y el esfuerzo permisible de apoyo es de 300 MPa, se escribe

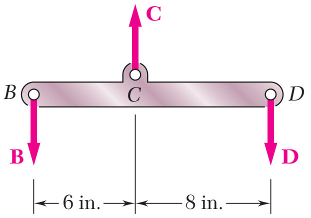
$$A_{\text{req}} = \frac{C/2}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(76.3 \text{ kN})/2}{300 \text{ MPa}} = 127.2 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto $22t = 127.2 \qquad t = 5.78$ mm $\qquad$ Use: $t = 6$ mm ◀



PROBLEMA MODELO 1.4

La viga rígida *BCD* está unida por pernos a una varilla de control en *B*, a un cilindro hidráulico en *C* y a un apoyo fijo en *D*. Los diámetros de los pernos utilizados son: $d_B = d_D = \frac{3}{8}$ in., $d_C = \frac{1}{2}$ in. Cada perno actúa en cortante doble y está hecho de un acero para el que el esfuerzo último de corte es $\tau_U = 40$ ksi. La varilla de control *AB* tiene un diámetro $d_A = \frac{7}{16}$ in. y es de un acero con esfuerzo último a la tensión de $\sigma_U = 60$ ksi. Si el mínimo factor de seguridad debe ser de 3.0 para la unidad completa, encuentre la fuerza ascendente máxima que puede aplicarse al cilindro hidráulico en *C*.



SOLUCIÓN

El factor de seguridad con respecto a la falla debe ser de 3.0 o más en cada uno de los tres pernos y en la varilla de control. Estos cuatro criterios independientes se estudiarán por separado.

Cuerpo libre: viga *BCD*. Primero se determina la fuerza en *C* en términos de la fuerza en *B* y en términos de la fuerza en *D*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad B(14 \text{ in.}) - C(8 \text{ in.}) = 0 \qquad C = 1.750B \qquad (1)$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -D(14 \text{ in.}) + C(6 \text{ in.}) = 0 \qquad C = 2.33D \qquad (2)$$

Varilla de control. Para un factor de seguridad de 3.0 se tiene que

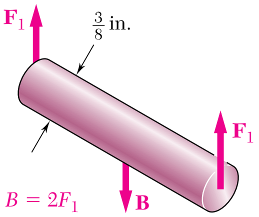
$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.0} = 20 \text{ ksi}$$

La fuerza permisible en la varilla de control es

$$B = \sigma_{\text{perm}}(A) = (20 \text{ ksi})\,\tfrac{1}{4}\pi\,(\tfrac{7}{16} \text{ in.})^2 = 3.01 \text{ kips}$$

Utilizando la ecuación (1) se halla el máximo valor permisible de *C*:

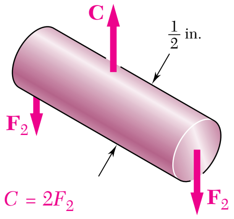
$$C = 1.750B = 1.750(3.01 \text{ kips}) \qquad C = 5.27 \text{ kips} \ \triangleleft$$



Perno en *B*. $\tau_{\text{perm}} = \tau_U/F.S. = (40 \text{ ksi})/3 = 13.33$ ksi. Como el perno está en cortante doble, la magnitud permisible de la fuerza **B** ejercida sobre el perno es

$$B = 2F_1 = 2(\tau_{\text{perm}}A) = 2(13.33 \text{ ksi})(\tfrac{1}{4}\pi)(\tfrac{3}{8} \text{ in.})^2 = 2.94 \text{ kips}$$

De la ecuación (1): $\quad C = 1.750B = 1.750(2.94 \text{ kips}) \qquad C = 5.15 \text{ kips} \ \triangleleft$



Perno en *D*. Como este perno es el mismo que el perno *B*, la fuerza permisible es $D = B = 2.94$ kips. De la ecuación (2):

$$C = 2.33D = 2.33(2.94 \text{ kips}) \qquad C = 6.85 \text{ kips} \ \triangleleft$$

Perno en *C*. Nuevamente tenemos $\tau_{\text{perm}} = 13.33$ ksi y

$$C = 2F_2 = 2(\tau_{\text{perm}}A) = 2(13.33 \text{ ksi})(\tfrac{1}{4}\pi)(\tfrac{1}{2} \text{ in.})^2 \qquad C = 5.23 \text{ kips} \ \triangleleft$$

Resumen. Se han encontrado separadamente cuatro valores máximos permisibles para la fuerza en *C*. Para satisfacer todos estos criterios debe escogerse el mínimo valor, esto es: $C = 5.15 \text{ kips} \ \blacktriangleleft$

PROBLEMAS

1.29 La carga **P** de 1.4 kip está soportada por dos elementos de madera con sección transversal uniforme, unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normales y cortantes en el empalme pegado.

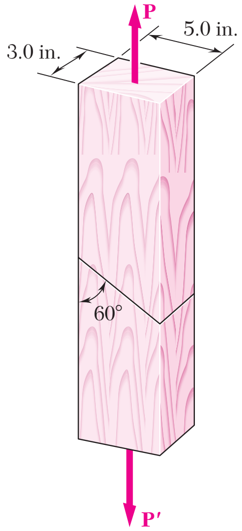


Figura P1.29 y *P1.30*

1.30 Dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme están unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo cortante permisible en el empalme pegado es de 60 psi, determine *a*) la máxima carga **P** que puede soportarse con seguridad, *b*) el esfuerzo a tensión correspondiente en el empalme.

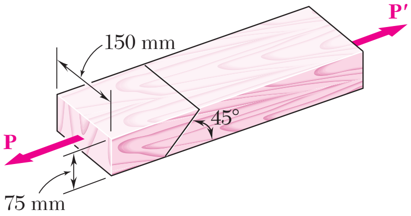


Figura P1.31 y P1.32

1.31 Dos elementos de madera de sección transversal rectangular uniforme están unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 11$ kN, determine los esfuerzos normal y cortante en el empalme pegado.

1.32 Dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme están unidos mediante un empalme sencillo pegado al sesgo como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo a tensión permisible en el empalme pegado es de 560 kPa, determine *a*) la máxima carga **P** que puede aplicarse con seguridad, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en el empalme.

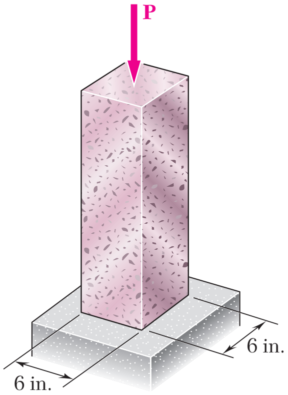


Figura P1.33 y *P1.34*

1.33 Una carga centrada **P** se aplica al bloque de granito que se muestra en la figura. Si se sabe que el valor máximo resultante del esfuerzo cortante en el bloque es de 2.5 ksi, determine *a*) la magnitud de **P**, *b*) la orientación de la superficie donde ocurre el máximo esfuerzo cortante, *c*) el esfuerzo normal ejercido sobre esa superficie, *d*) el valor máximo del esfuerzo normal en el bloque.

1.34 Una carga **P** de 240 kip se aplica a un bloque de granito como se muestra en la figura. Determine el valor máximo resultante de *a*) el esfuerzo normal, *b*) el esfuerzo cortante. Especifique la orientación del plano donde ocurren estos valores máximos.

1.35 Un tubo de acero de 400 mm de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de 10 mm de espesor soldando a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 20° con un plano perpendicular al eje del tubo. Si se sabe que los esfuerzos normal y cortante máximos permisibles en las direcciones respectivas normal y tangencial a la soldadura, son de $\sigma = 60$ MPa y $\tau = 36$ MPa, determine la magnitud P de la máxima fuerza axial que puede aplicarse al tubo.

1.36 Un tubo de acero de 400 mm de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de 10 mm de espesor soldando a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 20° con un plano perpendicular al eje del tubo. Si se sabe que una fuerza axial **P** de 300 kN se aplica al tubo, determine los esfuerzos normal y cortante en las direcciones respectivas normal y tangencial a la soldadura.

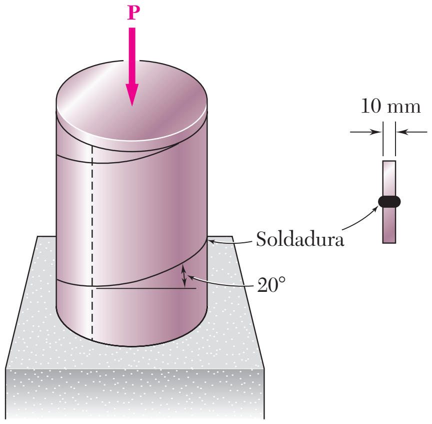


Figura P1.35 y P1.36

1.37 Un aro de acero *ABCD* de 1.2 m de largo y 10 mm de diámetro se coloca alrededor de una varilla de aluminio *AC* de 24 mm de diámetro como se muestra en la figura. Los cables *BE* y *DF*, cada uno de 12 mm de diámetro, se utilizan para aplicar la carga **Q**. Si se sabe que la resistencia última del acero empleado para el aro y los cables es de 480 MPa, y que la resistencia última del aluminio usado para la varilla es de 260 MPa, determine la máxima carga **Q** que puede aplicarse si se desea obtener un factor de seguridad global de 3.

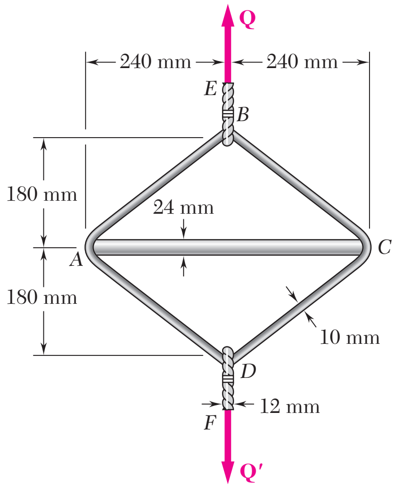


Figura P1.37

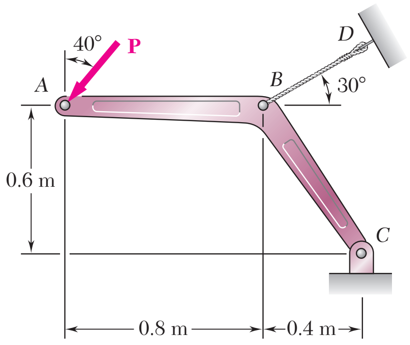


Figura P1.38 y *P1.39*

1.38 El elemento *ABC*, soportado por un pasador y una ménsula en *C* y un cable *BD*, se diseñó para soportar una carga **P** de 16 kN como se muestra en la figura. Si se sabe que la carga última para el cable *BD* es de 100 kN, determine el factor de seguridad respecto a la falla del cable.

1.39 Si se sabe que la carga última para el cable *BD* es de 100 kN y que se requiere un factor de seguridad de 3.2 respecto a la falla del cable, determine la magnitud de la máxima fuerza **P** que puede aplicarse con seguridad al elemento *ABC* que se muestra en la figura.

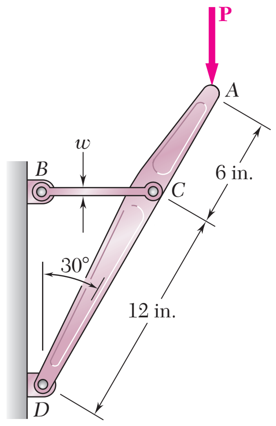


Figura P1.40 y P1.41

1.40 El eslabón horizontal *BC* tiene $\frac{1}{4}$ in. de grosor y un ancho $w = 1.25$ in., está fabricado de acero con una resistencia última a la tensión de 65 ksi. ¿Cuál es el factor de seguridad si la estructura mostrada se diseñó para soportar una carga $P = 10$ kips?

1.41 El eslabón horizontal *BC* tiene $\frac{1}{4}$ in. de grosor y es de un acero con una resistencia última a la tensión de 65 ksi. ¿Cuál debe ser su ancho w si la estructura mostrada se diseñó para soportar una carga $P = 8$ kips con un factor de seguridad igual a 3?

1.42 El eslabón *AB* debe fabricarse con un acero cuya resistencia última a la tensión sea de 450 MPa. Determine el área de la sección transversal de *AB* para la cual el factor de seguridad es de 3.50. Suponga que el eslabón se reforzará de manera adecuada alrededor de los pasadores en *A* y *B*.

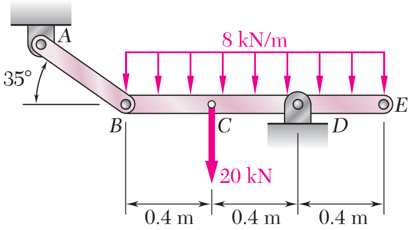


Figura *P1.42*

1.43 Los dos elementos de madera que se muestran en la figura, soportan una carga de 16 kN y se encuentran unidos mediante láminas de madera contrachapada pegadas completamente a las superficies de contacto. El esfuerzo cortante último del pegamento es de 2.5 MPa y la separación entre los elementos es de 6 mm. Determine la longitud *L* requerida para cada lámina si debe lograrse un factor de seguridad de 2.75.

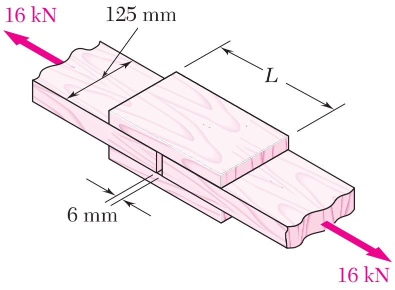


Figura P1.43

1.44 Para el ensamble y la carga del problema 1.43, determine el factor de seguridad si la longitud de cada lámina es $L = 180$ mm.

1.45 Tres pernos de acero de 18 mm de diámetro se utilizarán para unir la placa de acero a una viga de madera, como se muestra en la figura. Si se sabe que la placa puede soportar una carga de 110 kN y que el esfuerzo cortante último para el acero utilizado es de 360 MPa, determine el factor de seguridad para este diseño.

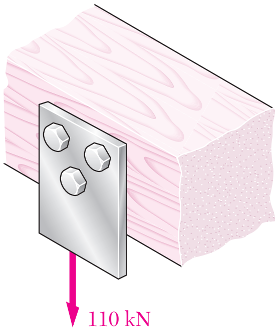


Figura *P1.45* y *P1.46*

1.46 Tres pernos de acero serán utilizados para unir la placa de acero con una viga de madera, como se muestra en la figura. Si se sabe que la placa puede soportar una carga de 110 kN, que el esfuerzo cortante último para el acero utilizado es de 360 MPa y que se desea un factor de seguridad de 3.35, determine el diámetro requerido para los pernos.

1.47 Una carga **P** es soportada, como se muestra en la figura, por un pasador de acero que se insertó en un elemento corto de madera que cuelga del techo. La resistencia última de la madera utilizada es de 12 ksi a la tensión y de 1.5 ksi al corte, en tanto que la resistencia última del acero es de 30 ksi al corte. Si se sabe que el diámetro del pasador es $d = \frac{5}{8}$ in. y que la magnitud de la carga es $P = 5$ kips, determine *a*) el factor de seguridad para el pasador, *b*) los valores requeridos de *b* y *c* si el factor de seguridad del elemento de madera debe ser igual al que se determinó en el inciso *a*) para el pasador.

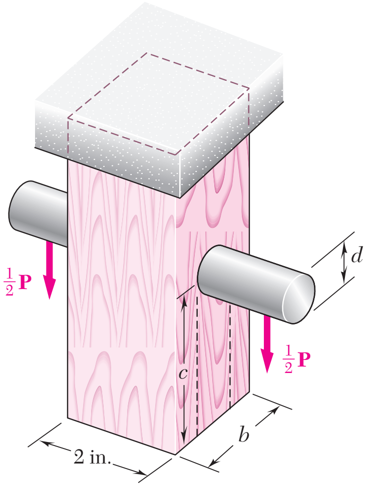


Figura P1.47

1.48 Para el soporte del problema 1.47, si se sabe que $b = 1.6$ in., $c = 2.2$ in. y $d = \frac{1}{2}$ in., determine la carga **P** si se desea un factor de seguridad general de 3.2.

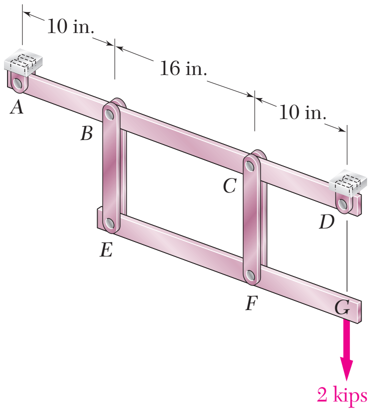


Figura P1.49

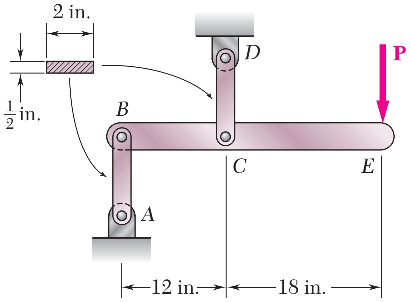


Figura P1.51

1.49 Cada uno de los dos eslabones verticales *CF*, que conectan los dos elementos horizontales *AD* y *EG*, tiene una sección transversal rectangular uniforme de $\frac{1}{4}$ in. de espesor y 1 in. de ancho, y está fabricado con acero con una resistencia última a la tensión de 60 ksi. Cada uno de los pernos en *C* y *F* tiene un diámetro de $\frac{1}{2}$ in. y están elaborados con un acero que tiene una resistencia última a cortante de 25 ksi. Determine el factor general de seguridad para los eslabones *CF* y para los pasadores que los conectan a los elementos horizontales.

1.50 Resuelva el problema 1.49, suponiendo que los pasadores en *C* y *F* fueron sustituidos por pasadores con un diámetro de $\frac{3}{4}$ in.

1.51 Cada uno de los eslabones *AB* y *CD* están conectados a un soporte y al elemento *BCE* mediante pasadores de acero de 1 in. de diámetro que actúan en cortante simple. Si se sabe que el esfuerzo cortante último para el acero usado en los pasadores es de 30 ksi y que el esfuerzo normal último para el acero usado en los eslabones es de 70 ksi, determine la carga **P** permisible si se desea un factor de seguridad general de 3.0. (Observe que los eslabones no tienen refuerzo alrededor de los orificios para los pasadores.)

1.52 Se desea considerar un diseño alterno para dar soporte al elemento *BCE* del problema 1.51, por lo que se reemplazará el eslabón *CD* por dos eslabones, cada uno con una sección transversal de $\frac{1}{4} \times 2$ in. Lo anterior ocasiona que los pasadores en *C* y *D* estén en cortante doble. Si se supone que las otras especificaciones permanecen sin cambio, determine la carga **P** permisible si se desea un factor de seguridad general de 3.0.

1.53 En la estructura de acero, que se muestra en la figura, se utiliza un pasador de 6 mm de diámetro en *C* y pasadores de 10 mm de diámetro en *B* y *D*. El esfuerzo cortante último es de 150 MPa para todas las conexiones y el esfuerzo normal último es de 400 MPa en el eslabón *BD*. Si se desea un factor de seguridad de 3.0, determine la carga máxima **P** que puede aplicarse en *A*. Observe que el eslabón *BD* no está reforzado alrededor de los orificios para los pasadores.

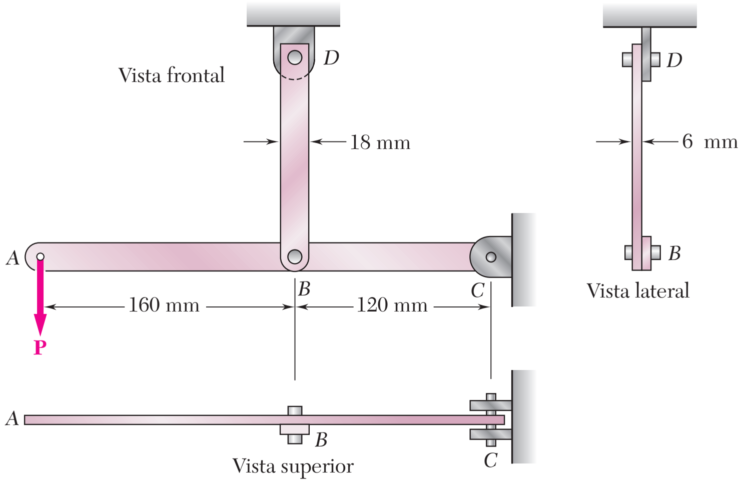


Figura P1.53

1.54 Resuelva el problema 1.53, suponiendo que la estructura se ha rediseñado al utilizar pasadores de 12 mm de diámetro en *B* y *D* y que no se ha realizado ningún otro cambio.

1.55 En la estructura, que se muestra en la figura, se emplea un pasador de 8 mm de diámetro en *A* y pasadores de 12 mm de diámetro en *B* y en *D*. Si se sabe que el esfuerzo cortante último es de 100 MPa en todas las conexiones y que el esfuerzo normal último es de 250 MPa en cada uno de los dos eslabones que unen *B* y *D*, determine la carga **P** permisible si se desea un factor de seguridad general de 3.0.

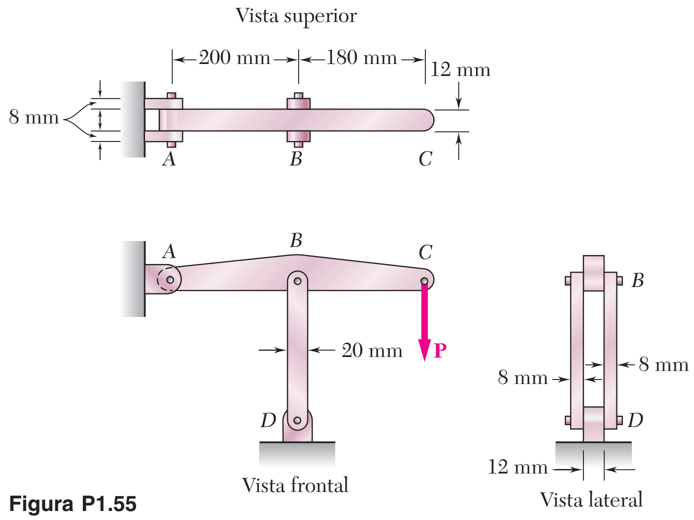


Figura P1.55

1.56 En un diseño alterno para la estructura del problema 1.55, se utilizará un pasador de 10 mm de diámetro en *A*. Si se supone que las otras especificaciones permanecen sin cambio, determine la carga **P** permisible si se desea un factor general de seguridad de 3.0.

***1.57** Una plataforma de 40 kg está unida al extremo *B* de una viga *AB* de madera de 50 kg. La viga está apoyada, como se muestra en la figura, mediante un perno en *A* y una varilla delgada de acero *BC* con una carga última de 12 kN. *a*) Utilice el método de diseño por carga y factor de resistencia con un factor de resistencia de $\phi = 0.90$ y factores de carga $\gamma_D = 1.25$ y $\gamma_L = 1.6$, para calcular la máxima carga que puede colocarse con seguridad en la plataforma. *b*) ¿Cuál es el factor de seguridad convencional correspondiente a la varilla *BC*?

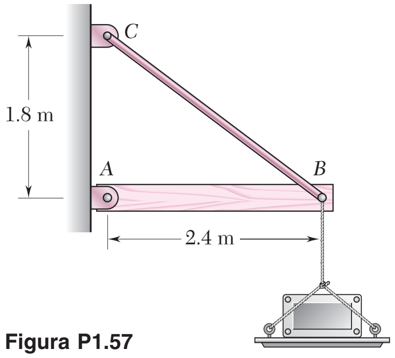


Figura P1.57

***1.58** El método de diseño por carga y factor de resistencia se utilizará para seleccionar los dos cables que elevarán y bajarán una plataforma que soportará a dos trabajadores que limpian ventanas. La plataforma pesa 160 lb y cada uno de los trabajadores pesa 195 libras con su equipo. Como estos trabajadores pueden moverse con libertad sobre la plataforma, 75% de su peso total y del peso de su equipo se utilizará como la carga viva de diseño de cada cable. *a*) Con un factor de resistencia $\phi = 0.85$ y factores de carga $\gamma_D = 1.2$ y $\gamma_L = 1.5$, determine la carga mínima requerida en un cable. *b*) ¿Cuál es el factor convencional de seguridad para los cables elegidos?

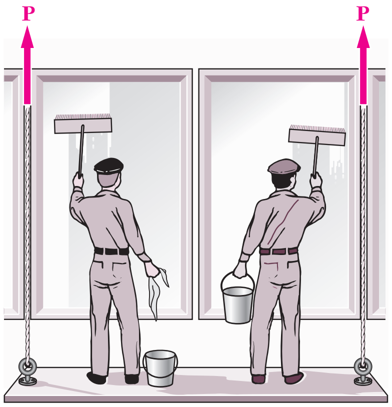


Figura P1.58

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 1

Este capítulo se dedicó al concepto de esfuerzo y a una introducción a los métodos usados para el análisis y diseño de máquinas y de estructuras portadoras de carga.

En la sección 1.2 se presentó un breve repaso de los métodos de estática y de su aplicación a la determinación de las reacciones ejercidas por sus soportes sobre una estructura sencilla que consista de elementos conectados por pasadores. Se puso énfasis en el uso del *diagrama de cuerpo libre* para obtener las ecuaciones de equilibrio que después se resolvieron para determinar las reacciones desconocidas. Los diagramas de cuerpo libre también se utilizaron para encontrar las fuerzas internas en los diversos miembros de la estructura.

Carga axial. Esfuerzo normal

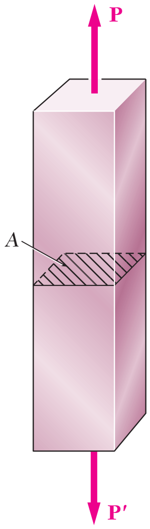


Figura 1.8*a*)

El concepto de *esfuerzo* se introdujo primero en la sección 1.3 al considerar un elemento con dos fuerzas bajo *carga axial*. El *esfuerzo normal* en ese elemento se obtuvo dividiendo la magnitud P de la carga por el área transversal del elemento (figura 1.8*a*). Se tuvo

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

En la sección 1.4 se realizó una breve consideración de dos de las principales tareas del ingeniero: el *análisis* y el *diseño* de estructuras y máquinas.

Como se señaló en la sección 1.5, el valor de σ obtenido de la ecuación (1.5) representa el *esfuerzo promedio* a través de la sección más que el esfuerzo en un punto específico Q de la sección. Considerando una pequeña área ΔA que rodee al punto Q y la magnitud ΔF de la fuerza ejercida sobre ΔA, se define el esfuerzo en el punto Q como

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

En general, el valor obtenido para el esfuerzo σ en el punto Q es diferente del valor del esfuerzo promedio dado por la fórmula (1.5) y puede verse que varía a través de la sección. Sin embargo, esta variación es pequeña en cualquier sección que se encuentre lejos de los puntos de aplicación de las cargas. En la práctica, por lo tanto, se supone *uniforme* la distribución de los esfuerzos normales en un elemento cargado axialmente, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas.

No obstante, para que la distribución de esfuerzos sea uniforme en una sección dada, es necesario que la línea de acción de las cargas **P** y **P′** pase por el centroide C de la sección. Tal carga se conoce como carga axial *centrada*. En el caso de una carga axial *excéntrica*, la distribución de esfuerzos *no* es uniforme. Los esfuerzos en los elementos sujetos a carga axial excéntrica se estudiarán en el capítulo 4.

Fuerzas transversales. Esfuerzo cortante

Cuando *fuerzas transversales* **P** y **P′** iguales y opuestas de magnitud P se aplican a un elemento AB (figura 1.16*a*), se crean *esfuerzos cortantes* τ sobre cualquier sección localizada entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas (sección 1.6). Estos esfuerzos varían mucho a través de la sección y *no puede* suponerse que su distribución sea uniforme. Sin embargo, dividiendo la magnitud de P —conocida como el *cortante* en la sección— por el área A de la sección transversal, se define el *esfuerzo promedio de corte* sobre la sección:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

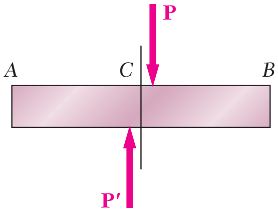


Figura 1.16*a*)

Cortante único y doble

Los esfuerzos cortantes se encuentran en pernos, pasadores o remaches que conectan dos elementos estructurales o componentes de maquinaria. Por ejemplo, en el caso del perno CD (figura 1.18), que se encuentra en *cortante simple*, se anotó

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

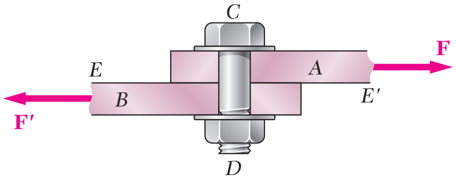


Figura 1.18

mientras que, en el caso de los pernos EG y HJ (figura 1.20), que se encuentran ambos en *cortante doble*, se tuvo que

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \tag{1.10}$$

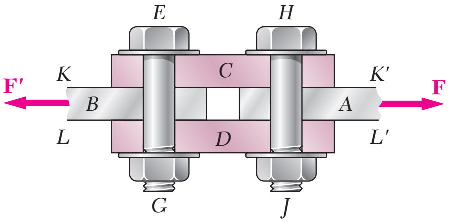


Figura 1.20

Esfuerzo de apoyo

Los pernos, pasadores y remaches también crean esfuerzos en los elementos que conectan, a lo largo de la *superficie de apoyo* o superficie de contacto (sección 1.7). El perno CD de la figura 1.18, por ejemplo, crea esfuerzos en la superficie semicilíndrica de la placa A con la que está en contacto (figura 1.22). Como la distribución de estos esfuerzos es muy complicada, en la práctica se emplea un valor nominal promedio σ_b del esfuerzo, llamado *esfuerzo de apoyo*, que se obtiene de dividir la carga P entre el área del rectángulo que representa la proyección del perno sobre la sección de la placa. Si t es el espesor de la placa y d el diámetro del perno, se tiene

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \tag{1.11}$$

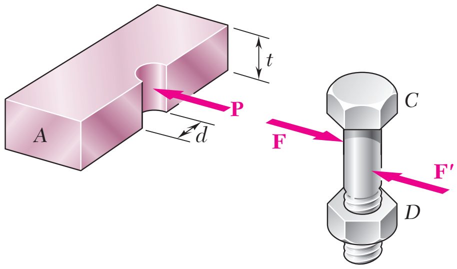


Figura 1.22

En la sección 1.8 se aplicó el concepto introducido en las secciones previas al análisis de una estructura sencilla que consta de dos elementos conectados por pasadores que soportan una carga dada. Se determinaron, sucesivamente, los esfuerzos normales en los dos elementos, prestando especial atención a sus secciones más angostas, los esfuerzos cortantes en los diversos pernos y el esfuerzo de apoyo en cada conexión.

Método de solución

El método que deberá seguirse en la solución de un problema de mecánica de materiales se describió en la sección 1.9. Su solución deberá comenzar enunciando de manera clara y precisa el *planteamiento* del problema. Deberán entonces dibujarse uno o varios *diagramas de cuerpo libre* que se emplearán para escribir las *ecuaciones de equilibrio*. Estas ecuaciones se resuelven para determinar las *fuerzas desconocidas*, de las que pueden calcularse los *esfuerzos* y *deformaciones* requeridas. Una vez que se ha obtenido una respuesta, deberá *verificarse con cuidado*.

La primera parte del capítulo terminó con el estudio de la importancia de la *exactitud numérica* en la ingeniería. Se enfatizó que la exactitud de una respuesta nunca puede ser mayor que la exactitud de los datos recibidos (sección 1.10).

Esfuerzos en una sección oblicua

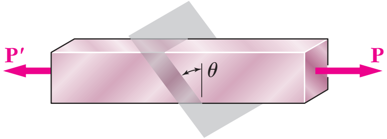


Figura 1.30*a*)

En la sección 1.11 se analizaron los esfuerzos creados en una *sección oblicua* en un elemento con dos fuerzas bajo carga axial. Se encontró que tanto esfuerzos *normales* como los *cortantes* ocurren en tal situación. Con la denotación de θ para el ángulo formado por la sección con un plano normal (figura 1.30a) y A_0 para el área de la sección perpendicular al eje del elemento, se dedujeron las siguientes expresiones para el esfuerzo normal σ y el esfuerzo cortante τ sobre la sección oblicua:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{1.14}$$

Se observó, a partir de estas fórmulas, que el esfuerzo normal es máximo e igual a $\sigma_m = P/A_0$ para $\theta = 0$, mientras que el esfuerzo cortante es máximo e igual a $\tau_m = P/2A_0$ para $\theta = 45°$. También se advirtió que $\tau = 0$ cuando $\theta = 0$, mientras que $\sigma = P/2A_0$ cuando $\theta = 45°$.

Esfuerzo bajo carga general

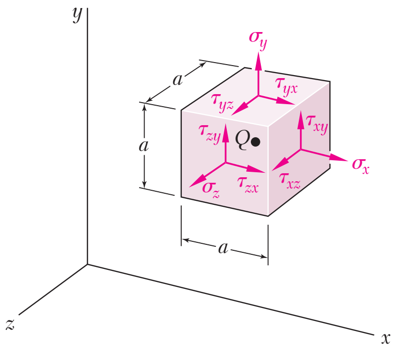


Figura 1.36

Después, se analizó el estado de esfuerzos en un punto Q en un cuerpo bajo la condición más general de carga (sección 1.12). Se consideró un pequeño cubo centrado en Q (figura 1.36), y se denotó con σ_x al esfuerzo normal ejercido sobre una cara del cubo perpendicular al eje x, y por τ_{xy} y τ_{xz}, respectivamente, a las componentes en y y en z del esfuerzo cortante ejercido sobre la misma cara del cubo. Se repitió este procedimiento para las otras dos caras del cubo y se observó que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ y $\tau_{zx} = \tau_{xz}$; se concluyó que se requieren *seis componentes de esfuerzo* para definir el estado de esfuerzo en un punto dado Q, específicamente, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}.

En la sección 1.13 se estudiaron los diversos conceptos empleados en el diseño de las estructuras de ingeniería. La *carga última* de un elemento estructural o componente de maquinaria dado es la carga a la que se espera que el elemento o componente falle; se calcula a partir del *esfuerzo último* o *resistencia última* del material usado, que se determina por un ensayo de laboratorio en una probeta de ese material. La carga última deberá ser considerablemente mayor que la *carga permisible*, esto es, la carga que soportará el elemento o componente en condiciones normales. La razón de la carga última a la carga permisible se define como el *factor de seguridad*:

Factor de seguridad

$$\text{Factor de seguridad} = F.S. = \frac{\text{carga última}}{\text{carga permisible}} \tag{1.26}$$

La determinación del factor de seguridad que deberá usarse en el diseño de una estructura dada depende de ciertas consideraciones, algunas de las cuales fueron enunciadas en esta sección.

Diseño por carga y factor de resistencia

La sección 1.13 terminó con el análisis de un enfoque alterno de diseño, conocido como *diseño por carga y factor de resistencia*, que permite al ingeniero distinguir entre las incertidumbres asociadas con la estructura y aquellas asociadas con la carga.

PROBLEMAS DE REPASO

1.59 El eslabón *BD* es una barra de 1 in. de ancho y $\frac{1}{2}$ in. de espesor. Si se sabe que cada pasador tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ in., calcule el valor máximo del esfuerzo normal promedio en el eslabón *BD* si *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$.

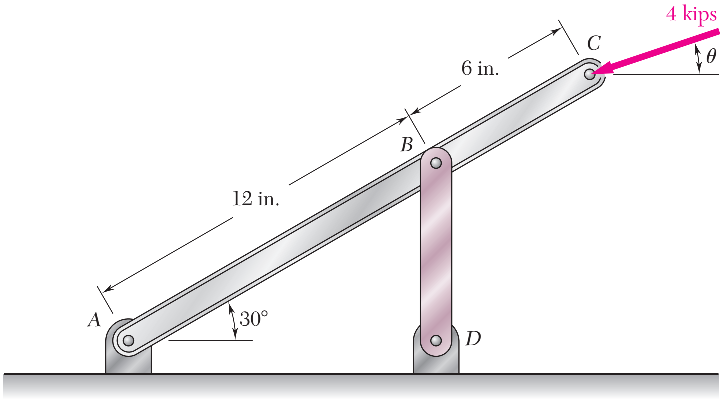


Figura P1.59

1.60 Dos fuerzas horizontales de 5 kips se aplican al pasador *B* en el ensamble que se muestra. Si se sabe que en cada conexión se emplea un pasador de 0.8 in. de diámetro, determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio *a*) en el eslabón *AB*, *b*) en el eslabón *BC*.

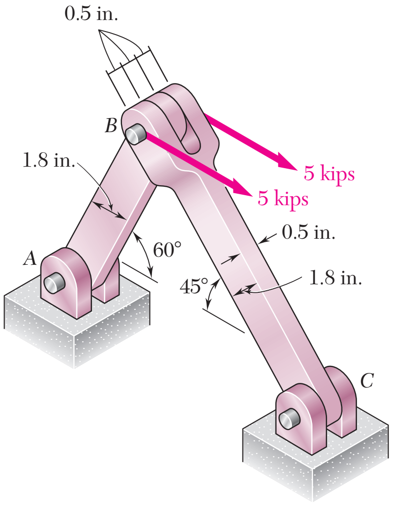


Figura P1.60

1.61 Para el ensamble y la carga del problema 1.60, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el pasador en *C*, *b*) el esfuerzo de apoyo promedio en *C* en el elemento *BC*, *c*) el esfuerzo de apoyo promedio en *B* en el elemento *BC*.

1.62 Dos duelas de madera, cada una de 22 mm de grosor y 160 mm de ancho, están unidas por el ensamble pegado de mortaja que se muestra en la figura. Si se sabe que la junta fallará cuando el esfuerzo cortante promedio en el pegamento alcance los 820 kPa, determine la longitud mínima permisible *d* de los cortes si la junta debe soportar una carga axial con $P = 7.6$ kN de magnitud.

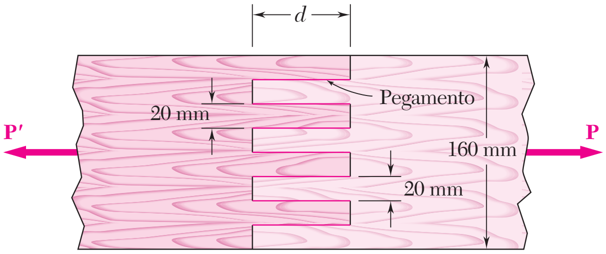


Figura *P1.62*

1.63 El cilindro hidráulico *CF*, que ejerce un control parcial de la posición de la varilla *DE*, se ha fijado en la posición mostrada. El elemento *BD* tiene 15 mm de espesor y está conectado al vástago vertical mediante un perno de 9 mm de diámetro. Si se sabe que $P = 2$ kN y $\theta = 75°$, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en el perno, *b*) el esfuerzo de apoyo en *C* en el elemento *BD*.

1.64 El cilindro hidráulico *CF*, que ejerce un control parcial de la varilla *DE*, se ha fijado en la posición mostrada. El eslabón *AB* tiene sección transversal rectangular uniforme de 12 × 25 mm y está conectado en *B* al elemento *BD* mediante un perno de 8 mm de diámetro. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio máximo permisible en el pasador es de 140 MPa, determine *a*) la máxima fuerza **P** que puede aplicarse en *E* cuando $\theta = 60°$, *b*) el esfuerzo de apoyo correspondiente en *B* en el eslabón *AB* y *c*) el valor máximo correspondiente del esfuerzo normal en el eslabón *AB*.

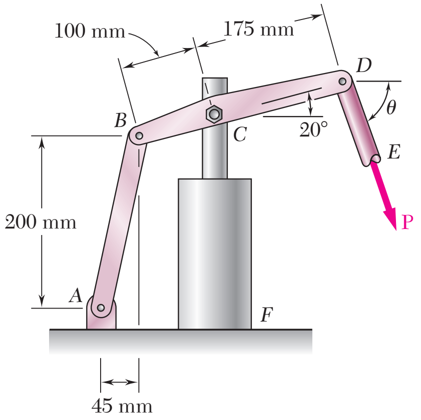


Figura P1.63 y *P1.64*

1.65 Dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme de 70 × 110 mm están unidos mediante el empalme sencillo pegado al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante máximo permisible en el empalme pegado es de 500 kPa, determine la máxima carga axial **P** que puede aplicarse con seguridad.

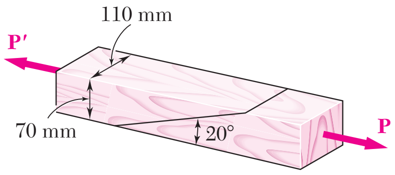


Figura P1.65

1.66 La carga de 2 000 lb debe moverse a lo largo de la viga *BD* hacia cualquier posición entre los topes en *E* y *F*. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 6$ ksi para el acero empleado en las varillas *AB* y *CD*, determine el sitio donde deberían colocarse los topes si el movimiento permitido de la carga debe ser tan grande como resulte posible.

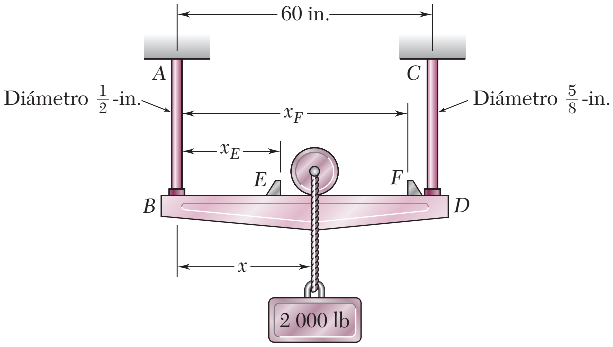


Figura *P1.66*

1.67 Una placa de acero de 10 mm de espesor está empotrada en un bloque horizontal de concreto y se emplea para anclar un cable vertical de alta resistencia, como se observa en la figura. El diámetro del orificio en la placa es de 24 mm, la resistencia última del acero utilizado es de 250 MPa y el esfuerzo último de unión entre la placa y el concreto es de 2.1 MPa. Sabiendo que se desea un factor de seguridad de 3.60 cuando $P = 18$ kN, determine *a*) el ancho *a* requerido en la placa, *b*) la profundidad mínima *b* a la que una placa de ese ancho debería empotrarse en el bloque de concreto. (Desprecie los esfuerzos normales entre el concreto y el extremo inferior de la placa.)

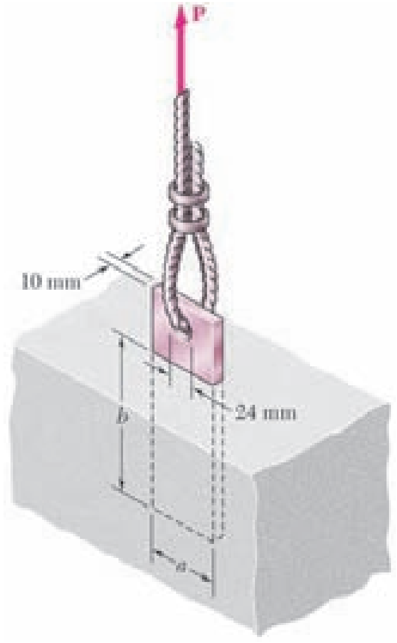


Figura P1.67

1.68 Las dos partes del elemento AB están adheridas a lo largo de un plano que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo último para la unión pegada es de 2.5 ksi en tensión y de 1.3 ksi en corte, determine el rango de valores de θ en que el factor de seguridad de los elementos es de al menos 3.0.

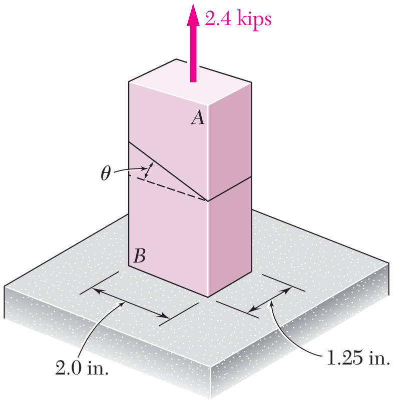


Figura P1.68 y *P1.69*

1.69 Las dos partes del elemento AB están adheridas a lo largo de un plano que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo último para la unión pegada es de 2.5 ksi en tensión y de 1.3 ksi en corte, determine *a*) el valor de θ para el cual el factor de seguridad del elemento sea máximo, *b*) el valor correspondiente del factor de seguridad. (*Sugerencia*: Iguale las expresiones obtenidas para los factores de seguridad respecto al esfuerzo normal y al esfuerzo cortante.)

1.70 Una fuerza **P** se aplica sobre una barra de refuerzo empotrada en un bloque de concreto, como se muestra en la figura. Determine la mínima longitud L para la que puede desarrollarse todo el esfuerzo normal permisible en la barra. Exprese los resultados en términos del diámetro d de la barra, el esfuerzo normal permisible σ_{perm} en el acero y el esfuerzo de adherencia permisible promedio τ_{perm} entre el concreto y la superficie cilíndrica de la barra. (Desprecie los esfuerzos normales entre el concreto y el extremo de la barra.)

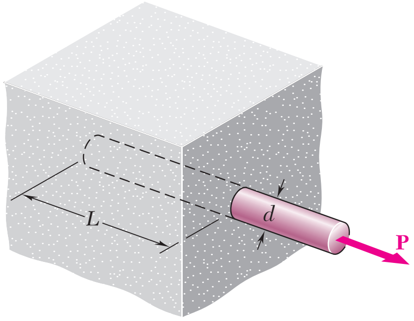


Figura P1.70

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora.

1.C1 Una varilla sólida de acero de n elementos cilíndricos soldados se somete a la carga mostrada en la figura. El diámetro del elemento i se denota por d_i y la carga aplicada a su extremo inferior por $\mathbf{P}_i$, donde la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ se dirige hacia abajo, como se muestra en la figura, y negativa si ocurre otra cosa. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda emplearse con unidades SI o de uso común en Estados Unidos para determinar el esfuerzo promedio en cada elemento de la varilla. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 1.2 y 1.4.

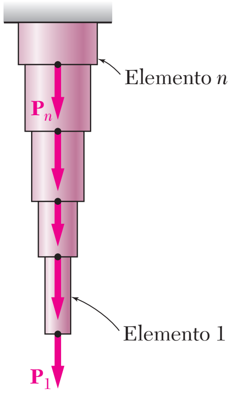


Figura P1.C1

1.C2 Al elemento horizontal *ABC* se le aplica una fuerza de 20 kN como se indica en la figura. El elemento *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10 × 50 mm y la soportan cuatro eslabones verticales, cada uno con sección transversal rectangular uniforme de 8 × 36 mm. Cada uno de los cuatro pernos en *B*, *C*, *D* y *E* tiene el mismo diámetro *d* y se encuentra en cortante doble. *a*) Escriba un programa de computadora con el fin de calcular, para valores de *d* de 10 a 30 mm, en incrementos de 1 mm, 1) el valor máximo del esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan los pernos *B* y *D*, 2) el esfuerzo normal promedio en los eslabones que conectan los pernos *C* y *E*, 3) el esfuerzo cortante promedio en el perno *B*, 4) el esfuerzo cortante promedio en el perno *C*, 5) el esfuerzo promedio de apoyo en *B* en el elemento *ABC*, 6) el esfuerzo promedio de apoyo en *C* en el elemento *ABC*. *b*) Verifique el programa comparando los valores obtenidos para $d = 16$ mm con las respuestas dadas para los problemas 1.7 y 1.27. *c*) Utilice este programa para encontrar los valores permisibles del diámetro *d* de los pernos, sabiendo que los valores permisibles para los esfuerzos normal, cortante y de apoyo para el acero utilizado son, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa y 230 MPa. *d*) Resuelva la parte *c*, suponiendo que el espesor del elemento *ABC* se ha reducido de 10 a 8 mm.

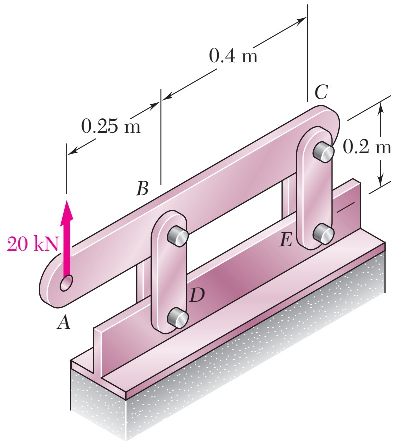


Figura P1.C2

1.C3 Dos fuerzas horizontales de 5 kips se aplican al perno *B* del ensamble mostrado. Cada uno de los tres pasadores en *A*, *B* y *C* tiene el mismo diámetro *d* y está en cortante doble. *a*) Escriba un programa de computadora que ayude a calcular, para valores de *d* de 0.50 a 1.50 in., utilizando incrementos de 0.05 in., 1) el máximo valor del esfuerzo normal promedio en el elemento *AB*, 2) el esfuerzo normal promedio en el elemento *BC*, 3) el esfuerzo cortante promedio en el perno *A*, 4) el esfuerzo cortante promedio en el perno *C*, 5) el esfuerzo promedio de apoyo en *A* en el elemento *AB*, 6) el esfuerzo promedio de apoyo en *C* en el elemento *BC*, 7) el esfuerzo promedio de apoyo en *B* en el elemento *BC*. *b*) Verifique el programa comparando los valores obtenidos para $d = 0.8$ in. con las respuestas dadas para los problemas 1.60 y 1.61. *c*) Emplee este programa para encontrar los valores permisibles para el diámetro *d* de los pernos, sabiendo que los valores permisibles para los esfuerzos normal, cortante y de apoyo para el acero utilizado son, respectivamente, 22 ksi, 13 ksi y 36 ksi. *d*) Resuelva la parte *c*, suponiendo que se investiga un nuevo diseño, en el que el espesor y el ancho de los dos elementos se cambian, respectivamente, de 0.5 a 0.3 in. y de 1.8 a 2.4 in.

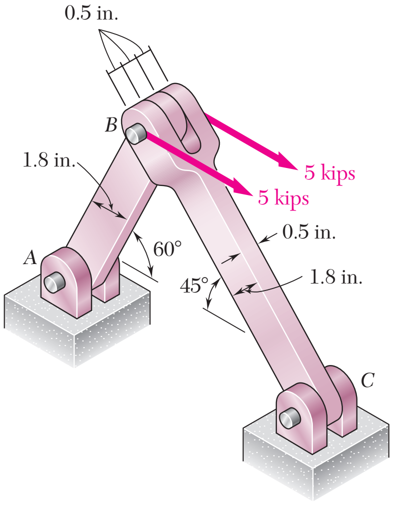


Figura P1.C3

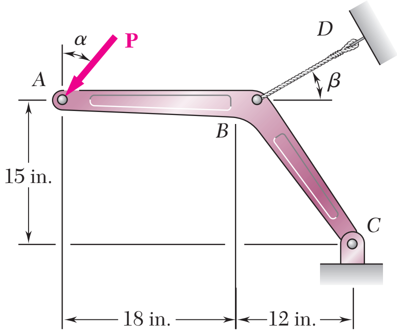


Figura P1.C4

1.C4 Una fuerza **P** de 4 kips que forma un ángulo α con la vertical se aplica, como se muestra en la figura, al elemento *ABC*, que es soportado por un pasador y una ménsula en *C* y por un cable *BD* que forma un ángulo β con la horizontal. *a*) Sabiendo que la carga última del cable es de 25 kips, escriba un programa de computadora para construir una tabla de los valores del factor de seguridad del cable para valores de α y β de 0 a 45°, utilizando incrementos en α y β correspondiendo a incrementos de 0.1 en $\tan \alpha$ y $\tan \beta$. *b*) Verifique que, para cualquier valor dado de α, el valor máximo del factor de seguridad se obtiene para $\beta = 38.66°$ y explique por qué. *c*) Determine el valor mínimo posible del factor de seguridad para $\beta = 38.66°$, así como el valor correspondiente de α, y explique el resultado obtenido.

1.C5 Una carga **P** es soportada, como se muestra en la figura, por dos elementos de madera con sección transversal rectangular uniforme que están unidos por un empalme sencillo al sesgo pegado. *a*) Si σ_U y τ_U son, respectivamente, la resistencia última del empalme a tensión y en cortante, escriba un programa de computadora que, para valores dados de a, b, P, σ_U y τ_U, expresados sea en unidades SI o americanas, y para valores de α de 5 a 85°, con intervalos de 5°, pueda utilizarse para calcular 1) el esfuerzo normal del empalme, 2) el esfuerzo cortante en el empalme, 3) el factor de seguridad relativo a la falla en tensión, 4) el factor de seguridad relativo a la falla a corte, 5) el factor general de seguridad para la junta pegada. *b*) Aplique este programa, utilizando las dimensiones y cargas de los elementos de los problemas 1.29 y 1.31, si $\sigma_U = 150$ psi y $\tau_U = 214$ psi para el pegamento utilizado en el problema 1.29, y $\sigma_U = 1.26$ MPa y $\tau_U = 1.50$ MPa para el pegamento utilizado en el problema 1.31. *c*) Verifique en cada uno de estos dos casos que el esfuerzo cortante es máximo para $\alpha = 45°$.

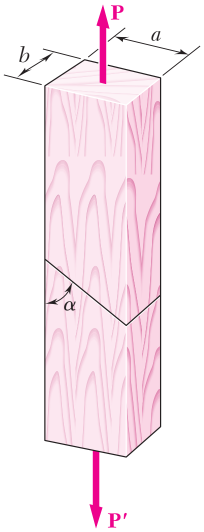


Figura P1.C5

1.C6 Al elemento *ABC* lo soportan un pasador y una ménsula en *A* y dos eslabones, que están conectados por pasadores al elemento en *B* y a un apoyo fijo en *D*. *a*) Escriba un programa de computadora para calcular la carga permisible P_{perm} para cualesquiera de los valores dados de 1) el diámetro d_1 del pasador en *A*, 2) el diámetro común d_2 de los pasadores en *B* y *D*, 3) el esfuerzo normal último σ_U en cada uno de los dos eslabones, 4) el esfuerzo cortante último τ_U en cada uno de los tres pasadores, 5) el factor general de seguridad deseado *F.S.* El programa deberá indicar también cuál de los siguientes tres esfuerzos es crítico: el esfuerzo normal en los eslabones, el esfuerzo cortante en el pasador en *A* o el esfuerzo cortante en los pasadores en *B* y *D*. *b* y *c*) Verifique el programa utilizando los datos de los problemas 1.55 y 1.56, respectivamente, y comparando las respuestas obtenidas para P_{perm} con las propuestas en el texto. *d*) Utilice el programa para determinar la carga permisible P_{perm}, así como cuál de los esfuerzos es crítico, cuando $d_1 = d_2 = 15$ mm, $\sigma_U = 110$ MPa para eslabones de aluminio, $\tau_U = 100$ MPa para pasadores de acero y $F.S. = 3.2$.

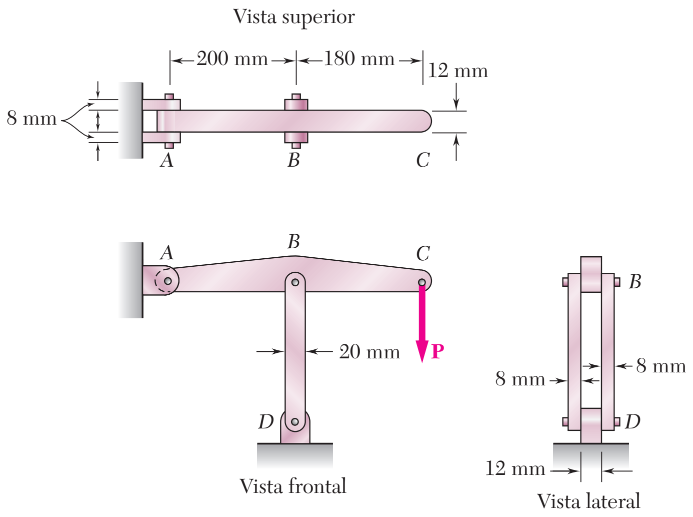


Figura P1.C6

CAPÍTULO

2

Esfuerzo y deformación. Carga axial

Este capítulo está dedicado al estudio de las deformaciones que ocurren en componentes estructurales sujetos a carga axial. El cambio en la longitud de los tensores diagonales se consideró de manera cuidadosa en el diseño de este puente estabilizado por cables.

2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 se analizaron los esfuerzos que las cargas aplicadas a una estructura o máquina crean en varios elementos y conexiones. Además se aprendió a diseñar elementos y conexiones sencillos para que no fallen en condiciones específicas de carga. Otro aspecto importante del análisis y diseño de estructuras se relaciona con las *deformaciones* causadas por las cargas que se aplican a la estructura. Obviamente, es importante evitar deformaciones tan grandes que impidan a la estructura cumplir el propósito para el que está destinada. Pero el análisis de las deformaciones también puede ayudar en la determinación de esfuerzos. De hecho, no siempre es posible determinar las fuerzas en los elementos de una estructura aplicando únicamente los principios de la estática. Esto se debe a que la estática se basa en la suposición de estructuras rígidas e indeformables. Considerando las estructuras de ingeniería como *deformables* y analizando las deformaciones en sus diversos elementos, será posible calcular las fuerzas que son *estáticamente indeterminadas*, es decir, indeterminadas dentro del punto de vista de la estática. También, como ya se indicó en la sección 1.5, la distribución de esfuerzos en un elemento dado es estáticamente indeterminada, aun cuando la fuerza en tal elemento se conozca. Para hallar la distribución real de esfuerzos dentro de un elemento es necesario, por lo tanto, analizar las deformaciones que tienen lugar en dicho elemento. En este capítulo se considerarán las deformaciones de un elemento estructural como una varilla, barra o placa sometida a *carga axial*.

Primero, se definirá la *deformación normal* ϵ en un elemento, también conocida como deformación unitaria normal, como la *deformación del elemento por unidad de longitud*. Al elaborar la gráfica del esfuerzo σ contra la deformación ϵ a medida que la carga aplicada al elemento se incrementa, se obtendrá el *diagrama esfuerzo-deformación* para el material utilizado. De dicho diagrama será posible determinar algunas propiedades importantes del material, tales como su *módulo de elasticidad* y si el material es dúctil o frágil (véanse secciones 2.2 a 2.5). También se verá en la sección 2.5 que, en tanto que el comportamiento de la mayoría de los materiales es independiente de la dirección en la que se aplique la carga, la respuesta de los materiales compuestos reforzados con fibras depende de la dirección de la carga.

Del diagrama esfuerzo-deformación, también se determinará si las deformaciones en la muestra desaparecerán después de que la carga haya sido retirada, en cuyo caso se dice que el material se comporta *elásticamente*, o si resultará en una *deformación plástica* o *deformación permanente* (véase sección 2.6).

En la sección 2.7 se estudiará al fenómeno de *fatiga*, que causa que los componentes estructurales o de máquinas fallen después de un número muy grande de cargas repetidas, aunque los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico.

La primera parte del capítulo termina en la sección 2.8, dedicada al cálculo de la deformación en varios tipos de elementos en diferentes condiciones de carga axial.

En las secciones 2.9 y 2.10 se considerarán *problemas estáticamente indeterminados*, es decir, problemas en los que las reacciones y las fuerzas internas *no pueden* determinarse únicamente por la estática. Las ecuaciones de equilibrio que se deducen del diagrama de cuerpo libre del elemento bajo consideración deben ser complementadas por relaciones que involucran deformaciones; estas relaciones serán obtenidas de la geometría del problema.

En las secciones 2.11 a 2.15 se introducirán las constantes adicionales asociadas con materiales isotrópicos, es decir, materiales cuyas características mecánicas son independientes de la dirección. Incluyen la *relación de Poisson*, que relaciona las deformaciones lateral y axial, el *módulo volumétrico* de elasticidad, que caracteriza el cambio en el volumen de un material bajo presión hidrostática y el *módulo de rigidez*, que relaciona las componentes del esfuerzo cortante y de la deformación unitaria cortante. Por último se deducirán las relaciones de esfuerzo-deformación para un material isotrópico bajo carga multiaxial.

En la sección 2.16, las relaciones de esfuerzo-deformación que involucran varios valores distintos del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson y del módulo de rigidez serán deducidos para materiales compuestos reforzados con fibras bajo carga multiaxial. A pesar de que estos materiales no son isotrópicos, desarrollan comúnmente propiedades especiales, conocidas como propiedades *ortotrópicas*, que facilitan su estudio.

Por lo analizado hasta ahora, se supondrá que los esfuerzos se encuentran distribuidos de manera uniforme en cualquier sección transversal dada y también se supondrá que permanecen dentro del rango elástico. La validez de la primera suposición se estudiará en la sección 2.17, mientras que las *concentraciones de esfuerzos* cerca de agujeros y filetes circulares en barras planas se considerarán en la sección 2.18. Las secciones 2.19 y 2.20 abordarán el análisis de esfuerzos y deformaciones en elementos hechos de materiales dúctiles cuando se sobrepasa del punto de cedencia del material. Como se verá, en tales condiciones de carga resultan *deformaciones plásticas* permanentes y *esfuerzos residuales*.

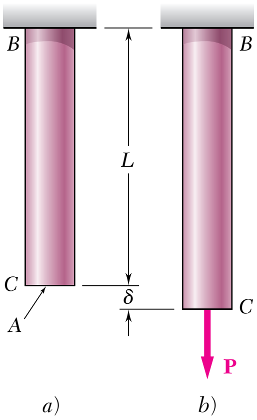


Figura 2.1

2.2 DEFORMACIÓN NORMAL BAJO CARGA AXIAL

Considere una varilla BC, de longitud L y con un área uniforme de sección transversal A que está suspendida en B (figura 2.1*a*). Si se aplica una carga **P** al extremo C, la varilla se alargará (figura 2.1*b*). Al graficar la magnitud P de la carga contra la deformación total δ (letra griega delta), se obtiene un determinado diagrama de carga-deformación (figura 2.2). Si bien este diagrama contiene información útil para el análisis de la varilla considerada, no puede emplearse directamente para predecir la deformación de una varilla del mismo material pero de diferentes dimensiones. De hecho, se observa que, si una deformación δ se produce en la varilla BC por una carga **P**, se requiere una carga 2**P** para causar la misma deformación en una varilla $B'C'$ de la

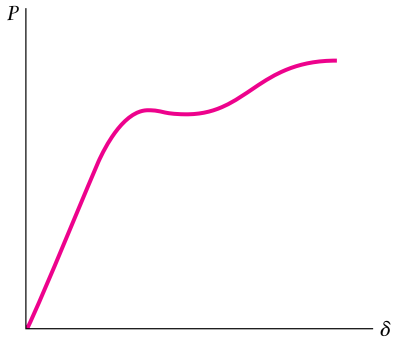


Figura 2.2

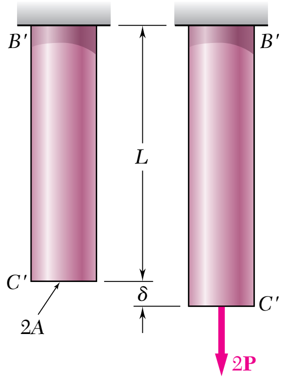


Figura 2.3

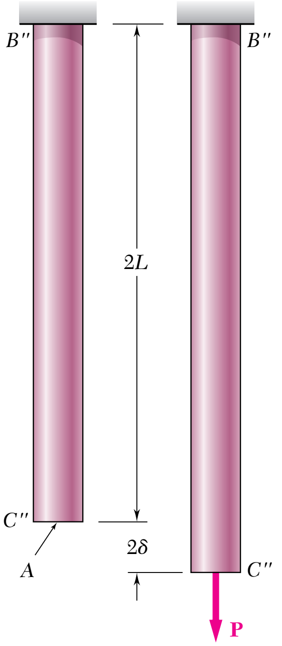


Figura 2.4

misma longitud L, pero con un área de sección transversal $2A$ (figura 2.3). Se nota que, en ambos casos, el valor del esfuerzo es el mismo: $\sigma = p/A$. Por otra parte, una carga **P** aplicada a la varilla $B''C''$, con la misma área de sección transversal A, pero de longitud $2L$, produce una deformación 2δ en dicha varilla (figura 2.4), es decir, una deformación que es el doble de la producida en la varilla BC. No obstante, en ambos casos la razón de la deformación por la longitud de la varilla es la misma e igual a δ/L. Esta observación nos lleva a introducir el concepto de *deformación unitaria*: definimos la *deformación unitaria normal* en una varilla bajo carga axial como la *deformación por unidad de longitud* de dicha varilla. Si la deformación unitaria normal se representa por ϵ (épsilon), se tiene

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

Elaborando la gráfica el esfuerzo $\sigma = P/A$ en contraste con la deformación $\epsilon = \delta/L$, se obtiene una curva que es característica de las propiedades del material y no depende de las dimensiones de la muestra particular utilizada. Esta curva se denomina *diagrama de esfuerzo-deformación*, que se explicará con más detalle en la sección 2.3.

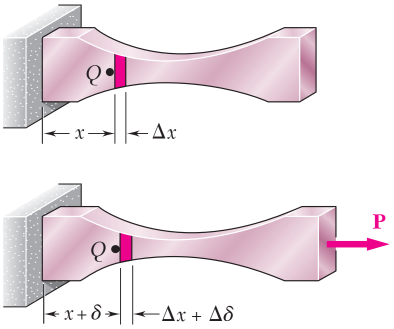


Figura 2.5

Puesto que la varilla BC considerada en el anterior análisis tenía una sección transversal uniforme con área A, puede suponerse que el esfuerzo normal σ tiene un valor constante P/A a lo largo de toda la varilla. Así, fue apropiado definir la deformación unitaria ϵ como la razón de la deformación total δ sobre el largo total L de la varilla. En el caso de un elemento de área variable de sección transversal A, sin embargo, el esfuerzo normal $\sigma = P/A$ varía a lo largo del elemento, y es necesario definir la deformación unitaria en un punto dado Q considerando un pequeño elemento con longitud sin deformar Δx (figura 2.5). Si $\Delta\delta$ es la deformación del elemento bajo la carga dada, la *deformación normal en el punto* Q se define como

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Como la deformación y la longitud se expresan en las mismas unidades, la deformación normal ϵ obtenida de dividir δ entre L (o $d\delta$ entre dx) es una *cantidad adimensional*. Por lo tanto, se obtiene el mismo valor numérico de la deformación normal en un elemento dado, sea que se empleen unidades métricas SI o unidades americanas. Considere, por ejemplo, una barra con una longitud $L = 0.600$ m y sección transversal uniforme, que sufre una deformación total $\delta = 150 \times 10^{-6}$ m. La deformación unitaria correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6}\text{ m}}{0.600\text{ m}} = 250 \times 10^{-6}\text{ m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

Advierta que la deformación total podría haberse expresado en micrómetros: $\delta = 150\ \mu$m. Se habría escrito entonces:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150\ \mu\text{m}}{0.600\text{ m}} = 250\ \mu\text{m/m} = 250\ \mu$$

y leído la respuesta como “250 micros”. Si se emplean unidades del sistema americano, la longitud y la deformación de la misma barra son, respectivamente, $L = 23.6$ in. y $\delta = 5.91 \times 10^{-3}$ in. La deformación correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{5.91 \times 10^{-3}\text{ in.}}{23.6\text{ in.}} = 250 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

que es el mismo valor que se encontró al utilizar las unidades del SI. Se acostumbra, sin embargo, cuando las longitudes y las deformaciones se expresan en pulgadas o micropulgadas (μin.), conservar las unidades originales en la expresión obtenida para la deformación. Así, en el ejemplo, la deformación se registraría como $\epsilon = 250 \times 10^{-6}$ in./in. o, de forma alterna, $\epsilon = 250\ \mu$in./in.

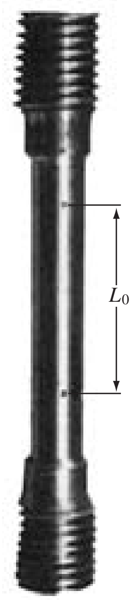


Figura 2.6 Probeta típica para ensayo o prueba de tensión.

2.3 DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN

En la sección 2.2 se vio que el diagrama que representa la relación entre el esfuerzo y la deformación en un material dado es una característica importante del material. Para obtener el diagrama de esfuerzo-deformación de un material, comúnmente se lleva a cabo un *ensayo o prueba de tensión* sobre una probeta del material. El tipo de probeta más utilizado se muestra en la figura 2.6. El área de la sección transversal de la sección cilíndrica central de la probeta se ha determinado exactamente y se han hecho dos marcas de calibración en dicha porción a una separación de L_0. La distancia L_0 se conoce como la *longitud* base de la probeta.

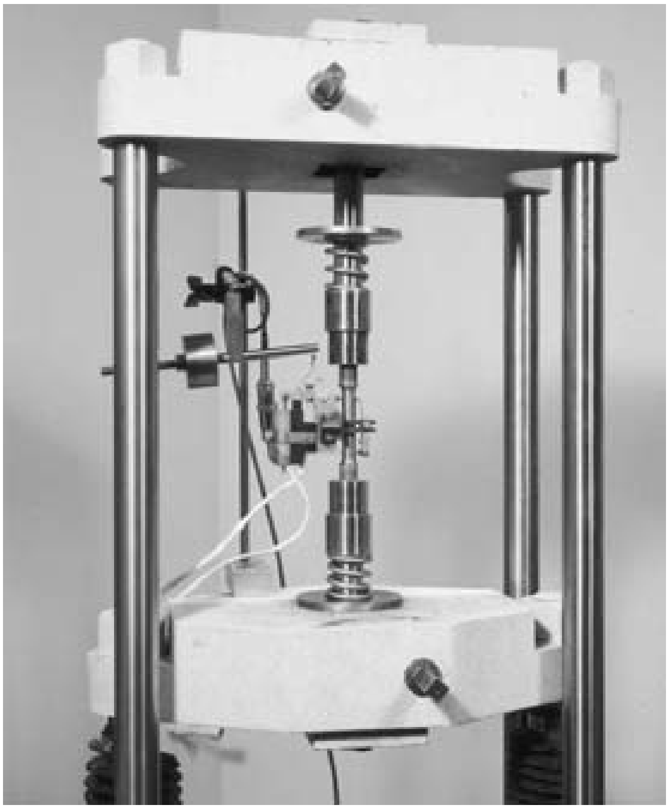


Figura 2.7 Esta máquina se emplea para realizar pruebas a tensión en probeta, como las que se explican en este capítulo.

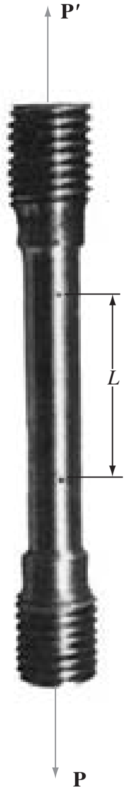
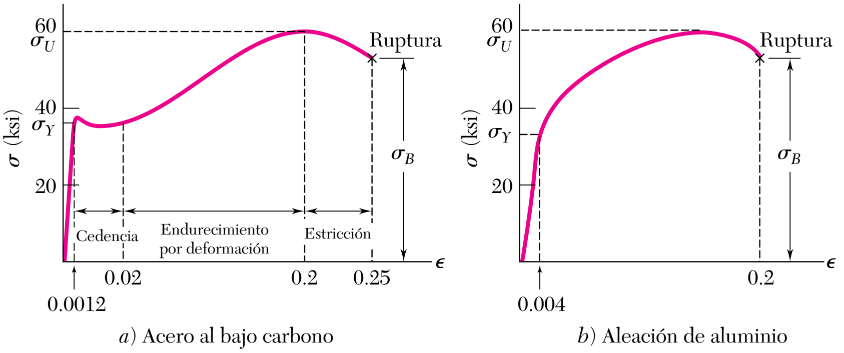


Figura 2.8 Probeta de prueba con carga de tensión.

La probeta se coloca en la máquina de ensayo (figura 2.7), que se usa para aplicar una carga centrada **P**. Al aumentar la carga **P**, también se incrementa la distancia L entre las dos marcas base de la probeta (figura 2.8). La distancia L se mide con un indicador de carátula, y el alargamiento $\delta = L - L_0$ se registra para cada valor de P. Con frecuencia un segundo indicador de carátula se emplea de manera simultánea para medir y registrar el cambio de diámetro del espécimen. Para cada par de lecturas P y δ, el esfuerzo σ se calcula dividiendo P entre el área original de la sección transversal A_0 del espécimen, y la deformación unitaria ϵ dividiendo el alargamiento δ entre la distancia original L_0 entre las dos marcas base de la probeta. Puede ahora obtenerse el diagrama de esfuerzo-deformación graficando ϵ como la abscisa y σ como la ordenada.

Los diagramas esfuerzo-deformación de los materiales varían en forma considerable, por lo que diferentes ensayos de tensión llevados a cabo sobre el mismo material pueden arrojar diferentes resultados, dependiendo de la temperatura de la probeta y de la velocidad de aplicación de la carga. Sin embargo, es posible distinguir algunas características comunes entre los diagramas esfuerzo-deformación de distintos grupos de materiales, y dividir los materiales en dos amplias categorías con base en estas características. Habrá así materiales *dúctiles* y materiales *frágiles*.

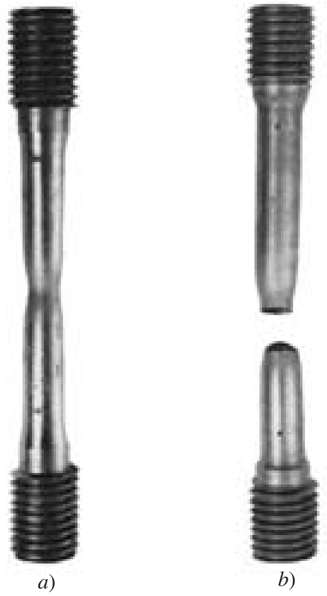
Los materiales dúctiles, como el acero estructural, así como muchas aleaciones de otros metales, se caracterizan por su capacidad de *fluir* a temperaturas normales. Al someterse la probeta a una carga que aumenta, su longitud se incrementa primero linealmente con la carga y a una tasa muy lenta. Así, la porción inicial del diagrama esfuerzo-deformación es una línea recta



a) Acero al bajo carbono

b) Aleación de aluminio

Figura 2.9 Diagramas esfuerzo-deformación de dos materiales dúctiles típicos.



a) b)

Figura 2.10 Probeta después del ensayo de un material dúctil.

con una pendiente pronunciada (figura 2.9). No obstante, después de alcanzar un valor crítico σ_Y del esfuerzo, la probeta experimenta una gran deformación con un incremento relativamente pequeño de la carga aplicada. Esta deformación es causada por el deslizamiento del material a lo largo de superficies oblicuas y se debe sobre todo a esfuerzos cortantes. Como puede notarse en los diagramas esfuerzo-deformación de dos materiales dúctiles típicos (figura 2.9), la elongación de la probeta después de que ha comenzado a fluir puede ser 200 veces más grande que su deformación anterior a la fluencia. Después de haber alcanzado un cierto valor máximo de carga, el diámetro de una porción del espécimen comienza a disminuir, debido a la inestabilidad local (figura 2.10*a*). Este fenómeno se conoce como *estricción*. Después de que comienza la estricción, son suficientes cargas algo menores para lograr que la probeta se alargue aún más, hasta que finalmente se fracture (figura 2.10*b*). Puede verse que la fractura ocurre a lo largo de una superficie con forma de cono que forma un ángulo de, aproximadamente, 45° con la superficie original de la probeta. Esto indica que el cortante es el principal responsable de la falla de los materiales dúctiles, y confirma el hecho de que, bajo una carga axial, los esfuerzos cortantes son máximos en las superficies que forman un ángulo de 45° con la carga (véase sección 1.11). El esfuerzo σ_Y en el que comienza la fluencia se llama la *resistencia o punto de fluencia o cedencia* del material, el esfuerzo σ_U que corresponde a la máxima carga aplicada al material se conoce como la *resistencia última* y el esfuerzo σ_B correspondiente a la fractura se denomina *resistencia a la fractura*.

Los materiales frágiles como el hierro colado, el vidrio y la piedra se caracterizan por el fenómeno de que la fractura ocurre sin un cambio notable previo de la tasa de alargamiento (figura 2.11). Así, para los materiales frágiles, no hay diferencia entre la resistencia última y la resistencia a la fractura. Además, la deformación unitaria al momento de la fractura es mucho menor para los materiales frágiles que para los materiales dúctiles. En la figura 2.12 se observa que no hay estricción alguna en el espécimen en el caso de un material frágil, y que la fractura ocurre a lo largo de una superficie perpendicular a la carga. Se concluye, a partir de esta observación, que los esfuerzos normales son los principales responsables de la falla de los materiales frágiles.†

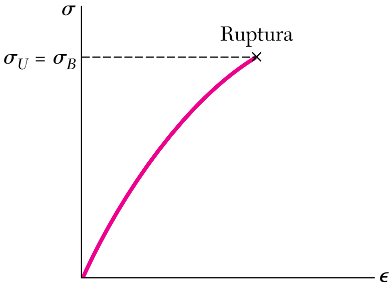


Figura 2.11 Diagrama esfuerzo-deformación para un material frágil típico.

---

† Se ha supuesto que los ensayos de tensión descritos en esta sección se efectuaron en temperaturas normales. Sin embargo, un material que es dúctil a temperaturas normales puede mostrar las características de un material frágil a muy bajas temperaturas, mientras que un material normalmente frágil puede comportarse de manera dúctil a muy altas temperaturas. A temperaturas distintas de la normal, por lo tanto, hay que referirse a *un material en estado dúctil* o a *un material en estado frágil*, más que a un material dúctil o frágil.

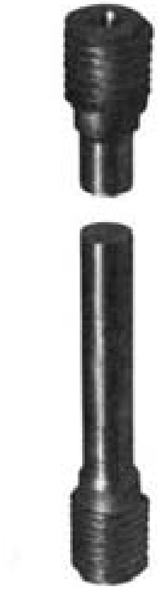


Figura 2.12 Probeta después de un ensayo de un material frágil.

Los diagramas esfuerzo-deformación de la figura 2.9 muestran que el acero estructural y el aluminio tienen distintas características de cedencia aunque ambos son dúctiles. En el caso del acero estructural (figura 2.9*a*), el esfuerzo permanece constante a lo largo de un gran rango de valores de deformación después de la aparición de la fluencia. Posteriormente debe incrementarse el esfuerzo para seguir alargando la probeta, hasta que se alcance el valor máximo σ_U. Esto se debe a la propiedad del material conocida como endurecimiento por deformación. La resistencia a la cedencia del acero estructural puede determinarse durante el ensayo de tensión vigilando la carga que se muestra en el indicador de la máquina de ensayo. Después de aumentar en forma estable, se observa que la carga decae en forma súbita a un valor ligeramente menor, que se mantiene por un cierto periodo mientras que la probeta continúa alargándose. En un ensayo realizado con cuidado, puede distinguirse entre el *punto superior de cedencia*, que corresponde a la carga alcanzada justo antes de que comience la fluencia, y el *punto inferior de cedencia*, que corresponde a la carga requerida para mantener la fluencia. Debido a que el punto superior de cedencia es transitorio, debe emplearse el punto inferior de cedencia para determinar la resistencia a la cedencia del material.

En el caso del aluminio (figura 2.9*b*) y de muchos otros materiales dúctiles, el inicio de la cedencia no se caracteriza por una porción horizontal de la curva de esfuerzo-deformación. En estos casos, el esfuerzo continúa aumentando, aunque no linealmente, hasta alcanzar la resistencia última. Comienza, entonces, la estricción, que conduce inevitablemente a la ruptura. Para tales materiales, la resistencia a la cedencia σ_Y se define por el método de desviación. La resistencia a la cedencia con una desviación del 0.2%, por ejemplo, se obtiene dibujando por el punto del eje horizontal de abscisa $\epsilon = 0.2\%$ (o $\epsilon = 0.002$), una línea paralela a la porción inicial en línea recta del diagrama de esfuerzo-deformación (figura 2.13). El esfuerzo σ_Y obtenido de esta manera corresponde al punto Y y se define como la resistencia a la cedencia a una desviación del 0.2%.

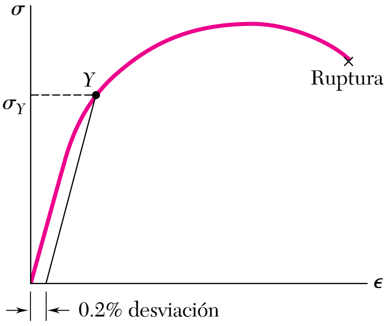


Figura 2.13 Determinación de la resistencia de cedencia por el método de desviación.

Una medida estándar de la ductilidad de un material es su *porcentaje de alargamiento*, que se define como

$$\text{Porcentaje de alargamiento} = 100\,\frac{L_B - L_0}{L_0}$$

donde L_0 y L_B denotan, respectivamente, la longitud inicial de la probeta para ensayo de tensión y su longitud final a la ruptura. El alargamiento mínimo especificado para una longitud calibrada de 2 in. para los aceros más usados con resistencias de fluencia de hasta 50 ksi es de 21%. Se nota que esto significa que la deformación a la fractura debería ser de, por lo menos, 0.21 in./in.

Otra medida de la ductilidad que en ocasiones se emplea es el *porcentaje de reducción de área*, definido como

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = 100\,\frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

donde A_0 y A_B denotan, respectivamente, el área inicial de la sección transversal de la probeta y su mínima área de sección transversal a la fractura. Para el acero estructural, es común encontrar porcentajes de reducción de área del 60 al 70%.

Hasta ahora, se han analizado sólo ensayos o pruebas de tensión. Si una probeta de material dúctil se cargara a compresión en lugar de tensión, la curva de esfuerzo-deformación que se obtendría sería esencialmente la misma a lo largo de su porción inicial en línea recta y del comienzo de la porción correspondiente a la cedencia y al endurecimiento por deformación. De relevancia particular es el hecho de que, para un acero dado, la resistencia a la fluencia es la misma tanto a tensión como a compresión. Para valores mayores de deformación, las curvas de esfuerzo-deformación a tensión y a compresión divergen, y deberá advertirse que no puede ocurrir estricción a compresión. Para la mayoría de los materiales dúctiles, se encuentra que la resistencia última a compresión es mucho mayor que la resistencia última a la tensión. Esto se debe a la presencia de fallas (por ejemplo, cavidades o grietas microscópicas) que tienden a debilitar al material a tensión, mientras que no afectan en forma significativa su resistencia a la compresión.

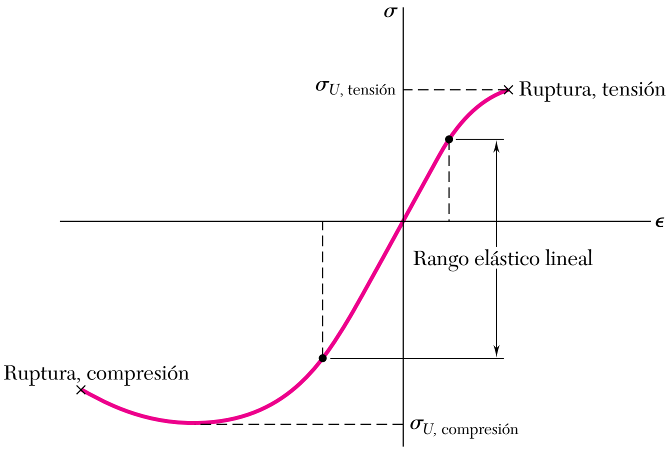


Figura 2.14 Diagrama esfuerzo-deformación para el concreto.

Un ejemplo de material frágil con diferentes propiedades a tensión y a compresión es el *concreto*, cuyo diagrama esfuerzo-deformación se muestra en la figura 2.14. En el lado de tensión del diagrama, primero se observa un rango elástico lineal en el que la deformación es proporcional al esfuerzo. Después de que se ha alcanzado el punto de cedencia, la deformación aumenta más rápidamente que el esfuerzo hasta que ocurre la fractura. El comportamiento del material bajo compresión es diferente. Primero, el rango elástico lineal es significativamente mayor. Segundo, la ruptura no ocurre cuando el esfuerzo alcanza su máximo valor. En lugar de esto, el esfuerzo decrece en magnitud mientras que la deformación plástica sigue aumentando hasta que la ruptura ocurre. Advierta que el módulo de elasticidad, representado por la pendiente de la curva de esfuerzo-deformación en su porción lineal, es la misma en tensión que en compresión. Esto es cierto para la mayoría de los materiales frágiles.

*2.4 ESFUERZO Y DEFORMACIÓN VERDADEROS

Recuerde que el esfuerzo graficado en los diagramas de las figuras 2.9 y 2.11 se obtuvo al dividir la carga P entre el área de sección transversal A_0 de la probeta medida antes de que hubiera tenido lugar alguna deformación. Como el área de la sección transversal de la probeta disminuye cuando aumenta P, el esfuerzo graficado en el diagrama no representa el esfuerzo real en la probeta. La diferencia entre el *esfuerzo ingenieril* $\sigma = P/A_0$ que se calculó y el *esfuerzo real* $\sigma_t = P/A$ obtenido de la división de P entre el área de la sección transversal A de la probeta deformada se vuelve aparente en los materiales dúctiles después de que ha aparecido la cedencia. En tanto que el esfuerzo ingenieril σ, que es directamente proporcional a la carga P, disminuye con P durante la fase de estricción, el esfuerzo real σ_t, que es proporcional a P pero también inversamente proporcional a A, puede verse que sigue aumentando hasta que la fractura de la probeta ocurre.

Muchos científicos utilizan una definición de deformación diferente de la *deformación ingenieril* $\epsilon = \delta/L_0$. En lugar de emplear la deformación total δ y el valor original de la longitud calibrada L_0, utilizan todos los valores sucesivos de L que han registrado. Dividiendo cada incremento de distancia ΔL de la distancia entre las marcas de calibración entre el valor correspondiente de L, se obtiene la deformación unitaria elemental $\Delta\epsilon = \Delta L/L$. Sumando los valores sucesivos de $\Delta\epsilon$, se define la *deformación unitaria real* ϵ_t:

$$\epsilon_t = \Sigma\Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L)$$

Al reemplazar la sumatoria por una integral, también puede expresarse la deformación unitaria real como:

$$\epsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \tag{2.3}$$

El diagrama obtenido al graficar el esfuerzo real contra la deformación unitaria real (figura 2.15) refleja con mayor exactitud el comportamiento del material. Como se ha advertido, no hay disminución del esfuerzo real durante la fase de estricción. Además, las gráficas obtenidas de los ensayos a ten-

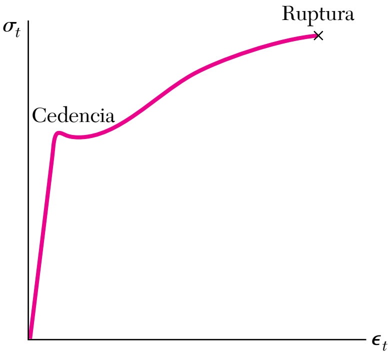


Figura 2.15 Esfuerzo real contra deformación real para un material dúctil típico.

sión y a compresión darán, en esencia, la misma gráfica cuando se utilizan el esfuerzo real y la deformación unitaria real. No ocurre lo mismo para valores grandes de la deformación unitaria cuando se grafica el esfuerzo ingenieril contra la deformación unitaria ingenieril. Sin embargo, los ingenieros, cuya responsabilidad es determinar si una carga P produce un esfuerzo aceptable y una deformación aceptable en un elemento dado, desearán utilizar un diagrama basado sobre el esfuerzo ingenieril $\sigma = P/A_0$ y sobre la deformación unitaria ingenieril $\epsilon = \delta/L_0$, ya que estas expresiones involucran datos disponibles para ellos, como el área de la sección transversal A_0 y la longitud L_0 del elemento en su estado sin deformar.

2.5 LEY DE HOOKE. MÓDULO DE ELASTICIDAD

La mayor parte de las estructuras de ingeniería se diseñan para sufrir deformaciones relativamente pequeñas, que involucran sólo la parte recta del diagrama de esfuerzo-deformación correspondiente. Para esta porción inicial del diagrama (figura 2.9), el esfuerzo σ es directamente proporcional a la deformación ϵ, y puede escribirse

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

Esta relación se conoce como *ley de Hooke*, llamada así en honor del matemático inglés Robert Hooke (1635-1703). El coeficiente E se denomina *módulo de elasticidad* del material involucrado o, también, *módulo de Young*, en honor del científico inglés Thomas Young (1773-1829). Como la deformación ϵ es una cantidad adimensional, el módulo E se expresa en las mismas unidades que el esfuerzo σ, es decir, en pascales o en uno de sus múltiplos si se emplean unidades del SI, y en psi o ksi si se emplean unidades americanas.

El máximo valor de esfuerzo para el que puede emplearse la ley de Hooke en un material dado se conoce como *límite de proporcionalidad* de ese material. En el caso de los materiales dúctiles que poseen un punto de cedencia bien definido, como en la figura 2.9*a*, el límite de proporcionalidad casi coincide con el punto de cedencia. Para otros materiales, el límite de proporcionalidad no puede definirse con tanta facilidad, ya que es difícil determinar con exactitud el valor del esfuerzo σ para el que la relación entre σ y ϵ deja de ser lineal. Pero esta dificultad misma indica que, en el caso de dichos materiales, emplear la ley de Hooke para valores apenas mayores que el límite real de proporcionalidad no conducirá a ningún error significativo.

Algunas de las propiedades físicas de los metales estructurales, como resistencia, ductilidad y resistencia a la corrosión, pueden verse muy afectadas debido a causas como la aleación, el tratamiento térmico y el proceso de manufactura empleado. Por ejemplo, se observa en los diagramas de esfuerzo-deformación del hierro puro y de tres diferentes grados de acero (figura 2.16) que grandes variaciones en la resistencia a la fluencia, la resistencia última y la deformación unitaria final (ductilidad) existen entre estos cuatro metales. Todos ellos, sin embargo, poseen el mismo módulo de elasticidad; en otras palabras, su "rigidez" o capacidad para resistir una deformación dentro del rango lineal es la misma. Por lo tanto, si en una estructura dada un acero de alta resistencia sustituye a uno de menor resistencia, y si todas las dimensiones permanecen iguales, la estructura tendrá un incremento en su capacidad de carga, pero su rigidez permanecerá sin cambio.

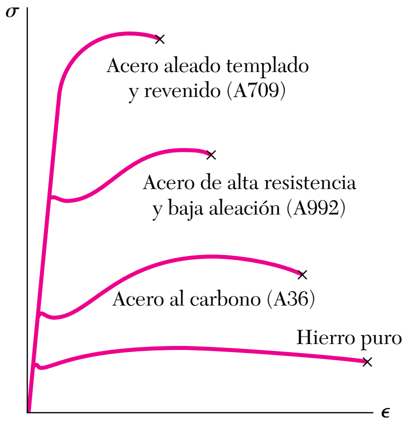


Figura 2.16 Diagramas esfuerzo-deformación para el hierro y para diversos grados de acero.

Para cada uno de los materiales considerados hasta ahora, la relación entre el esfuerzo normal y la deformación normal, $\sigma = E\epsilon$, es independiente de la dirección de la carga. Esto se debe a que las propiedades mecánicas de cada material, incluyendo su módulo de elasticidad E, son independientes de la dirección considerada. Se dice que tales materiales son *isotrópicos*. Los materiales cuyas propiedades dependen de la dirección considerada se conocen como *anisotrópicos*. Una clase importante de materiales anisotrópicos está formada por los *materiales compuestos reforzados con fibras*.

Estos materiales compuestos se obtienen encapsulando fibras de un material resistente y rígido en un material más débil y blando, conocido como *matriz*. Los materiales más empleados como fibras son el grafito, el vidrio y los polímeros, en tanto que varios tipos de resinas se emplean como matrices. La figura 2.17 muestra una capa, o *lámina*, de un material compuesto que consiste en un gran número de fibras paralelas encapsuladas en una matriz. Una carga axial aplicada a la lámina a lo largo del eje x, es decir, en la dirección paralela a las fibras, creará un esfuerzo normal σ_x en la lámina y su correspondiente deformación unitaria ϵ_x, que satisfarán la ley de Hooke al aumentarse la carga y en tanto no se alcance el límite elástico de la lámina. De manera similar, una carga axial aplicada a lo largo del eje y, esto es, en una dirección perpendicular a la lámina, creará un esfuerzo normal σ_y y una deformación unitaria normal ϵ_y que satisfacen la ley de Hooke, y una carga axial aplicada a lo largo del eje z creará un esfuerzo normal σ_z y una deformación normal ϵ_z, que nuevamente satisfarán la ley de Hooke. No obstante, los módulos de elasticidad E_x, E_y y E_z correspondientes, respectivamente, a cada una de las anteriores situaciones de carga, serán diferentes. Debido a que las fibras están paralelas al eje x, la lámina ofrecerá una resistencia mucho mayor a la carga dirigida a lo largo del eje x que a la dirigida a lo largo de los ejes y o z, y E_x será mucho mayor que E_y o que E_z.

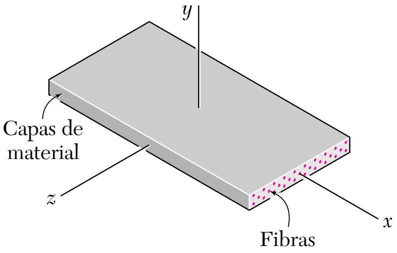


Figura 2.17 Capa de material compuesto reforzado con fibras.

Un *laminado* plano se obtiene superponiendo un número de capas o láminas. Si el laminado será sometido sólo a carga axial que cause tensión, las fibras en todas las capas deberán tener la misma orientación que la carga para obtener la máxima resistencia posible. Pero si el laminado puede estar en compresión, el material de la matriz puede no ser tan fuerte como para evitar que las fibras se tuerzan o pandeen. La estabilidad lateral del laminado puede entonces incrementarse colocando algunas de las capas de tal manera que sus fibras queden perpendiculares a la carga. También es posible colocar algunas capas para que sus fibras estén orientadas a 30°, 45° o 60° a la carga a fin de incrementar la resistencia del laminado al cortante en el plano. Los materiales compuestos reforzados con fibras serán analizados con mayor detalle en la sección 2.16, donde se considerará su comportamiento ante cargas multiaxiales.

2.6 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO CONTRA COMPORTAMIENTO PLÁSTICO DE UN MATERIAL

Si las deformaciones causadas en una probeta por la aplicación de una carga dada desaparecen cuando se retira la carga, se dice que el material se comporta *elásticamente*. El máximo valor de esfuerzo para el que el material se comporta elásticamente se denomina el *límite elástico* del material.

Si el material tiene un punto de cedencia bien definido como en la figura 2.9*a*, el límite elástico, el límite de proporcionalidad (véase sección 2.5) y el punto de cedencia o punto de fluencia son esencialmente los mismos.

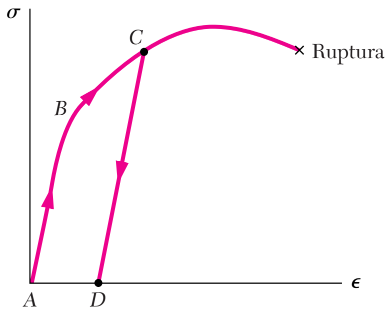


Figura 2.18

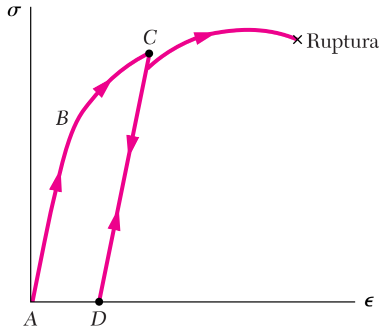


Figura 2.19

En otras palabras, el material se comporta elástica y linealmente mientras el esfuerzo se mantenga por debajo del punto de cedencia. Si se alcanza el punto de cedencia, sin embargo, ésta ocurre como se describió en la sección 2.3 y, al retirar la carga, el esfuerzo y la deformación unitaria disminuyen de manera lineal, a lo largo de una línea *CD* paralela a la parte recta *AB* de la curva de carga (figura 2.18). Si ϵ no regresa a cero después de que la carga ha sido retirada indica que ha ocurrido una *deformación permanente* o *deformación plástica* en el material. Para la mayor parte de los materiales, la deformación plástica depende no tan sólo del máximo valor alcanzado por el esfuerzo, sino también del tiempo que pasa antes de que se retire la carga. La parte dependiente del esfuerzo de la deformación plástica se denomina *deslizamiento*, y la parte dependiente del tiempo, que también depende de la temperatura, se llama *termoelasticidad*.

Cuando un material no posee un punto de cedencia bien definido, el límite elástico no puede determinarse con precisión. Sin embargo, suponer que el límite elástico es igual a la resistencia a la fluencia, como se ha definido por el método de desviación (sección 2.3), genera un pequeño error. De hecho, haciendo referencia a la figura 2.13, observamos que la línea recta usada para determinar el punto *Y* también representa la curva de descarga después de haber alcanzado un esfuerzo máximo σ_Y. A pesar de que el material no se comporta de una manera verdaderamente elástica, la deformación plástica resultante es tan pequeña como la desviación elegida.

Si, después de ser cargada y descargada (véase figura 2.19), la probeta se carga de nuevo, la nueva curva de carga seguirá muy de cerca la anterior curva hasta que casi alcance el punto *C*; entonces, se doblará a la derecha y se conectará con la porción curva del diagrama de esfuerzo-deformación original. Note que la parte recta de la nueva curva de carga es más larga que la correspondiente a la curva inicial. Así, el límite de proporcionalidad y el límite elástico han aumentado como resultado del endurecimiento por deformación ocurrido durante la anterior carga de la probeta. Sin embargo, ya que el punto de ruptura *R* permanece sin cambio, la ductilidad de la probeta, que ahora deberá medirse desde el punto *D*, ha disminuido.

Se ha supuesto en este análisis que la probeta fue cargada dos veces en la misma dirección, es decir, que ambas cargas fueron de tensión. Considere ahora el caso en que la segunda carga se aplica en una dirección opuesta a la primera.

Suponga que el material es acero dulce, para el cual el punto de cedencia es el mismo a tensión y a compresión. La carga inicial es de tensión y se aplica hasta que se alcanza el punto *C* en el diagrama de esfuerzo-deformación (figura 2.20). Después de descargar (punto *D*), se aplica una carga de compresión, la cual provoca que el material alcance el punto *H*, donde el esfuerzo es igual a $-\sigma_Y$. Se advierte que la porción *DH* del diagrama esfuerzo-deformación es curva y no muestra ningún punto de cedencia bien definido. A esto se le conoce como *efecto Bauschinger*. Al mantenerse la carga de compresión, el material fluye a lo largo de la línea *HJ*.

Si la carga se retira después de alcanzar el punto *J*, el esfuerzo retorna a cero a lo largo de la línea *JK*, y se observa que la pendiente de *JK* es igual al módulo de elasticidad *E*. La deformación permanente resultante *AK* será positiva, negativa o cero, dependiendo de las longitudes de los segmentos *BC* y *HJ*. Si una carga de tensión se aplica de nuevo a la probeta, la porción del diagrama esfuerzo-deformación que comienza en *K* (línea punteada) se curvará hacia arriba y hacia la derecha hasta que se alcance el esfuerzo de fluencia σ_Y.

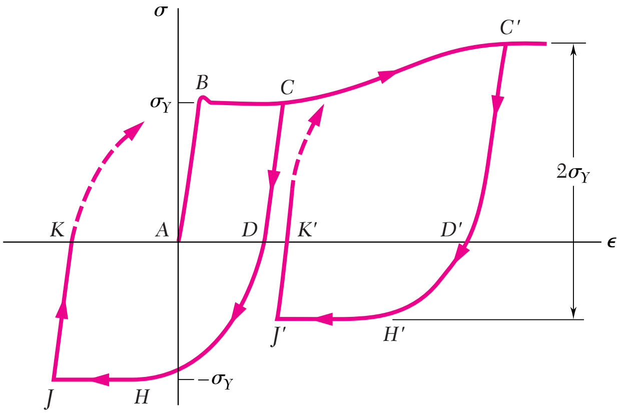


Figura 2.20

Si la carga inicial es lo suficientemente grande para causar el endurecimiento por deformación del material (punto C'), la descarga ocurre a lo largo de la línea $C'D'$. Al aplicarse la carga inversa, el esfuerzo se vuelve de compresión, alcanzando su valor máximo en H' y manteniéndolo mientras el material fluye a lo largo de la línea $H'J'$. Advierta que, en tanto que el máximo valor para el esfuerzo de compresión es menor que σ_Y, el cambio total en esfuerzo entre C' y H' es aún igual a $2\sigma_Y$.

Si el punto K o K' coincide con el origen A del diagrama, la deformación permanente es igual a cero, y parecerá que la probeta ha regresado a su condición original. No obstante, habrán ocurrido cambios internos y, aun cuando la misma secuencia de carga pueda repetirse, la probeta se fracturará sin advertencia previa después de algunas repeticiones. Esto indica que las excesivas deformaciones plásticas a las que ha sido sometida la probeta han causado un cambio radical en las características del material. Las cargas inversas dentro del rango plástico, por lo tanto, rara vez se permiten, por lo que sólo se realizan en condiciones controladas. Tales situaciones ocurren en el enderezado de materiales dañados y en el alineamiento final de una estructura o máquina.

2.7 CARGAS REPETIDAS. FATIGA

En las secciones precedentes se ha considerado el comportamiento de una probeta sujeta a carga axial. Recuerde que, si el esfuerzo máximo en la probeta no excede el límite elástico del material, la probeta regresa a sus condiciones iniciales cuando se retira la carga. Podría concluirse que una carga dada puede repetirse muchas veces, siempre y cuando los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico. Tal conclusión es correcta para cargas que se repiten unas cuantas docenas o aun centenares de veces. Sin embargo, como se verá, no es correcta cuando las cargas se repiten millares o millones de veces. En tales casos, la fractura ocurrirá aun cuando el esfuerzo sea mucho más bajo que la resistencia estática a la fractura. Este fenómeno se conoce como *fatiga*. Una falla de fatiga es de naturaleza frágil, aun para materiales normalmente dúctiles.

La fatiga debe ser considerada en el diseño de todos los elementos estructurales y de máquinas que se encuentren sujetos a cargas repetitivas o fluctuantes. El número de ciclos de carga que puede esperarse durante la vida útil del componente varía mucho. Por ejemplo, una viga que soporta a una grúa industrial puede cargarse hasta dos millones de veces en 25 años (alrededor de 300 cargas por día de trabajo), el cigüeñal de un automóvil será cargado alrededor de quinientos mil millones de veces si el automóvil opera a lo largo de 200 000 millas, y un álabe individual de una turbina podrá cargarse varios centenares de miles de millones de veces durante su vida.

Algunas cargas son de naturaleza fluctuante. Por ejemplo, el paso del tránsito sobre un puente causará niveles de esfuerzo que fluctuarán alrededor del nivel de esfuerzo debido al peso del puente. Una condición más severa sucede cuando se presenta una inversión completa de la carga durante el ciclo de carga. Los esfuerzos en el eje de un carro de ferrocarril, por ejemplo, se invierten completamente cada media revolución de la rueda.

El número de ciclos de carga necesarios para causar la falla de un espécimen a través de cargas sucesivas o cargas inversas repetidas puede determinarse experimentalmente para cualquier nivel dado de esfuerzo máximo. Si una serie de ensayos se lleva a cabo, utilizando diferentes niveles de esfuerzo máximo, los datos resultantes podrán graficarse como una curva σ-n. Para cada ensayo, el esfuerzo máximo σ es graficado en la ordenada y el número de ciclos n en la abscisa. Debido al gran número de ciclos n requerido para la ruptura, los ciclos n se grafican en una escala logarítmica.

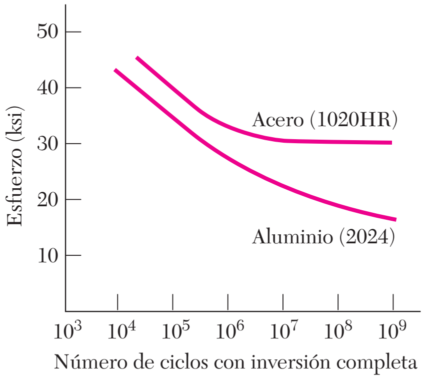


Figura 2.21

Una curva típica σ-n para el acero se muestra en la figura 2.21. Advierta que, si el esfuerzo máximo aplicado es alto, pocos ciclos, relativamente, se requieren para causar la ruptura. Al reducirse la magnitud del esfuerzo máximo, el número de ciclos requeridos para causar la ruptura aumenta hasta que se alcanza un esfuerzo denominado el *límite de resistencia o fatiga*. El límite de fatiga es el esfuerzo para el cual la falla no ocurre, aun cuando haya un número infinitamente grande de ciclos de carga. Para un acero al bajo carbono, como el acero estructural, el límite de fatiga es aproximadamente la mitad de su resistencia última.

Para metales no ferrosos, como el aluminio y el cobre, un diagrama típico σ-n (figura 2.21) muestra que el esfuerzo requerido para la falla continúa disminuyendo al aumentar el número de ciclos de carga. Para tales metales, el *límite de fatiga* se define como el esfuerzo que corresponde a la falla después de un número específico de ciclos de carga, tal como 500 millones.

El examen de especímenes de prueba, de ejes, de resortes y de otros componentes que han fallado por fatiga muestra que la falla se inició en una grieta microscópica o en otra imperfección similar. En cada carga, la grieta se agrandó ligeramente. Durante los sucesivos ciclos de carga, la grieta se propagó en el material hasta que la cantidad de material sin dañar fue insuficiente para soportar la carga máxima, y una falla frágil y abrupta ocurrió. Debido a que la falla por fatiga puede iniciarse en cualquier grieta o imperfección, la condición superficial del elemento tiene un efecto importante en el límite de tolerancia obtenido en el ensayo. El límite de fatiga para especímenes maquinados y pulidos es mayor que para componentes laminados o forjados, o para componentes corroídos. En aplicaciones para el mar o cercanas a él, o en otras aplicaciones donde se espera corrosión, se espera una reducción de hasta el 50% en el límite de fatiga.

2.8 DEFORMACIONES DE ELEMENTOS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

Considere una varilla homogénea BC de longitud L y sección transversal uniforme de área A sujeta a una carga axial centrada **P** (figura 2.22). Si el esfuerzo axial resultante $\sigma = P/A$ no excede el límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke y se escribe

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

de donde sigue que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \tag{2.5}$$

Recuerde que la deformación ϵ se definió en la sección 2.2 como $\epsilon = \delta/L$, se tiene que

$$\delta = \epsilon L \tag{2.6}$$

y sustituyendo ϵ de la ecuación (2.5) en la (2.6):

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

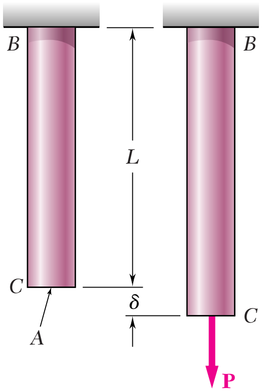


Figura 2.22

La ecuación (2.7) se usará sólo si la varilla es homogénea (E constante), tiene una sección transversal uniforme con área A y está cargada en sus extremos. Si la varilla está cargada en otros puntos, o si consta de varias porciones con distintas secciones transversales y, posiblemente, distintos materiales, debe dividirse en partes que satisfagan de manera individual las condiciones requeridas para la aplicación de la fórmula (2.7). Si, P_i, L_i, A_i y E_i representan, respectivamente, la fuerza interna, longitud, área de sección transversal y módulo de elasticidad que corresponden a la parte i, la deformación de la varilla entera será

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

Recuerde, de la sección 2.2, que en el caso de una varilla con sección transversal variable (figura 2.5), la deformación ϵ depende de la posición del punto Q donde se le calcula y se define como $\epsilon = d\delta/dx$. Despejando $d\delta$ y sustituyendo ϵ de la ecuación (2.5), la deformación de un elemento de longitud dx se expresa como

$$d\delta = \epsilon\, dx = \frac{P\, dx}{AE}$$

La deformación total δ de la varilla se obtiene al integrar esta expresión por la longitud L de la varilla:

$$\delta = \int_0^L \frac{P\, dx}{AE} \tag{2.9}$$

La fórmula (2.9) deberá emplearse en lugar de (2.7), no sólo cuando el área de la sección transversal A es una función de x, sino también cuando la fuerza interna P dependa de x, como es el caso de una varilla suspendida y sometida a la acción de su propio peso.

EJEMPLO 2.01

Determine la deformación de la varilla de acero mostrada en la figura 2.23*a* bajo las cargas dadas ($E = 29 \times 10^{-6}$ psi).

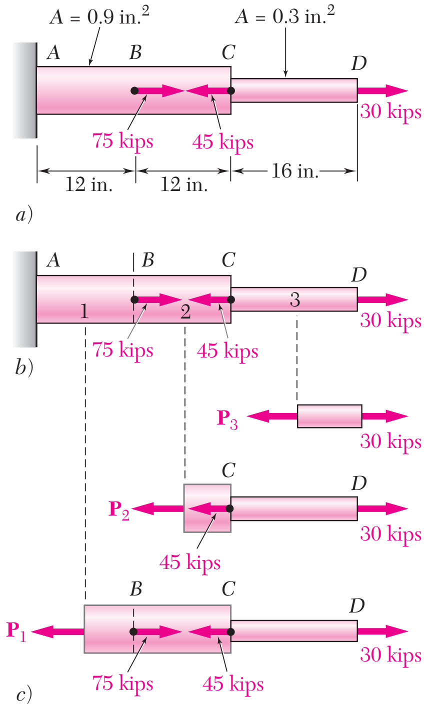


Figura 2.23

Se divide la varilla en tres partes (la figura 2.23*b*) y se tiene

$$L_1 = L_2 = 12 \text{ in.} \qquad L_3 = 16 \text{ in.}$$
$$A_1 = A_2 = 0.9 \text{ in.}^2 \qquad A_3 = 0.3 \text{ in.}^2$$

Para encontrar las fuerzas internas P_1, P_2 y P_3, se deben hacer cortes a través de cada una de las partes, dibujando cada vez un diagrama de cuerpo libre de la porción de la varilla localizada a la derecha de la sección (figura 2.23*c*). Expresando que cada uno de los cuerpos libres está en equilibrio, se obtiene sucesivamente

$$P_1 = 60 \text{ kips} = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_2 = -15 \text{ kips} = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_3 = 30 \text{ kips} = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

Llevando los valores obtenidos a la ecuación (2.8), se tiene que

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$
$$= \frac{1}{29 \times 10^6}\left[\frac{(60 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(-15 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3)(16)}{0.3}\right]$$
$$\delta = \frac{2.20 \times 10^6}{29 \times 10^6} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

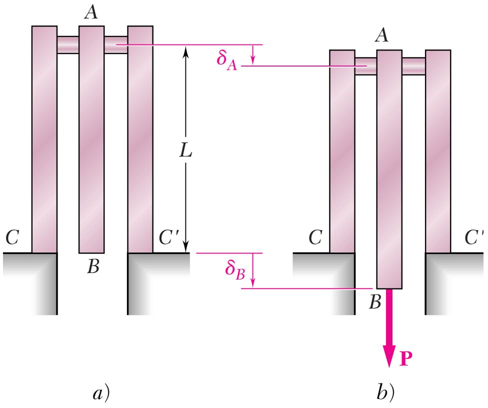
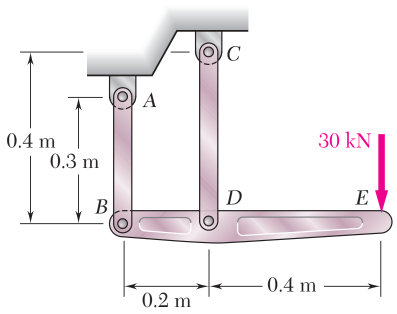


Figura 2.24

Tanto la varilla *BC* de la figura 2.22, que se utilizó para deducir la fórmula (2.7) como la varilla *AD* de la figura 2.23, que acaba de analizarse en el ejemplo 2.01, tenían un extremo sujeto a un soporte fijo. En cada caso, por lo tanto, la deformación δ de la varilla fue igual al desplazamiento de su extremo libre. Cuando ambos extremos de una varilla se mueven, sin embargo, la deformación de la varilla se mide por el *desplazamiento relativo* de un extremo de la varilla con respecto al otro. Considere, por ejemplo, el ensamble mostrado en la figura 2.24*a*, compuesto por tres barras elásticas de longitud *L* conectadas con un pasador rígido en *A*. Si una carga **P** se aplica en *B* (figura 2.24*b*), cada una de las tres barras se deformará. Como las barras *AC* y *AC*′ están unidas a soportes fijos en *C* y *C*′, su deformación común se mide por el desplazamiento δ_A del punto *A*. Por otra parte, ya que ambos extremos de la barra *AB* se mueven, la deformación de *AB* se mide por la diferencia entre los desplazamientos δ_A y δ_B de los puntos *A* y *B*, es decir, por el desplazamiento relativo de *B* con respecto a *A*. Denotando este desplazamiento relativo por $\delta_{B/A}$, se escribe

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \tag{2.10}$$

donde *A* es el área de la sección transversal *AB* y *E* es el módulo de elasticidad.

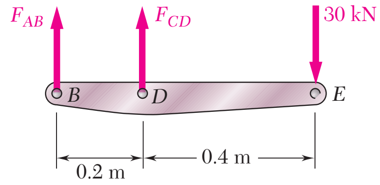

C
A
0.4 m
0.3 m
30 kN
B
D
E
0.2 m
0.4 m

PROBLEMA MODELO 2.1

La barra rígida *BDE* se soporta en dos eslabones *AB* y *CD*. El eslabón *AB* es hecho de aluminio ($E = 70$ GPa) y tiene un área de sección transversal de 500 mm^2; el eslabón *CD* es de acero ($E = 200$ GPa) y tiene un área de sección transversal de 600 mm^2. Para la fuerza mostrada de 30 kN, determine la deflexión *a*) de *B*, *b*) de *D*, *c*) de *E*.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: barra *BDE*

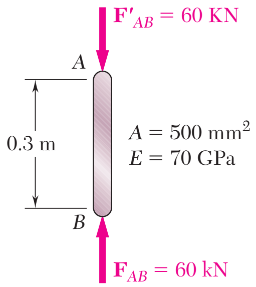

F_{AB}
F_{CD}
30 kN
B
D
E
0.2 m
0.4 m

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -(30\text{ kN})(0.6\text{ m}) + F_{CD}(0.2\text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN} \quad \textit{tensión}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad -(30\text{ kN})(0.4\text{ m}) - F_{AB}(0.2\text{ m}) = 0$$

$$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN} \quad \textit{compresión}$$

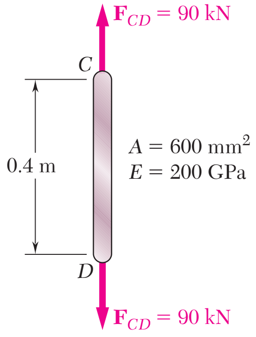

$\mathbf{F}'_{AB} = 60$ KN
A
0.3 m
$A = 500\text{ mm}^2$
$E = 70$ GPa
B
$\mathbf{F}_{AB} = 60$ kN

***a*) Deflexión de *B*.** Como la fuerza interna en el eslabón *AB* es compresiva, tenemos que $P = -60$ kN

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0.3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

El signo negativo indica una contracción del elemento *AB* y, por lo tanto, una deflexión hacia arriba de *B*:

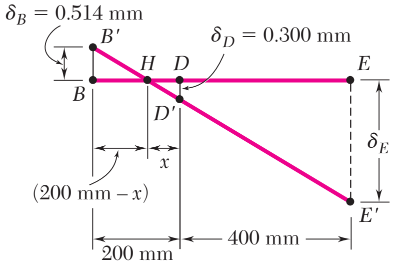
$$\delta_B = 0.514\text{ mm}\uparrow \blacktriangleleft$$


$\mathbf{F}_{CD} = 90$ kN
C
0.4 m
$A = 600\text{ mm}^2$
$E = 200$ GPa
D
$\mathbf{F}_{CD} = 90$ kN

***b*) Deflexión de *D*.** Como la varilla *CD*, $P = 90$ kN, se escribe

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\text{ N})(0.4\text{ m})}{(600 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(200 \times 10^9\text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\text{ m} \qquad \delta_D = 0.300\text{ mm}\downarrow \blacktriangleleft$$

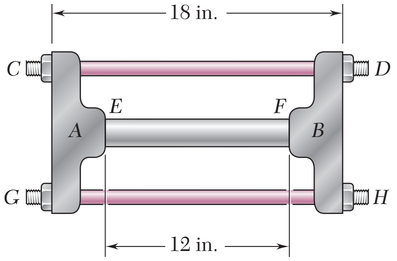

$\delta_B = 0.514$ mm
B'
$\delta_D = 0.300$ mm
H
D
E
B
D'
δ_E
x
(200 mm – x)
E'
200 mm
400 mm

***c*) Deflexión de *E*.** Se denota con *B*′ y *D*′ las posiciones desplazadas de los puntos *B* y *D*. Ya que la barra *BDE* es rígida, los puntos *B*′, *D*′ y *E*′ se encuentran en línea recta y se escribe:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0.514\text{ mm}}{0.300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73.7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0.300\text{ mm}} = \frac{(400\text{ mm}) + (73.7\text{ mm})}{73.7\text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928\text{ mm}\downarrow \blacktriangleleft$$

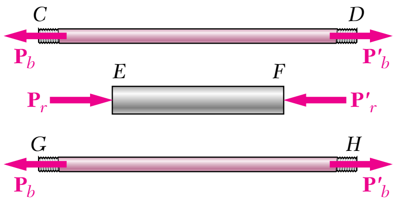


PROBLEMA MODELO 2.2

Las piezas de fundición rígidas A y B están conectadas por dos pernos de acero de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro CD y GH y se encuentran en contacto con los extremos de una varilla de aluminio de 1.5 in. de diámetro EF. Cada perno tiene una cuerda única con un paso de 0.1 in. y, después de ajustarse, las tuercas D y H se aprietan un cuarto de vuelta. Sabiendo que E es de 29×10^6 psi para el acero y 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine el esfuerzo normal en la varilla.

SOLUCIÓN

Deformaciones



Pernos CD y GH. Al apretar las tuercas se tensan los pernos. Debido a la simetría, ambas están sometidas a la misma fuerza interna P_b y sufren la misma deformación δ_b. Se tiene

$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(18 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ in.})^2(29 \times 10^6 \text{ psi})} = +1.405 \times 10^{-6} P_b \qquad (1)$$

Varilla EF. La varilla se encuentra en compresión. Si P_r es la magnitud de la fuerza en la varilla y δ_r es su deformación, se tiene que

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(12 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} = -0.6406 \times 10^{-6} P_r \qquad (2)$$

Desplazamiento de D relativo a B. Apretar las tuercas un cuarto de vuelta hace que los extremos D y H de los pernos sufran un desplazamiento de $\frac{1}{4}$(0.1 in.) relativo a la pieza B. Considerando el extremo D, se escribe

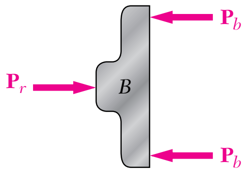
$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0.1 \text{ in.}) = 0.025 \text{ in.} \qquad (3)$$

Pero $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, donde δ_D y δ_B representan los desplazamientos de D y de B. Si se supone que la pieza A está sujeta en una posición fija mientras que las tuercas en D y en H se aprietan, estos desplazamientos son iguales a las deformaciones de los pernos y de la varilla, respectivamente. Se tiene, entonces,

$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \qquad (4)$$

Sustituyendo de las ecuaciones (1), (2) y (3) en la ecuación (4), se obtiene

$$0.025 \text{ in.} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} P_r \qquad (5)$$



Cuerpo libre: fundición *B*

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F = 0: \qquad P_r - 2P_b = 0 \qquad P_r = 2P_b \qquad (6)$$

Fuerzas en pernos y varillas

Sustituyendo P_r de la ecuación (6) en la (5), se tiene

$$\begin{aligned} 0.025 \text{ in.} &= 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6}(2P_b) \\ P_b &= 9.307 \times 10^3 \text{ lb} = 9.307 \text{ kips} \\ P_r &= 2P_b = 2(9.307 \text{ kips}) = 18.61 \text{ kips} \end{aligned}$$

Esfuerzo en la varilla

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{18.61 \text{ kips}}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2} \qquad \sigma_r = 10.53 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.1 Dos marcas de calibración se colocan a una separación exacta de 250 mm en una varilla de aluminio que tiene un diámetro de 12 mm. Si se sabe que al aplicar una carga axial de 6 000 N sobre la varilla, la distancia entre las marcas de calibración es de 250.18 mm, determine el módulo de elasticidad del aluminio usado en la varilla.

2.2 Una varilla de poliestireno de 12 in. de longitud y 0.5 in. de diámetro se somete a una carga de tensión de 800 lb. Si se sabe que $E = 0.45 \times 10^6$ psi, determine *a*) la elongación de la varilla, *b*) el esfuerzo normal en la varilla.

2.3 Un alambre de acero de 60 m de largo se sujeta a una carga de tensión de 6 kN. Si se sabe que $E = 200$ GPa y que la longitud del alambre aumenta 48 mm, determine *a*) el diámetro mínimo que puede seleccionarse para el alambre, *b*) el esfuerzo normal correspondiente.

2.4 Un alambre de acero de 28 ft de longitud y 0.25 in. de diámetro será empleado en un gancho. Se observa que el alambre se estira 0.45 in. cuando se le aplica una fuerza **P** de tensión. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) el esfuerzo normal correspondiente en el alambre.

2.5 Un tubo de hierro fundido se usa para soportar una carga de compresión. Si se sabe que $E = 69$ GPa y que el cambio permisible máximo en longitud es de 0.025%, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en el tubo, *b*) el grosor de pared mínimo para una carga de 7.2 kN si el diámetro exterior del tubo es de 50 mm.

2.6 Una varilla de control de latón amarillo no debe estirarse más de 3 mm cuando la tensión en el alambre es de 4 kN. Si se sabe que $E = 105$ GPa y que el máximo esfuerzo normal permisible es de 180 MPa, determine *a*) el diámetro mínimo que puede seleccionarse para la varilla, *b*) la longitud máxima correspondiente para la varilla.

2.7 Dos marcas de calibración se colocan a una separación exacta de 10 in. en una varilla de aluminio, que tiene un diámetro de $\frac{1}{2}$ in., con $E = 10.1 \times 10^6$ y una resistencia última de 16 ksi. Si se sabe que la distancia entre las marcas de calibración es de 10.009 in. después de que se aplica una carga, determine *a*) el esfuerzo en la varilla, *b*) el factor de seguridad.

2.8 Un alambre de 80 m de largo y 5 mm de diámetro está hecho de un acero con $E = 200$ GPa y una resistencia última a la tensión de 400 MPa. Si se desea un factor de seguridad de 3.2, determine *a*) la tensión máxima permisible en el alambre, *b*) la elongación correspondiente del alambre.

2.9 Un bloque de 250 mm de longitud y de 50×40 mm de sección transversal debe soportar una carga centrada a compresión **P**. El material que se empleará es un bronce para el que $E = 95$ GPa. Determine la carga máxima que puede aplicarse, si se sabe que el esfuerzo normal no debe exceder 80 MPa y que el decremento en longitud del bloque debe ser, cuanto mucho, de 0.12% de su longitud original.

2.10 Una varilla de aluminio de 1.5 m de largo no debe estirarse más de 1 mm y el esfuerzo normal no debe exceder los 40 MPa cuando la varilla está sujeta a una carga axial de 3 kN. Si se sabe que $E = 70$ GPa, determine el diámetro requerido para la varilla.

2.11 Una varilla de control de aluminio debe estirarse 0.08 in. cuando se le aplique una carga de tensión de 500 lb. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi y $E = 10.1 \times 10^6$ psi, determine el menor diámetro y la longitud más corta que puede seleccionarse para la varilla.

2.12 Una barra cuadrada de aluminio no debe estirarse más de 1.4 mm cuando se someta a una carga de tensión. Si se sabe que $E = 70$ GPa y que el esfuerzo permisible a tensión es de 120 MPa, determine *a*) la longitud máxima permisible de la barra, *b*) las dimensiones requeridas para la sección transversal si la carga de tensión es de 28 kN.

2.13 La varilla *BD* está hecha de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y se utiliza para reforzar al elemento axialmente comprimido *ABC*. La máxima fuerza que puede desarrollarse en el elemento *BD* es de 0.02*P*. Si el esfuerzo no debe exceder 18 ksi y el máximo cambio en longitud de *BD* no debe sobrepasar 0.001 veces la longitud de *ABC*, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para la varilla del elemento *BD*.

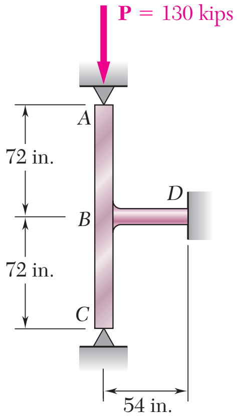


Figura P2.13

2.14 El cable *BC* de 4 mm de diámetro es de un acero con $E = 200$ GPa. Si se sabe que el máximo esfuerzo en el cable no debe exceder 190 MPa y que la elongación del cable no debe sobrepasar 6 mm, encuentre la carga máxima **P** que puede aplicarse como se muestra en la figura.

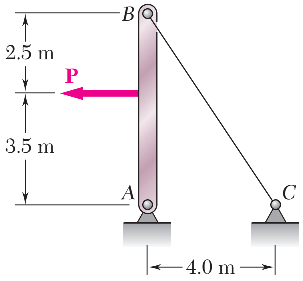


Figura P2.14

2.15 Un cilindro hueco de poliestireno ($E = 0.45 \times 10^6$ psi) con $\frac{1}{8}$ in. de grosor y una placa circular rígida (de la cual se muestra sólo una parte) se usan para soportar una varilla *AB* de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi), con una longitud de 10 in. y un diámetro de $\frac{1}{4}$ in. Si se aplica una carga **P** de 800 lb en *B*, determine *a*) la elongación de la varilla *AB*, *b*) la deflexión del punto *B*, *c*) el esfuerzo normal promedio en la varilla *AB*.

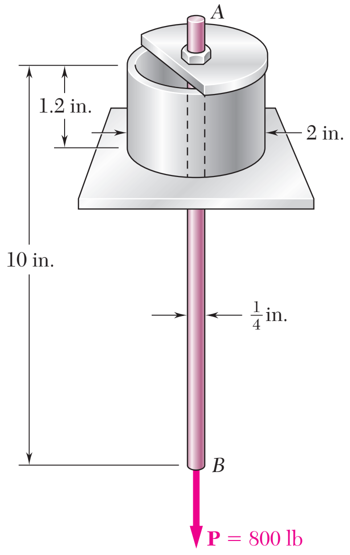


Figura P2.15

2.16 La probeta que se muestra en la figura está compuesta por una varilla cilíndrica de acero de 1 in. de diámetro y por dos soportes de 1.5 in. de diámetro exterior unidos a la varilla. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** tal que la deformación total sea de 0.002 in., *b*) la deformación correspondiente de la porción central *BC*.

2.17 Dos varillas cilíndricas están unidas en *B* y son sometidas a la carga que se muestra en la figura. La varilla *AB* está hecha de acero ($E = 200$ GPa) y la varilla *BC* de latón ($E = 105$ GPa). Determine *a*) la deformación total de la varilla compuesta *ABC*, *b*) la deflexión del punto *B*.

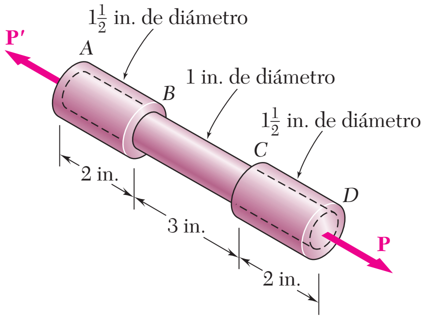

$1\frac{1}{2}$ in. de diámetro
P′
A
B
1 in. de diámetro
$1\frac{1}{2}$ in. de diámetro
C
D
2 in.
3 in.
2 in.
P

Figura P2.16

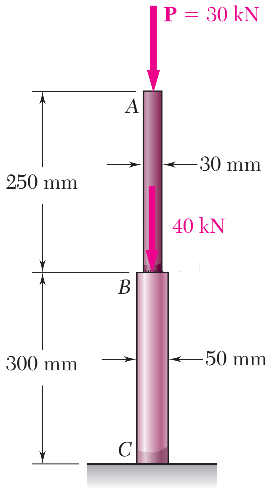

P = 30 kN
A
250 mm
30 mm
40 kN
B
300 mm
50 mm
C

Figura *P2.17*

2.18 Para la varilla compuesta del problema 2.17, determine *a*) la carga *P* tal que la deformación total de la varilla sea –0.2 mm, *b*) la deflexión correspondiente del punto *B*.

2.19 Las dos porciones de la varilla *ABC* están hechas de un aluminio para el que $E = 70$ GPa. Si se sabe que la magnitud de **P** es de 4 kN, encuentre *a*) el valor de **Q** para que la deflexión en *A* sea cero, *b*) la deflexión correspondiente de *B*.

2.20 La varilla *ABC* está hecha de un aluminio para el que $E = 70$ GPa. Si se sabe que $P = 6$ kN y que $Q = 42$ kN, determine la deflexión de *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

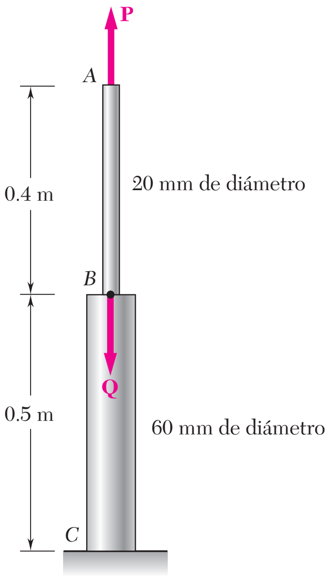

P
A
0.4 m
20 mm de diámetro
B
Q
0.5 m
60 mm de diámetro
C

Figura P2.19 y P2.20

2.21 Para la armadura de acero ($E = 200$ GPa) y la carga mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos *AB* y *AD*, si se sabe que sus respectivas áreas de sección transversal son de 2 400 mm^2 y 1 800 mm^2.

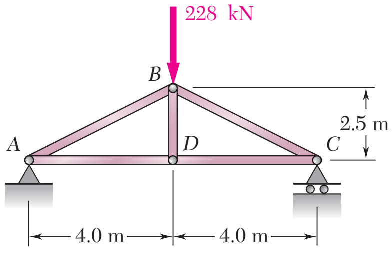

228 kN
B
A
D
C
2.5 m
4.0 m
4.0 m

Figura P2.21

2.22 Para la armadura de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y la carga mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos *BD* y *DE*, si se sabe que sus respectivas áreas de sección transversal son de 2 in.^{2} y 3 in.^{2}

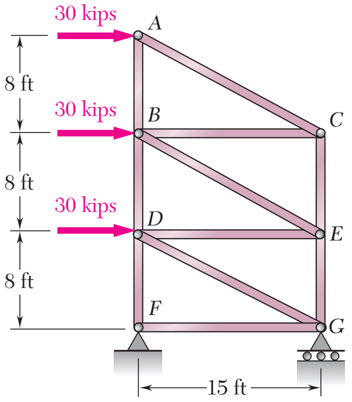


Figura ***P2.22***

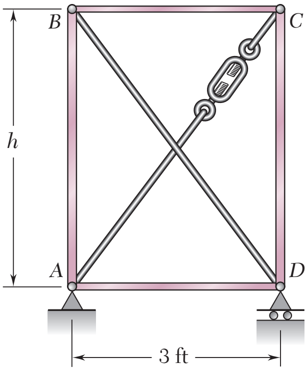


Figura P2.23

2.23 Los elementos *AB* y *CD* son varillas de acero de $1\frac{1}{8}$ in. de diámetro y los elementos *BC* y *AD* son varillas de acero de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro. Cuando se aprieta el tensor, el elemento diagonal *AC* se pone en tensión. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $h = 4$ ft, determine la tensión máxima permisible en *AC* para que las deformaciones en los elementos *AB* y *CD* no sobrepasen 0.04 in.

2.24 Para la estructura del problema 2.23, determine *a*) la distancia *h* para que las deformaciones en los elementos *AB*, *BC*, *CD* y *AD* sean iguales a 0.04 in. y *b*) la tensión correspondiente en el elemento *AC*.

2.25 Cada uno de los cuatro eslabones verticales que conectan los dos elementos horizontales que se muestran en la figura está hecho de aluminio ($E = 70$ GPa) y tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10×40 mm. Para la carga mostrada, determine la deflexión de *a*) el punto *E*, *b*) el punto *F* y *c*) el punto *G*.

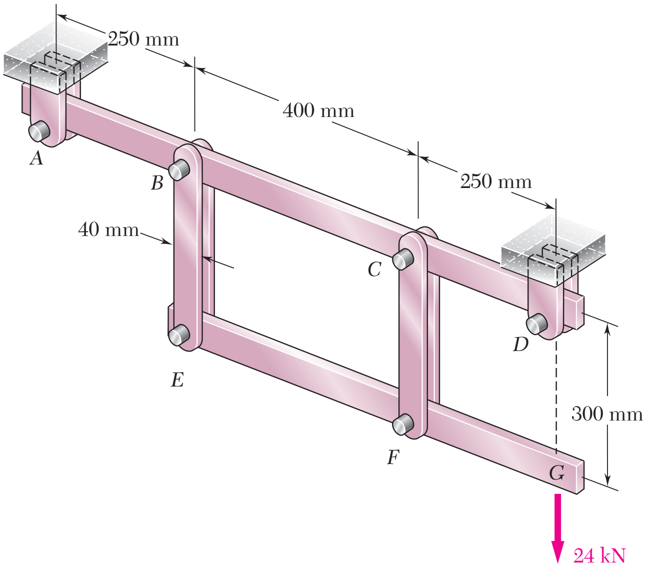


Figura P2.25

2.26 Los eslabones AB y CD están hechos de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y tienen una sección transversal rectangular uniforme de $\frac{1}{4} \times 1$ in. Determine la carga máxima que puede colgarse en el punto E si la deflexión de E no debe sobrepasar 0.01 in.

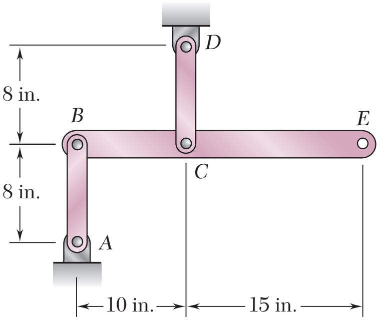


Figura *P2.26*

2.27 Cada uno de los eslabones AB y CD está hecho de aluminio ($E = 75$ GPa) y tienen un área de sección transversal de 125 mm^2. Si se sabe que soportan al elemento rígido BC, determine la deflexión del punto E.

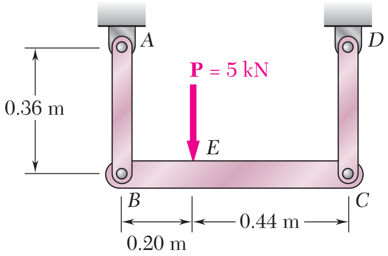


Figura P2.27

2.28 La longitud del alambre de acero de 2 mm de diámetro CD ha sido ajustada de forma que, si no se aplica ninguna carga, existe una distancia de 1.5 mm entre el extremo B de la viga rígida ACB y un punto de contacto E. Si se sabe que $E =$ 200 GPa, determine el sitio sobre la viga donde debe colocarse un bloque de 20 kg para provocar un contacto entre B y E.

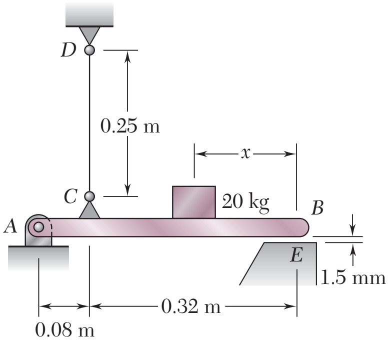


Figura P2.28

2.29 Un cable homogéneo de longitud L y sección transversal uniforme se cuelga de un extremo. *a*) Si se denota con ρ la densidad (masa por unidad de volumen) del cable y con E su módulo de elasticidad, determine la elongación que sufre el cable debido a su propio peso. *b*) Demuestre que para obtener la misma elongación debe aplicarse una fuerza igual a la mitad de su peso en cada uno de los extremos del cable en posición horizontal.

2.30 Una carga vertical **P** se aplica en el centro A de la sección superior de un cono truncado circular homogéneo con altura h, radio mínimo a y radio máximo b. Si se denota con E el módulo de elasticidad del material y se desprecia el efecto de su peso, determine la deflexión del punto A.

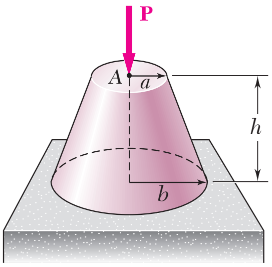


Figura P2.30

2.31 Si ϵ es la "deformación unitaria ingenieril" de un modelo en tensión, demuestre que la deformación unitaria real es $\epsilon_t = \ln(1 + \epsilon)$.

2.32 El volumen de un modelo de tensión es esencialmente constante mientras ocurre la deformación plástica. Si el diámetro inicial del modelo es d_1, demuestre que cuando el diámetro es d, la deformación unitaria real es $\epsilon_t = 2 \ln(d_1/d)$.

2.9 PROBLEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

En los problemas considerados en la sección precedente, siempre se puede emplear los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas internas producidas en las distintas porciones de un elemento bajo unas condiciones dadas de carga. Los valores obtenidos de las fuerzas internas luego fueron introducidos en la ecuación (2.8) o en la (2.9) para obtener la deformación del elemento.

Hay muchos problemas, sin embargo, en donde no es posible determinar las fuerzas internas usando sólo la estática. De hecho, en la mayoría de estos problemas las reacciones mismas, que son fuerzas externas, no pueden hallarse simplemente dibujando un diagrama de cuerpo libre del elemento y escribiendo las correspondientes ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con relaciones que involucran las deformaciones obtenidas considerando la geometría del problema. Debido a que la estática no es suficiente para determinar las reacciones o las fuerzas internas, los problemas de este tipo se conocen como *estáticamente indeterminados*. Los siguientes ejemplos mostrarán cómo manejar este tipo de problemas.

EJEMPLO 2.02

Una varilla de longitud L, área de sección transversal A_1 y módulo de elasticidad E_1, se ha colocado dentro de un tubo con la misma longitud L, pero de área de sección transversal L_2 y módulo de elasticidad E_2 (figura 2.25*a*). ¿Cuál es la deformación de la varilla y del tubo cuando una fuerza **P** se ejerce en la placa rígida del extremo como se muestra en la figura?

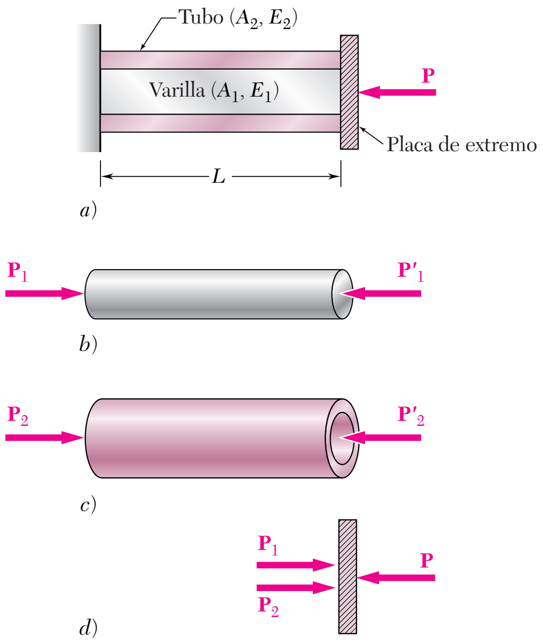


Figura 2.25

Con P_1 y P_2, respectivamente, las fuerzas axiales en la varilla y en el tubo, se dibujan diagramas de cuerpo libre de los tres elementos (figura 2.25*b*, *c* y *d*). Sólo el último de los diagramas da información significativa:

$$P_1 + P_2 = P \tag{2.11}$$

Es claro que una ecuación no es suficiente para determinar las dos fuerzas internas desconocidas P_1 y P_2. El problema es estáticamente indeterminado.

No obstante, la geometría del problema muestra que las deformaciones δ_1 y δ_2 de la varilla y del tubo deben ser iguales. Tomando en cuenta la ecuación (2.7), se escribe

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \qquad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \tag{2.12}$$

Igualando las deformaciones δ_1 y δ_2, se obtiene:

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \tag{2.13}$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.13) pueden resolverse simultáneamente para obtener P_1 y P_2:

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Cualquiera de las ecuaciones (2.12) podrá emplearse para determinar la deformación común de la varilla y del tubo.

EJEMPLO 2.03

Una barra *AB* de longitud *L* y sección transversal uniforme se sujeta a soportes rígidos en *A* y *B* antes de cargarse. ¿Cuáles son los esfuerzos en las porciones *AC* y *BC* debido a la aplicación de la carga *P* en el punto *C* (figura 2.26*a*)?

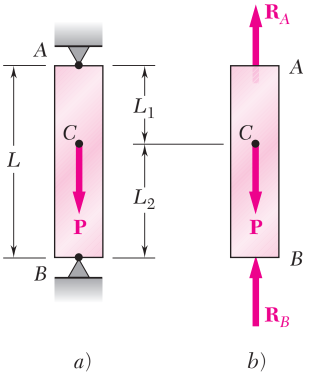


Figura 2.26

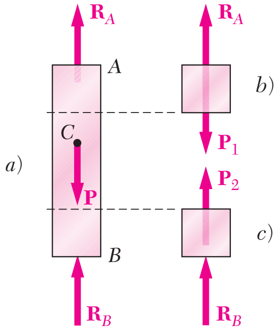


Figura 2.27

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.26*b*), se obtiene la ecuación de equilibrio

$$R_A + R_B = P \tag{2.14}$$

Ya que esta ecuación no es suficiente para determinar las dos reacciones desconocidas R_A y R_B, el problema es estáticamente indeterminado.

Sin embargo, las reacciones pueden determinarse si se observa de la geometría que el alargamiento total de la barra δ debe ser cero. Denotando con δ_1 y δ_2, respectivamente, los alargamientos de las porciones *AC* y *BC*, escribimos

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

o, expresando δ_1 y δ_2 en términos de las fuerzas internas correspondientes P_1 y P_2:

$$\delta = \frac{P_1L_1}{AE} + \frac{P_2L_2}{AE} = 0 \tag{2.15}$$

Se advierte de los diagramas de cuerpo libre mostrados respectivamente en las partes *b*) y *c*) de la figura 2.27 que $P_1 = R_A$ y $P_2 = -R_B$. Al llevar estos valores a la ecuación (2.15), se escribe

$$R_AL_1 - R_BL_2 = 0 \tag{2.16}$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.16) pueden resolverse simultáneamente para R_A y R_B; se obtiene $R_A = PL_2/L$ y $R_B = PL_1/L$. Los esfuerzos deseados σ_1 en *AC* y σ_2 en *BC* se obtienen dividiendo, respectivamente, $P_1 = R_A$ y $P_2 = -R_B$ entre el área de sección transversal de la barra:

$$\sigma_1 = \frac{PL_2}{AL} \qquad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

Método de superposición. Se observa que una estructura es estáticamente indeterminada cuando está sostenida por más soportes de los necesarios para mantener su equilibrio. Esto da como resultado más reacciones desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles. A menudo es conveniente considerar una de las reacciones como *redundante* y eliminar el soporte correspondiente. Debido a que las condiciones dadas del problema no pueden cambiarse arbitrariamente, la reacción redundante debe mantenerse en la solución. Pero se considerará como una *carga desconocida* que, junto con las otras cargas, debe producir deformaciones compatibles con las restricciones originales. La solución real del problema se obtiene considerando, en forma separada, las deformaciones producidas por las cargas dadas y por la reacción redundante y sumando —o *superponiendo*— los resultados obtenidos.†

---

† Las condiciones generales bajo las que el efecto combinado de varias cargas puede obtenerse de esta manera se analizan en la sección 2.12.

EJEMPLO 2.04

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y la carga mostradas en la figura 2.28, suponiendo un ensamble ajustado en ambos apoyos antes de que se apliquen las cargas.

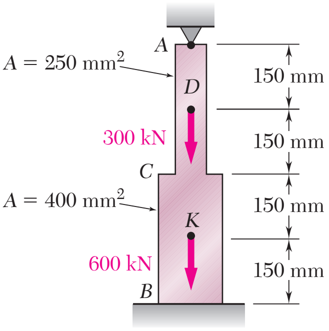
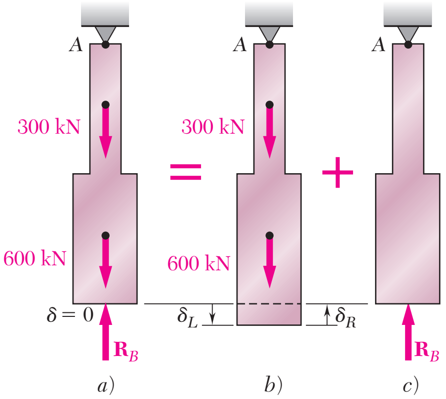


Figura 2.28

Considere la reacción en B como redundante y libere la barra de ese soporte. La reacción $\mathbf{R}_B$ se considera ahora como una carga desconocida (figura 2.29*a*) y se determinará a partir de la condición de que la deformación δ de la varilla debe ser igual a cero. La solución se obtiene considerando separadamente la deformación δ_L causada por las cargas dadas (figura 2.29*b*) y la deformación δ_R debida a la reacción redundante $\mathbf{R}_B$ (figura 2.29*c*).



a) *b*) *c*)

Figura 2.29

La deformación δ_L se obtiene de la ecuación (2.8) después de que la barra se divide en cuatro partes, como se muestra en la figura 2.30. Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.01, se tiene

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \qquad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$
$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \qquad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$$

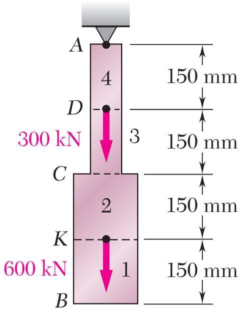


Figura 2.30

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.8), se obtiene

$$\delta_L = \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2}\right) \frac{0.150 \text{ m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1.125 \times 10^9}{E} \tag{2.17}$$

Considerando ahora la deformación δ_R debido a la reacción redundante R_B, se divide la barra en dos porciones, como se muestra en la figura 2.31, y se escribe

$$P_1 = P_2 = -R_B$$
$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \qquad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$
$$L_1 = L_2 = 0.300 \text{ m}$$

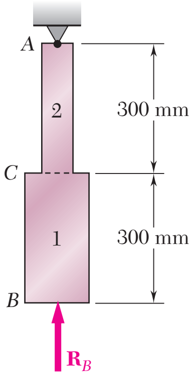


Figura 2.31

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.8), se obtiene

$$\delta_R = \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E} = -\frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} \qquad (2.18)$$

Expresando que la deformación total δ de la barra debe ser cero, se escribe

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \qquad (2.19)$$

y sustituyendo δ_L y δ_R de las ecuaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.19)

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} = 0$$

Despejando R_B, se tiene que

$$R_B = 577 \times 10^3\,\text{N} = 577\,\text{kN}$$

La reacción R_A en el soporte superior se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.32). Se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300\,\text{kN} - 600\,\text{kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900\,\text{kN} - R_B = 900\,\text{kN} - 577\,\text{kN} = 323\,\text{kN}$$

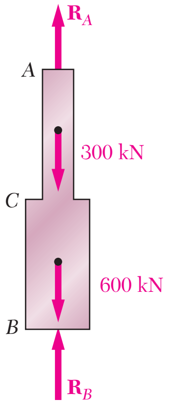


Figura 2.32

Una vez que las reacciones se han determinado, los esfuerzos y las deformaciones en la barra se obtienen fácilmente. Debe observarse que, aunque la deformación de la barra es cero, cada una de sus partes componentes *se deforma* bajo la carga y condiciones de restricción dadas.

EJEMPLO 2.05

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y carga del ejemplo 2.04, suponiendo ahora que existe un claro de 4.50 mm entre la barra y el piso antes de que se apliquen las cargas (figura 2.33). Suponga que $E = 200$ GPa.

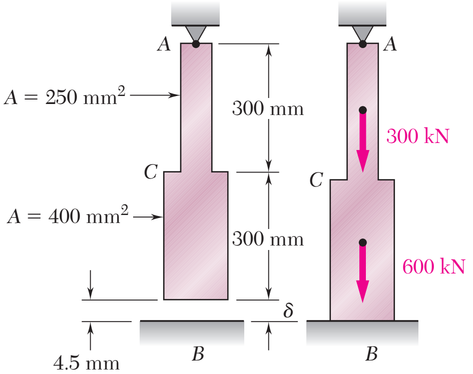


Figura 2.33

Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.04. Considerando la reacción en B como redundante, se calculan las deformaciones δ_L y δ_R causadas, respectivamente, por las cargas dadas y por la reacción redundante $\mathbf{R}_B$. Sin embargo, en este caso la deformación total no es cero, sino $\delta = 4.5$ mm. Por lo tanto, se escribe

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3}\,\text{m} \qquad (2.20)$$

Sustituyendo δ_L y δ_R de las ecuaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.20) y recordando que $E = 200\,\text{GPa} = 200 \times 10^9$ Pa, se tiene que

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

Despejando R_B, se obtiene

$$R_B = 115.4 \times 10^3\,\text{N} = 115.4\,\text{kN}$$

La reacción en A se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.32):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300\,\text{kN} - 600\,\text{kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900\,\text{kN} - R_B = 900\,\text{kN} - 115.4\,\text{kN} = 785\,\text{kN}$$

2.10 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN CAMBIOS DE TEMPERATURA

Se ha supuesto que todos los elementos y estructuras que hasta ahora se han considerado se mantienen a la misma temperatura cuando cargan. Ahora se estudiarán varias situaciones que involucran cambios de temperatura.

Primero considere la varilla homogénea AB con sección transversal uniforme, que descansa libremente en una superficie horizontal lisa (figura 2.34*a*). Si la temperatura de la varilla se eleva en ΔT, se observa que la varilla se alarga por una cantidad δ_T, que es proporcional tanto al cambio de temperatura ΔT como a la longitud L de la varilla (figura 2.34*b*). Se tiene que

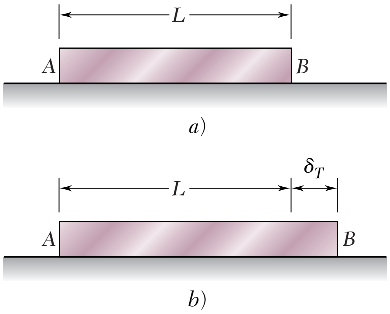


Figura 2.34

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.21}$$

donde α es una constante característica del material, llamada *coeficiente de expansión térmica*. Como δ_T y L se expresan ambas en unidades de longitud, α representa una cantidad *por grado C* o *por grado F*, dependiendo si el cambio de temperatura se expresa en grados Celsius o Fahrenheit.

Con la deformación δ_T debe asociarse una deformación $\epsilon_T = \delta_T/L$. Recordando la ecuación 2.21, se concluye que

$$\epsilon_T = \alpha\,\Delta T \tag{2.22}$$

La deformación ϵ_T se conoce como *deformación unitaria térmica*, ya que es causada por el cambio en la temperatura de la varilla. En el caso que consideramos aquí, *no existe esfuerzo asociado con la deformación* ϵ_T.

Ahora suponga que la misma varilla AB de longitud L se coloca entre dos soportes fijos a una distancia L uno del otro (figura 2.35*a*). Nuevamente, no existe esfuerzo ni deformación en esta condición inicial. Si se eleva la temperatura en ΔT, la varilla no puede alargarse debido a las restricciones impuestas en sus extremos; la elongación δ_T de la varilla es por lo tanto cero. Como la varilla es homogénea y de sección transversal uniforme, la deformación ϵ_T en cualquier punto es $\epsilon_T = \delta_T/L$ y, por lo tanto, también cero. Sin embargo, los soportes ejercerán fuerzas **P** y **P′** iguales y opuestas sobre la varilla después de que se haya elevado la temperatura, para evitar que se elongue (figura 2.35*b*). Se tiene, por lo tanto, que se crea un estado de esfuerzos (sin su correspondiente deformación) en la varilla.

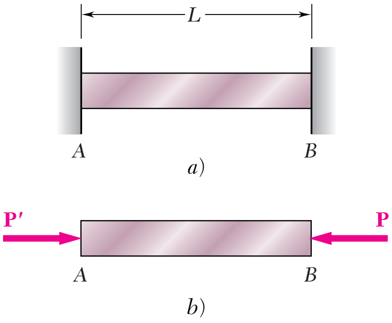


Figura 2.35

En la preparación para determinar el esfuerzo σ creado por el cambio de temperatura ΔT, se observa que el problema por resolver es estáticamente indeterminado. Por lo tanto, primero deberá calcularse la magnitud P de las reacciones en los soportes a partir de la condición de que la elongación de la varilla es cero. Utilizando el método de superposición descrito en la sección 2.9, se libera la varilla de su apoyo B (figura 2.36*a*) y se le permite alargarse libremente mientras sufre el cambio de temperatura ΔT (figura 2.36*b*). De acuerdo con la fórmula (2.21), el alargamiento correspondiente es

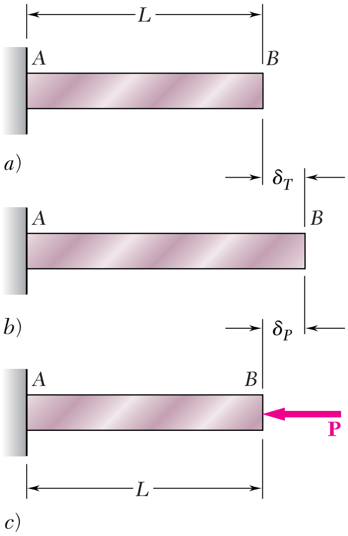


Figura 2.36

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Aplicando ahora al extremo B la fuerza **P** que representa la reacción redundante, y empleando la fórmula (2.7), se obtiene la segunda deformación (véase figura 2.36*c*)

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Expresando que la deformación total δ debe ser cero, se tiene

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

de donde se concluye que

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

y que el esfuerzo en la varilla debido al cambio de temperatura ΔT es

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T) \tag{2.23}$$

Debe recordarse que el resultado obtenido aquí y la anterior observación con respecto a la ausencia de deformación alguna en la varilla *sólo se aplican al caso de una varilla homogénea con sección transversal uniforme*. Cualquier otro problema que implique una estructura restringida sometida a un cambio de temperatura debe analizarse en las condiciones aplicables. Sin embargo, el mismo enfoque general puede usarse, es decir, es posible considerar, en forma separada, la deformación debida al cambio de temperatura y la debida a la reacción redundante y superponer las soluciones obtenidas.

EJEMPLO 2.06

Determine los valores del esfuerzo en las porciones AC y CB de la barra de acero mostrada en la figura 2.37 cuando la temperatura de la barra es de −50°F, sabiendo que existe un buen ajuste en ambos soportes rígidos cuando la temperatura es de +75°F. Utilice los valores de $E = 29 \times 10^6$ psi y $\alpha = 6.5 \times 10^6/°\text{F}$ para el acero.

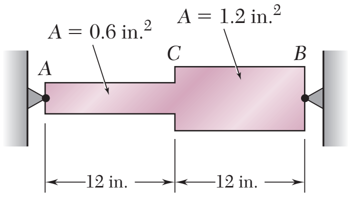


Figura 2.37

Primero se determinan las reacciones en los soportes. Como el problema es estáticamente indeterminado, se desprende la barra de su apoyo en b y se le deja pasar por el cambio de temperatura

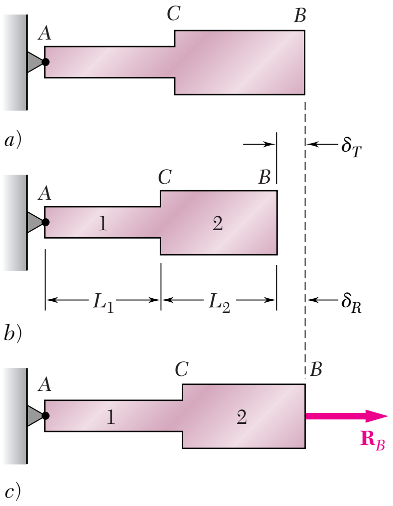


Figura 2.38

$$\Delta T = (-50°\text{F}) - (75°\text{F}) = -125°\text{F}$$

La deformación correspondiente (figura 2.38*b*) es

$$\begin{aligned}\delta_T &= \alpha(\Delta T)L = (6.5 \times 10^{-6}/°\text{F})(-125°\text{F})(24 \text{ in.})\\ &= -19.50 \times 10^{-3} \text{ in.}\end{aligned}$$

Aplicando ahora la fuerza desconocida $\mathbf{R}_B$ en el extremo B (figura 2.38*c*), se utiliza la ecuación (2.8) para expresar la deformación correspondiente δ_R. Sustituyendo

$$\begin{gathered}L_1 = L_2 = 12 \text{ in.}\\ A_1 = 0.6 \text{ in.}^2 \qquad A_2 = 1.2 \text{ in.}^2\\ P_1 = P_2 = R_B \qquad E = 29 \times 10^6 \text{ psi}\end{gathered}$$

en la ecuación (2.8), se escribe

$$\begin{aligned}\delta_R &= \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E}\\ &= \frac{R_B}{29 \times 10^6 \text{ psi}}\left(\frac{12 \text{ in.}}{0.6 \text{ in.}^2} + \frac{12 \text{ in.}}{1.2 \text{ in.}^2}\right)\\ &= (1.0345 \times 10^{-6} \text{ in./lb})R_B\end{aligned}$$

Expresando que la deformación total de la barra debe ser cero como resultado de las restricciones impuestas, se escribe

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_T + \delta_R = 0\\ &= -19.50 \times 10^{-3} \text{ in.} + (1.0345 \times 10^{-6} \text{ in./lb})R_B = 0\end{aligned}$$

de lo que se obtiene

$$R_B = 18.85 \times 10^3 \text{ lb} = 18.85 \text{ kips}$$

La reacción en A es igual y opuesta.

Note que las fuerzas en las dos porciones de la barra son $P_1 = P_2 = 18.85$ kips; se obtienen los siguientes valores de esfuerzo en las porciones AC y CB de la barra:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{P_1}{A_1} = \frac{18.85 \text{ kips}}{0.6 \text{ in.}^2} = +31.42 \text{ ksi}\\ \sigma_2 &= \frac{P_2}{A_2} = \frac{18.85 \text{ kips}}{1.2 \text{ in.}^2} = +15.71 \text{ ksi}\end{aligned}$$

No puede enfatizarse demasiado el hecho de que, a pesar de que la *deformación total* de la barra debe ser cero, ya que las deformaciones de las porciones AC y CB *no son cero*. Una solución para el problema basada en la suposición de que estas deformaciones son cero sería equivocada. Tampoco puede suponerse que los valores de la deformación unitaria en AC o en CB sean iguales a cero. Para ampliar este punto, determine la deformación ϵ_{AC} en la porción AC de la barra. La deformación ϵ_{AC} puede dividirse en dos partes; una es la deformación térmica ϵ_T producida en la barra sin restricciones por el cambio de temperatura Δ_T (figura 2.38*b*). De la ecuación (2.22) se escribe

$$\begin{aligned}\epsilon_T &= \alpha\,\Delta T = (6.5 \times 10^{-6}/°\text{F})(-125°\text{F})\\ &= -812.5 \times 10^{-6} \text{ in./in.}\end{aligned}$$

La otra componente de ϵ_{AC} se asocia con el esfuerzo σ_1 debido a la fuerza $\mathbf{R}_B$ aplicada a la barra (figura 2.38*c*). De la ley de Hooke, se expresa esta componente de la deformación como

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{+31.42 \times 10^3 \text{ psi}}{29 \times 10^6 \text{ psi}} = +1\,083.4 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Sumando las dos componentes de la deformación en AC, se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{AC} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -812.5 \times 10^{-6} + 1\,083.4 \times 10^{-6}\\ &= +271 \times 10^{-6} \text{ in./in.}\end{aligned}$$

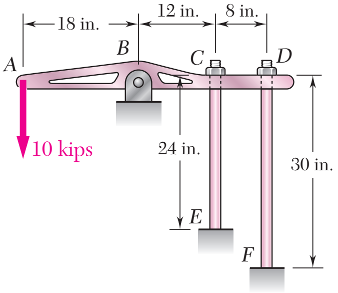
Un cálculo similar da la deformación de la porción CB de la barra:

$$\begin{aligned}\epsilon_{CB} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -812.5 \times 10^{-6} + 541.7 \times 10^{-6}\\ &= -271 \times 10^{-6} \text{ in./in.}\end{aligned}$$

Las deformaciones δ_{AC} y δ_{CB} de las dos porciones de la barra se expresan respectivamente como

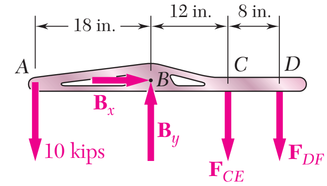
$$\begin{aligned}\delta_{AC} &= \epsilon_{AC}(AC) = (+271 \times 10^{-6})(12 \text{ in.})\\ &= +3.25 \times 10^{-3} \text{ in.}\\ \delta_{CB} &= \epsilon_{CB}(CB) = (-271 \times 10^{-6})(12 \text{ in.})\\ &= -3.25 \times 10^{-3} \text{ in.}\end{aligned}$$

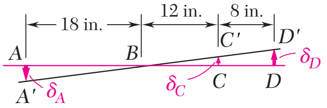
Puede así verificarse que, mientras que la suma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ de las dos deformaciones es cero, ninguna de ellas es cero.

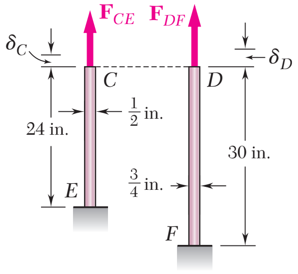


PROBLEMA MODELO 2.3

La varilla CE de $\frac{1}{2}$ in. de diámetro y la varilla DF de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro están unidas a la barra rígida $ABCD$ como se muestra en la figura. Sabiendo que las varillas son de aluminio y utilizando $E = 10.6 \times 10^6$ psi, determine *a*) la fuerza en cada varilla causada por la carga mostrada, *b*) la deflexión correspondiente en el punto A.







SOLUCIÓN

Estática. Considerando el cuerpo libre de la barra $ABCD$, se advierte que la reacción en B y las fuerzas ejercidas por las varillas son indeterminadas. Sin embargo, utilizando la estática, puede escribirse

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (10 \text{ kips})(18 \text{ in.}) - F_{CE}(12 \text{ in.}) - F_{DF}(20 \text{ in.}) = 0$$

$$12F_{CE} + 20F_{DF} = 180 \qquad (1)$$

Geometría. Después de la aplicación de la carga de 10 kips, la posición de la barra es $A'BC'D'$. De los triángulos semejantes BAA', BCC' y BDD', se tiene que

$$\frac{\delta_C}{12 \text{ in.}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in.}} \qquad \delta_C = 0.6\delta_D \qquad (2)$$

$$\frac{\delta_A}{18 \text{ in.}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in.}} \qquad \delta_A = 0.9\delta_D \qquad (3)$$

Deformaciones. Usando la ecuación (2.7), se tiene que

$$\delta_C = \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} \qquad \delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

Sustituyendo δ_C y δ_D en la ecuación (2), se escribe

$$\delta_C = 0.6\delta_D \qquad \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} = 0.6\frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

$$F_{CE} = 0.6\frac{L_{DF}}{L_{CE}}\frac{A_{CE}}{A_{DF}}F_{DF} = 0.6\left(\frac{30 \text{ in.}}{24 \text{ in.}}\right)\left[\frac{\frac{1}{4}\pi(\frac{1}{2}\text{ in.})^2}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4}\text{ in.})^2}\right]F_{DF} \qquad F_{CE} = 0.333F_{DF}$$

Fuerza en cada varilla. Sustituyendo F_{CE} en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que todas las fuerzas se han expresado en kips, se tiene que

$$12(0.333F_{DF}) + 20F_{DF} = 180 \qquad F_{DF} = 7.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

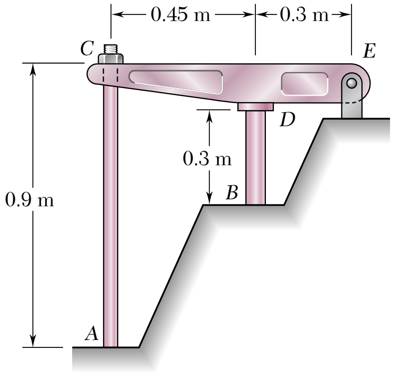
$$F_{CE} = 0.333F_{DF} = 0.333(7.50 \text{ kips}) \qquad F_{CE} = 2.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

Deflexiones. La deflexión del punto D es

$$\delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E} = \frac{(7.50 \times 10^3 \text{ lb})(30 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4}\text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \delta_D = 48.0 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

Utilizando la ecuación (3), se tiene

$$\delta_A = 0.9\delta_D = 0.9(48.0 \times 10^{-3} \text{ in.}) \qquad \delta_A = 43.2 \times 10^{-3} \text{ in.} \blacktriangleleft$$

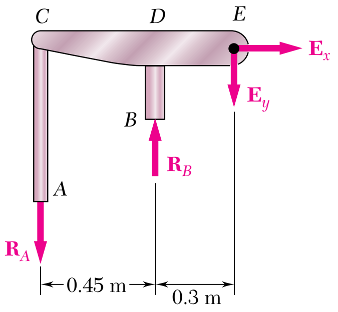


PROBLEMA MODELO 2.4

La barra rígida *CDE* está unida a un apoyo con pasador en *E* y descansa sobre el cilindro de latón de 30 mm de diámetro *BD*. Una varilla de acero de 22 mm de diámetro *AC* pasa a través de un agujero en la barra y está asegurada por una tuerca que se encuentra ajustada cuando todo el ensamble se encuentra a 20°C. La temperatura del cilindro de latón se eleva entonces a 50°C mientras que la varilla de acero permanece a 20°C. Suponiendo que no había esfuerzos presentes antes del cambio de temperatura, determine el esfuerzo en el cilindro.

Varilla *AC*: Acero	Cilindro *BD*: Latón
$E = 200$ GPa	$E = 105$ GPa
$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°\text{C}$	$\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/°\text{C}$

SOLUCIÓN



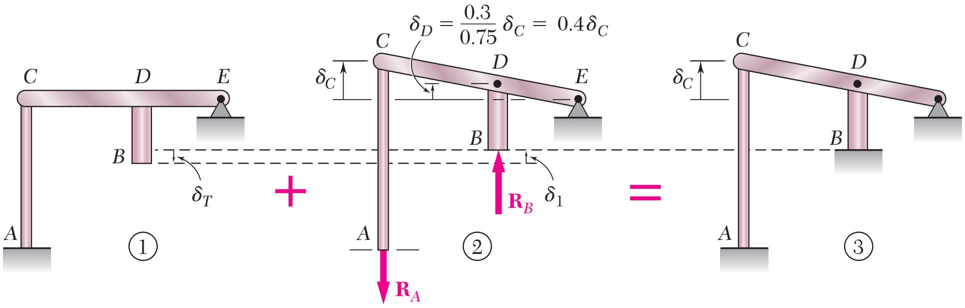
Estática. Considerando el cuerpo libre del ensamble completo, se tiene que

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad R_A(0.75\text{ m}) - R_B(0.3\text{ m}) = 0 \qquad R_A = 0.4R_B \qquad (1)$$

Deformaciones. Se utiliza el método de superposición, considerando a $\mathbf{R}_B$ como redundante. Con el apoyo en *B* retirado, la elevación de temperatura en el cilindro provoca que el punto *B* se mueva hacia abajo δ_T. La reacción $\mathbf{R}_B$ debe causar una deflexión δ_1 igual a δ_T para que la deflexión final de *B* sea cero (figura 3).

Deflexión δ_T. Debido a la elevación de temperatura de 50°−20° = 30°C, la longitud del cilindro de latón aumenta en δ_T.

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0.3\text{ m})(30°\text{C})(20.9 \times 10^{-6}/°\text{C}) = 188.1 \times 10^{-6}\text{ m}\downarrow$$



Deflexión δ_1. Se advierte que $\delta_D = 0.4\delta_C$ y que $\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D}$.

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A(0.9\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.022\text{ m})^2(200\text{ GPa})} = 11.84 \times 10^{-9}R_A\uparrow$$

$$\delta_D = 0.40\delta_C = 0.4(11.84 \times 10^{-9}R_A) = 4.74 \times 10^{-9}R_A\uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B(0.3\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.03\text{ m})^2(105\text{ GPa})} = 4.04 \times 10^{-9}R_B\uparrow$$

De la ecuación (1) se tiene que $R_A = 0.4R_B$ y se escribe

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4.74(0.4R_B) + 4.04R_B]10^{-9} = 5.94 \times 10^{-9}R_B\uparrow$$

Pero $\delta_T = \delta_1$: $\qquad 188.1 \times 10^{-6}\text{ m} = 5.94 \times 10^{-9}R_B \qquad R_B = 31.7$ kN

Esfuerzo en el cilindro: $\quad \sigma_B = \dfrac{R_B}{A} = \dfrac{31.7\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi(0.03)^2} \qquad \sigma_B = 44.8\text{ MPa}$ ◀

PROBLEMAS

2.33 Una barra de 250 mm de largo con una sección transversal rectangular de 15 × 30 mm consiste en dos capas de aluminio con 5 mm de grosor, unidas a una capa central de latón del mismo grosor. Si la barra está sujeta a fuerzas céntricas de magnitud $P = 30$ kN, y se sabe que $E_{al} = 70$ Gpa y $E_l = 105$ GPa, determine el esfuerzo normal *a*) en las capas de aluminio, *b*) en la capa de latón.

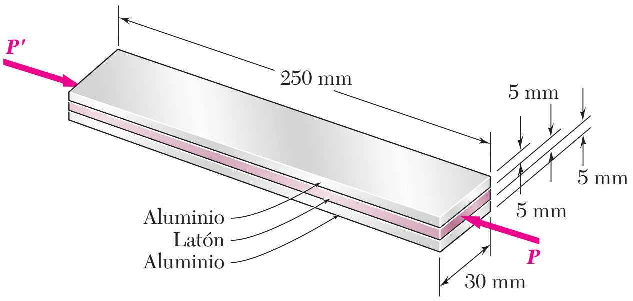

P'
250 mm
5 mm
5 mm
5 mm
Aluminio
Latón
Aluminio
P
30 mm

Figura *P2.33*

2.34 Determine la deformación de la barra compuesta del problema 2.33 si se somete a fuerzas céntricas de magnitud $P = 45$ kN.

2.35 En el ensamble que se muestra en la figura se aplican por medio de placas rígidas fuerzas céntricas de compresión de 40 kips en ambos extremos. Si se sabe que $E_{ac} = 29 \times 10^6$ psi y $E_{al} = 10.1 \times 10^6$ psi, determine *a*) los esfuerzos normales en el núcleo de acero y en la coraza de aluminio, *b*) la deformación del ensamble.

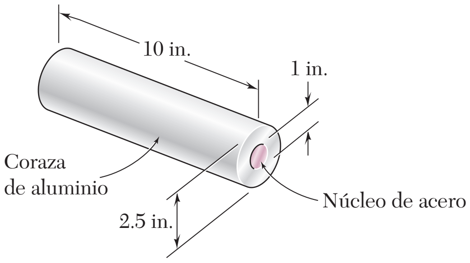

10 in.
1 in.
Coraza de aluminio
2.5 in.
Núcleo de acero

Figura P2.35

2.36 La longitud del ensamble mostrado disminuye 0.006 in. cuando se aplica una fuerza axial en los extremos por medio de placas rígidas. Determine *a*) la magnitud de la fuerza aplicada, *b*) el esfuerzo correspondiente en el núcleo de acero.

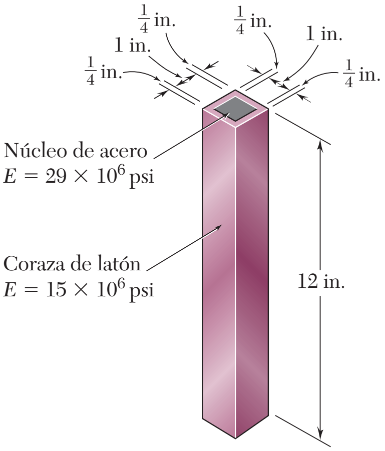

$\frac{1}{4}$ in.
$\frac{1}{4}$ in.
1 in.
1 in.
$\frac{1}{4}$ in.
$\frac{1}{4}$ in.
Núcleo de acero
$E = 29 \times 10^6$ psi
Coraza de latón
$E = 15 \times 10^6$ psi
12 in.

Figura P2.36

2.37 El poste de concreto de 1.5 m está reforzado con seis barras de acero, cada una con un diámetro de 28 mm. Si se sabe que $E_a = 200$ GPa y $E_c = 25$ GPa, determine los esfuerzos normales en el acero y en el concreto cuando se aplica al poste una carga céntrica axial **P** de 1 550 kN.

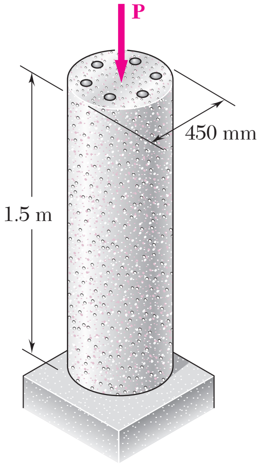


Figura P2.37

2.38 Para el poste del problema 2.37, determine la carga céntrica máxima que puede aplicarse si el esfuerzo normal permisible es de 160 MPa en el acero y 18 MPa en el concreto.

2.39 Tres varillas de acero ($E = 200$ GPa) soportan una carga **P** de 36 kN. Cada una de las varillas *AB* y *CD* tiene un área de sección transversal de 200 mm^2 y la varilla *EF* tiene un área de sección transversal de 625 mm^2. Despreciando la deformación de la varilla *BED* determine *a*) el cambio de longitud en la varilla *EF* y *b*) el esfuerzo en cada varilla.

2.40 Se emplean tres alambres para suspender la placa que se muestra en la figura. Se utilizan alambres de aluminio en *A* y en *B* con un diámetro de $\frac{1}{8}$ in. y se usa alambre de acero en *C* con un diámetro de $\frac{1}{12}$ in. Si se sabe que el esfuerzo permisible para el aluminio ($E = 10.4 \times 10^6$ psi) es de 14 ksi y que el esfuerzo permisible para el acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) es de 18 ksi, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse.

2.41 Dos varillas cilíndricas, una de acero y la otra de latón se unen en *C* y están restringidas por soportes rígidos en *A* y en *E*. Para la carga mostrada y sabiendo que $E_a = 200$ GPa y $E_l = 105$ GPa, determine *a*) las reacciones en *A* y en *E*, *b*) la deflexión del punto *C*.

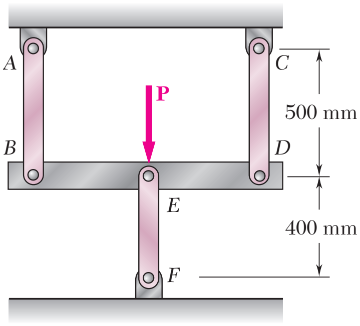


Figura P2.39

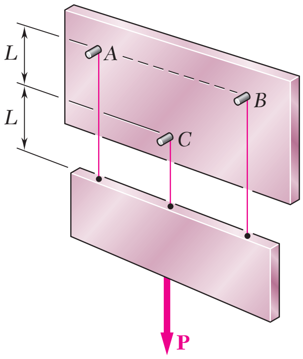


Figura *P2.40*

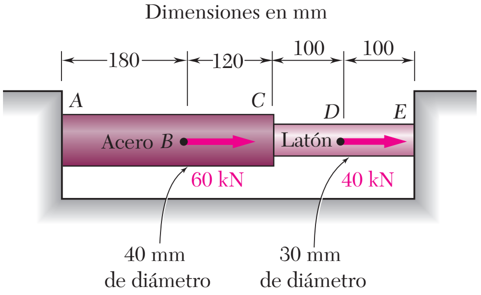


Figura P2.41

2.42 Retome el problema 2.41, y ahora suponga que la varilla *AC* está hecha de latón y que la varilla *CE* está hecha de acero.

2.43 Un tubo de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) con diámetro exterior de $1\frac{1}{4}$ in. y un espesor de pared de $\frac{1}{8}$ in. se coloca en una prensa que se ajusta de tal manera que sus quijadas apenas toquen los extremos del tubo sin ejercer presión sobre ellos. Luego, las dos fuerzas mostradas se aplican sobre el tubo. Después de la aplicación de estas fuerzas, la prensa se ajusta para disminuir la distancia entre sus quijadas en 0.008 in. Determine *a*) las fuerzas ejercidas por la prensa sobre el tubo en *A* y en *D*, *b*) el cambio de longitud en la porción *BC* del tubo.

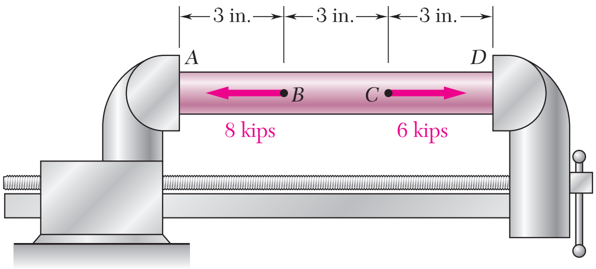


Figura P2.43

2.44 Retome el problema 2.43, y ahora suponga que, después de aplicar las fuerzas, la prensa se ajusta para disminuir la distancia entre sus quijadas a 0.004 in.

2.45 Los eslabones *BC* y *DE* están hechos de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y tienen $\frac{1}{2}$ in. de ancho y $\frac{1}{4}$ in. de espesor. Determine *a*) la fuerza en cada eslabón cuando se aplica una fuerza **P** de 600 lb sobre el elemento rígido *AF* como se muestra en la figura, y *b*) la deflexión correspondiente del punto *A*.

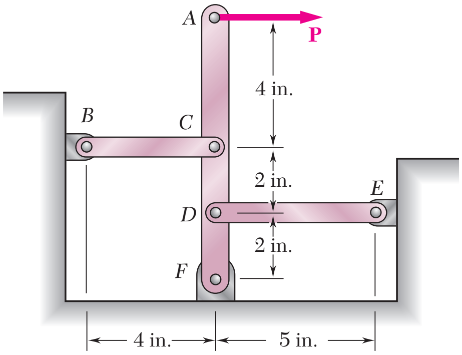

A
P
4 in.
B
C
2 in.
E
D
2 in.
F
4 in.
5 in.

Figura *P2.45*

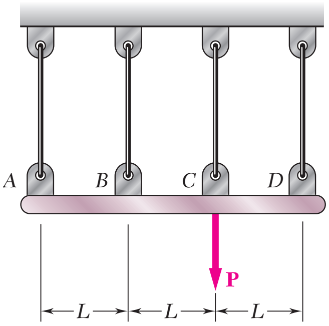


Figura P2.46

2.46 La barra rígida *ABCD* está suspendida de cuatro alambres idénticos como se muestra en la figura. Determine la tensión que causa en cada alambre la carga **P**.

2.47 La coraza de aluminio que se muestra en la figura está completamente unida al núcleo de latón, y el ensamble se encuentra libre de esfuerzo a una temperatura de 15°C. Considere sólo las deformaciones axiales y determine el esfuerzo en el aluminio cuando la temperatura alcanza 195°C.

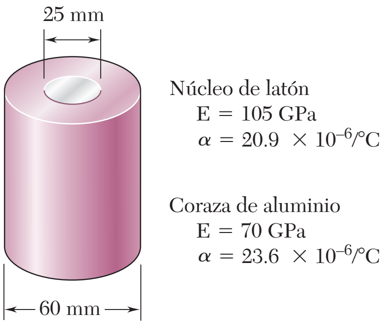

25 mm
Núcleo de latón
E = 105 GPa
α = 20.9 × 10⁻⁶/°C
Coraza de aluminio
E = 70 GPa
α = 23.6 × 10⁻⁶/°C
60 mm

Figura P2.47

2.48 Retome el problema 2.47, y ahora suponga que el núcleo está hecho de acero ($E = 200$ GPa, $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$/°C) en vez de latón.

2.49 Un poste de concreto de 4 ft está reforzado con cuatro varillas de acero, cada una de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro. Si se sabe que $E_a = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha_a = 6.5 \times 10^{-6}$/°F y $E_c = 3.6 \times 10^6$ psi y $\alpha_c = 5.5 \times 10^{-6}$/°F, determine los esfuerzos normales que se inducen en el acero y en el concreto debido a una elevación en la temperatura de 80°F.

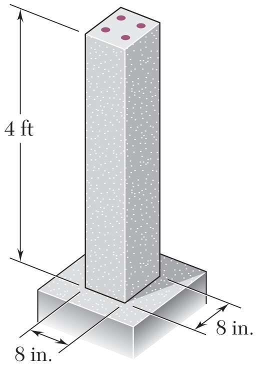


Figura *P2.49*

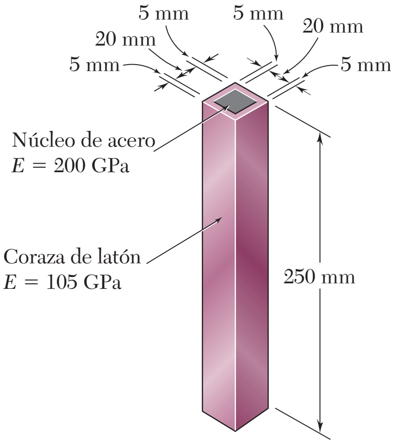

5 mm
5 mm
20 mm
20 mm
5 mm
5 mm
Núcleo de acero
E = 200 GPa
Coraza de latón
E = 105 GPa
250 mm

Figura P2.50

2.50 La coraza de latón ($\alpha_l = 20.9 \times 10^{-6}$/°C) está unida por completo al núcleo de acero ($\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}$/°F). Determine el incremento máximo permisible en temperatura si el esfuerzo en el núcleo de acero no debe exceder de 55 MPa.

2.51 Una varilla que consiste en dos porciones cilíndricas AB y BC está restringida en ambos extremos. La porción AB es de acero ($E_a = 200$ GPa, $\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}/°C$), y la porción BC está hecha de latón ($E_l = 105$ GPa, $\alpha_l = 20.9 \times 10^{-6}/°C$). Si se sabe que la varilla se encuentra inicialmente sin esfuerzos, determine la fuerza de compresión inducida en ABC cuando la temperatura se eleva 50°C.

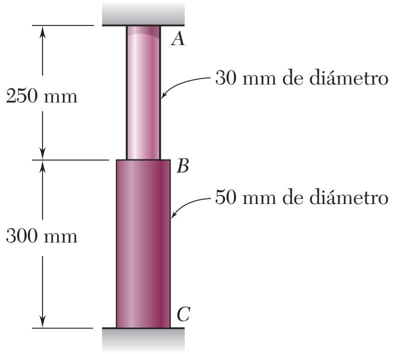


Figura P2.51

2.52 Una varilla de dos porciones cilíndricas AB y BC está restringida en ambos extremos. La porción AB es de latón ($E_l = 15 \times 10^6$ psi, $\alpha_l = 11.6 \times 10^{-6}/°F$) y la porción BC es de acero ($E_a = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha_a = 6.5 \times 10^{-6}/°F$). Si se sabe que la varilla está inicialmente sin esfuerzos, determine *a*) los esfuerzos normales inducidos en las porciones AB y BC por una elevación de temperatura de 90°F, *b*) la deflexión correspondiente del punto B.

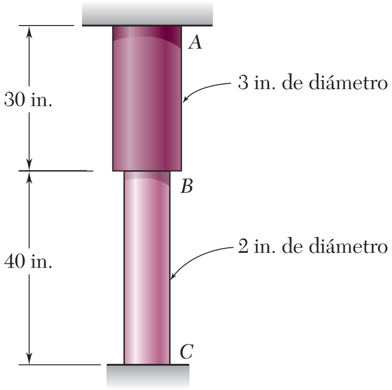


Figura P2.52

2.53 Retome el problema 2.52, y ahora suponga que la porción AB de la varilla compuesta está hecha de acero y que la porción BC es de latón.

2.54 Una vía de acero para ferrocarril ($E_a = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha_a = 6.5 \times 10^{-6}/°F$) fue tendida a una temperatura de 30°F. Determine el esfuerzo normal en los rieles cuando la temperatura alcance 125°F, si los rieles *a*) están soldados para formar una vía continua, *b*) tienen 39 ft de longitud con separaciones de $\frac{1}{4}$ in. entre ellos.

2.55 Dos barras de acero ($E_a = 200$ GPa, $\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}/°C$) se emplean para reforzar una barra de latón ($E_l = 105$ GPa, $\alpha_l = 20.9 \times 10^{-6}/°C$) que está sujeta a una carga $P = 25$ kN. Cuando se fabricaron las barras de acero, la distancia entre los centros de los agujeros que debían ajustarse a los pasadores se redujo 0.5 mm en relación con los 2 m que se necesitaban. Por ello las barras de acero se colocaron en un horno para aumentar su longitud, con el fin de que se ajustaran a los pasadores. Después de este proceso, la temperatura de las barras de acero se redujo a la temperatura ambiente. Determine *a*) el incremento en la temperatura que hizo posible que la barra de acero se ajustara a los pasadores, *b*) el esfuerzo en la barra de latón después de aplicar la carga sobre ella.

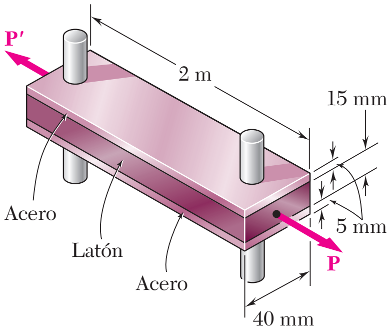


Figura P2.55

2.56 Determine la carga máxima P que puede aplicarse a la barra del problema 2.55, si el esfuerzo permisible en las barras de acero es de 30 MPa y el esfuerzo permisible en la barra de latón es de 25 MPa.

2.57 Un eslabón de latón ($E_l = 105$ GPa, $\alpha_l = 20.9 \times 10^{-6}/°\text{C}$) y una varilla de acero ($E_a = 200$ GPa, $\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}/°\text{C}$) a una temperatura de 20°C tienen las dimensiones que se muestran en la figura. La varilla de acero se enfría hasta que ajusta con libertad en el eslabón de latón. La temperatura de todo el ensamble se eleva entonces a 45°C. Determine *a*) el esfuerzo final en la varilla de acero, *b*) la longitud final de la varilla de acero.

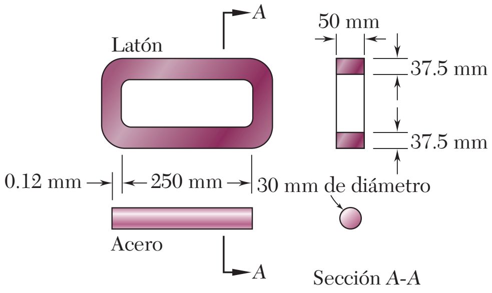

A
Latón
50 mm
37.5 mm
37.5 mm
0.12 mm
250 mm
30 mm de diámetro
Acero
A
Sección A-A

Figura *P2.57*

2.58 Si se sabe que existe una separación de 0.02 in. cuando la temperatura es de 75°F, determine *a*) la temperatura en que el esfuerzo normal de la barra de aluminio será igual a −11 ksi, *b*) la longitud exacta correspondiente de la barra de aluminio.

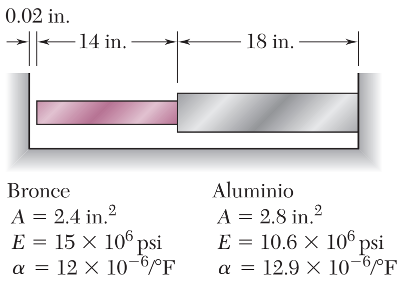

0.02 in.
14 in.
18 in.
Bronce
A = 2.4 in.²
E = 15 × 10⁶ psi
α = 12 × 10⁻⁶/°F
Aluminio
A = 2.8 in.²
E = 10.6 × 10⁶ psi
α = 12.9 × 10⁻⁶/°F

Figura P2.58 y P2.59

2.59 Determine *a*) la fuerza de compresión en las barras mostradas después de una elevación en la temperatura de 180°F, *b*) el cambio correspondiente en la longitud de la barra de bronce.

2.60 A temperatura ambiente (20°C) hay un espacio de 0.5 mm entre los extremos de las varillas mostradas en la figura. Posteriormente, cuando la temperatura alcanza 140°C, determine *a*) el esfuerzo normal en la varilla de aluminio, *b*) el cambio de longitud de la varilla de aluminio.

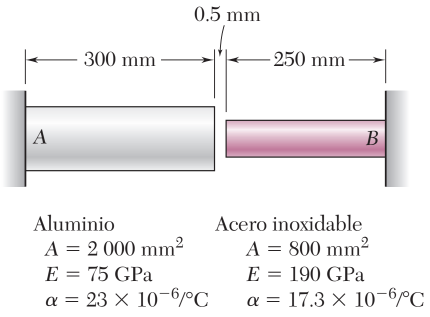

0.5 mm
300 mm
250 mm
A
B
Aluminio
A = 2 000 mm²
E = 75 GPa
α = 23 × 10⁻⁶/°C
Acero inoxidable
A = 800 mm²
E = 190 GPa
α = 17.3 × 10⁻⁶/°C

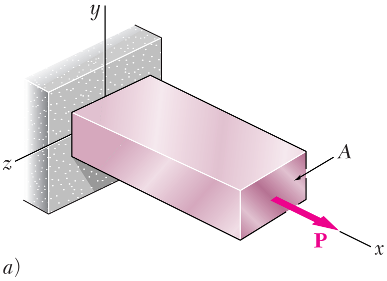
Figura *P2.60*

2.11 RELACIÓN DE POISSON

En la sección anterior de este capítulo se estudió que cuando una barra esbelta homogénea se carga axialmente, el esfuerzo y la deformación unitaria resultantes satisfacen la ley de Hooke, siempre y cuando no se exceda el límite elástico del material. Suponiendo que la carga **P** está dirigida a lo largo del eje x (figura 2.39*a*), se tiene que $\sigma_x = P/A$, donde A es el área de la sección transversal de la barra. Por la ley de Hooke,

$$\epsilon_x = \sigma_x/E \tag{2.24}$$

donde E es el módulo de elasticidad del material.



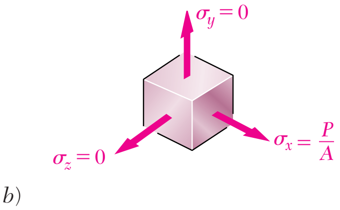


Figura 2.39

También se advierte que los esfuerzos normales de las caras perpendiculares a los ejes y y z son cero: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (figura 2.39*b*). Parecería lógico concluir que las deformaciones correspondientes ϵ_y y ϵ_z también son cero. Esto, sin embargo, *no es el caso*. En todos los materiales de ingeniería, la elongación que produce una fuerza axial de tensión **P** en la dirección de la fuerza se acompaña de una contracción en cualquier dirección transversal (figura 2.40).† En esta sección y en las siguientes (secciones 2.12 a 2.15), se supondrá que todos los materiales considerados son *homogéneos* e *isotrópicos*, es decir, se supondrá que sus propiedades mecánicas son independientes tanto de la *posición* como de la *dirección*. Esto significa que la deformación unitaria debe tener el mismo valor para cualquier dirección transversal. Por lo tanto, para la carga mostrada en la figura 2.39 debe tenerse que $\epsilon_y = \epsilon_z$. Este valor se conoce como *deformación lateral*. Una constante importante para un material dado es su *relación de Poisson*, llamada así en honor al matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840), y que se denota con la letra griega ν (nu). Se define como

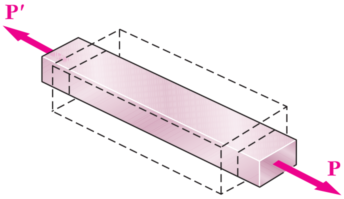


Figura 2.40

$$\boxed{\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}}} \tag{2.25}$$

o

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.26}$$

para la condición de carga representada en la figura 2.39. Note el uso de un signo menos en las ecuaciones anteriores para obtener un valor positivo de ν, las deformaciones axiales y laterales de todos los materiales de ingeniería tienen signos opuestos.‡ Resolviendo la ecuación (2.26) para encontrar ϵ_y y ϵ_z, y utilizando la ecuación (2.24), se escriben las siguientes relaciones, que describen completamente las condiciones de deformación bajo una carga axial aplicada en una dirección paralela al eje x:

$$\boxed{\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}} \qquad \boxed{\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}} \tag{2.27}$$

---

† Sería tentador, pero igualmente erróneo, suponer que el volumen de la varilla permanece sin cambio como resultado del efecto combinado de la deformación axial y de la contracción transversal (véase sección 2.13).

‡ Sin embargo, algunos materiales experimentales, como las espumas poliméricas, se expanden lateralmente cuando se estiran. Como las deformaciones axial y lateral tienen el mismo signo, la relación de Poisson de estos materiales es negativa. (Véase Roderic Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio", en *Science*, 27 de febrero de 1987, volumen 235, pp. 1038-1040.)

EJEMPLO 2.07

Se observa que una varilla de 500 mm de longitud y 16 mm de diámetro, elaborada con un material homogéneo e isotrópico, aumenta su longitud en 300 μm y reduce su diámetro en 2.4 μm al sometérsele a una carga axial de 12 kN. Determine el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del material.

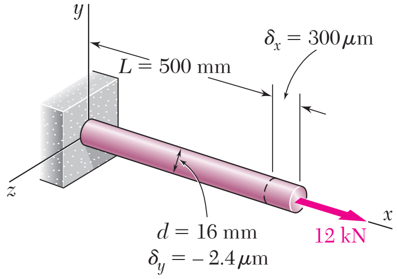


Figura 2.41

El área de la sección transversal de la varilla es

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

Eligiendo el eje x a lo largo del eje de la varilla (véase figura 2.41), se tiene que

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\,\mathrm{N}}{201 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 59.7\,\mathrm{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\,\mu\mathrm{m}}{500\,\mathrm{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4\,\mu\mathrm{m}}{16\,\mathrm{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

De la ley de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, se obtiene

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7\,\mathrm{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5\,\mathrm{GPa}$$

y de la ecuación (2.26),

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

2.12 CARGA MULTIAXIAL. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Todos los ejemplos considerados hasta el momento en este capítulo han tratado con elementos esbeltos sujetos a cargas axiales, es decir, con fuerzas dirigidas a lo largo de un solo eje. Eligiendo este eje como el eje x, y denotando con P la fuerza interna en un lugar dado, las componentes correspondientes de los esfuerzos fueron $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ y $\sigma_z = 0$.

Considere ahora elementos estructurales sometidos a cargas que actúan en las direcciones de los tres ejes coordenados y que producen esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z, todos distintos de cero (figura 2.42). Esta condición se conoce como *carga multiaxial*. Advierta que ésta no es la condición generalizada de esfuerzos descrita en la sección 1.12, ya que no se incluyen esfuerzos cortantes entre los esfuerzos mostrados en la figura 2.42.

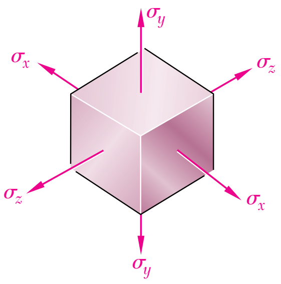
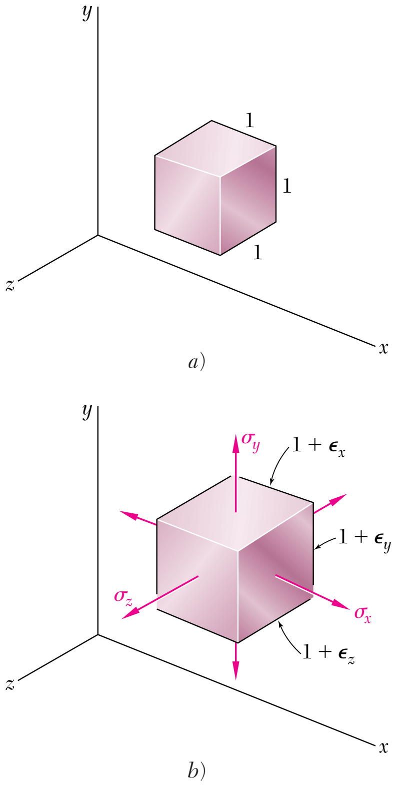


Figura 2.42



a)

b)

Figura 2.43

Sea un elemento de un material isotrópico con forma cúbica (figura 2.43*a*). Puede suponerse que el lado del cubo sea igual a la unidad, ya que siempre es posible seleccionar el lado del cubo como una unidad de longitud. Bajo la carga multiaxial determinada, el elemento se deformará hasta constituir un *paralelepípedo rectangular* de lados iguales $1 + \epsilon_x$, $1 + \epsilon_y$ y $1 + \epsilon_z$, donde ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z son los valores de la deformación normal en las direcciones de los tres ejes coordenados (figura 2.43*b*). Deberá advertirse que, como resultado de las deformaciones de los otros elementos del material, el elemento en consideración también puede sufrir una traslación, pero en este momento sólo interesa la *deformación real* del elemento, y no cualquier posible desplazamiento del cuerpo rígido.

Para expresar las componentes de la deformación ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z en términos de las componentes del esfuerzo σ_x, σ_y, σ_z, se considerará por separado el efecto de cada componente de esfuerzo y se combinarán los resultados obtenidos. El enfoque que se propone utilizar aquí se empleará repetidamente en este libro, y se basa en el *principio de superposición*, el cual dice que el efecto de una carga combinada dada sobre una estructura puede obtenerse *determinando*, en forma separada, *los efectos de las distintas cargas y combinando los resultados obtenidos*, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Cada efecto está linealmente relacionado con la carga que lo produce.
2. La deformación resultante de cualquier carga dada es pequeña y no afecta las condiciones de aplicación de las otras cargas.

En el caso de una carga multiaxial, la primera condición será satisfecha si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad del material, y la segunda condición también se cumplirá si el esfuerzo en cualquier cara dada no causa deformaciones en las otras que sean lo suficientemente grandes para afectar el cálculo de los esfuerzos en esas caras.

Considerando primero el efecto de la componente de esfuerzo σ_x, recuerde de la sección 2.11 que σ_x causa una deformación igual a σ_x/E en la dirección de x y deformaciones iguales a $-\nu\sigma_x/E$ en las direcciones y y z. De manera similar, si la componente σ_y se aplica por separado, causará una deformación σ_y/E en la dirección y y deformaciones $-\nu\sigma_y/E$ en las otras dos direcciones. Finalmente la componente σ_z, si se aplica por separado, ocasionará una deformación unitaria σ_z/E en la dirección z y deformaciones $-\nu\sigma_z/E$ en las direcciones x y y. Combinando los resultados obtenidos, se concluye que las componentes de deformación correspondientes a la carga multiaxial dada son

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Las relaciones (2.28) se conocen como la *ley de Hooke generalizada para la carga multiaxial de un material isotrópico homogéneo*. Como ya se indicó, los resultados obtenidos son válidos sólo si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad, y en tanto las deformaciones involucradas sean pequeñas. Además, recuerde que un valor positivo para una componente de esfuerzo significa tensión, y un valor negativo significa compresión. De igual manera, un valor positivo para una componente de deformación indica expansión en la dirección correspondiente, y un valor negativo indica contracción.

EJEMPLO 2.08

El bloque de acero que muestra la figura 2.44 es sometido a presión uniforme en todas sus caras. Sabiendo que el cambio de longitud del borde AB es de -1.2×10^{-3} in., encuentre *a*) el cambio de longitud en los otros dos bordes, *b*) la presión p aplicada a las caras del bloque. Suponga $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

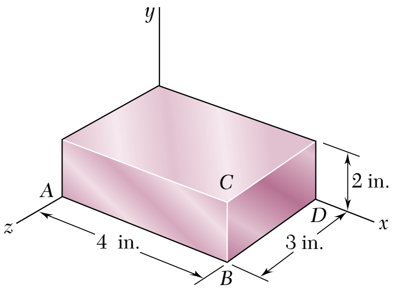


Figura 2.44

a) Cambio de longitud de los otros bordes. Sustituyendo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ en (2.28), se encuentra que las tres componentes de deformación tienen el valor común

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \tag{2.29}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\epsilon_x = \delta_x/AB &= (-1.2 \times 10^{-3}\text{ in.})/(4\text{ in.})\\ &= -300 \times 10^{-6}\text{ in./in.}\end{aligned}$$

se obtiene

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\delta_y &= \epsilon_y(BC) = (-300 \times 10^{-6})(2\text{ in.}) = -600 \times 10^{-6}\text{ in.}\\ \delta_z &= \epsilon_z(BD) = (-300 \times 10^{-6})(3\text{ in.}) = -900 \times 10^{-6}\text{ in.}\end{aligned}$$

b) Presión. Despejando la ecuación (2.29) para encontrar p, se tiene que

$$p = -\frac{E\epsilon_x}{1 - 2\nu} = -\frac{(29 \times 10^6\text{ psi})(-300 \times 10^{-6})}{1 - 0.58}$$

$$p = 20.7\text{ ksi}$$

*2.13 DILATACIÓN. MÓDULO DE ELASTICIDAD VOLUMÉTRICO (O MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD)

En esta sección se examinará el efecto de los esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z sobre el volumen de un elemento de material isotrópico. Considere el elemento mostrado en la figura 2.43. En su estado no esforzado, tiene la forma de un cubo de volumen unitario, y bajo los esfuerzos σ_x, σ_y, σ_z, se deforma en un paralelepípedo rectangular cuyo volumen es:

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

Como las deformaciones ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z son mucho más pequeñas que la unidad, sus productos son más pequeños aún y pueden omitirse en la expansión del producto. Se tiene, entonces,

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Denotando con e el cambio de volumen de nuestro elemento, se tiene

$$e = \upsilon - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1$$

o

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{2.30}$$

Como el elemento tenía originalmente un volumen unitario, la cantidad e representa *el cambio de volumen por unidad de volumen* y se conoce como *dilatación* del material. Sustituyendo ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z de las ecuaciones (2.28) en la ecuación (2.30), se tiene que

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.31}$$†

Un caso de interés especial es el de un cuerpo sujeto a una presión hidrostática uniforme p. Cada una de las componentes de esfuerzo es igual a $-p$ y la ecuación (2.31) da

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p \tag{2.32}$$

Introduciendo la constante

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{2.33}$$

se escribe la ecuación (2.32) en la forma

$$e = -\frac{p}{k} \tag{2.34}$$

La constante k se conoce como el *módulo de elasticidad volumétrico* o *módulo de compresibilidad* del material, y se expresa en las mismas unidades que el módulo de elasticidad E, es decir, en pascales o en psi.

La observación y el sentido común indican que un material estable sometido a presión hidrostática sólo puede *disminuir* en volumen; por lo tanto, la dilatación e en la ecuación (2.34) es negativa, de lo que sigue que el módulo k es una cantidad positiva. Con base en la ecuación (2.33), se concluye que $1 - 2\nu > 0$, o que $\nu < \frac{1}{2}$. Por otro lado, recuerde que en la sección 2.11 se anotó que ν es positiva para todos los materiales de ingeniería. Se concluye, pues, que para cualquier material de ingeniería,

$$0 < \nu < \tfrac{1}{2} \tag{2.35}$$

Se advierte que un material ideal con un valor de υ igual a cero podría estirarse en una dirección sin ninguna contracción lateral. Por otra parte, un material ideal para el que $\nu = \frac{1}{2}$, y por lo tanto $k = \infty$, sería perfectamente incompresible ($e = 0$). Con referencia a la ecuación (2.31) también se advierte que, ya que $\nu < \frac{1}{2}$ en el rango elástico, el estirar un material de ingeniería en una dirección, por ejemplo en la dirección x ($\sigma_x > 0, \sigma_y = \sigma_z = 0$), resultaría en un incremento de su volumen ($e > 0$).†

---

† Ya que la dilatación e representa un cambio de volumen, debe ser independiente de la orientación del elemento considerado. Se deduce de las ecuaciones (2.30) y (2.31) que las cantidades $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ y $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ son también independientes de la orientación del elemento. Esta propiedad se verificará en el capítulo 7.

EJEMPLO 2.09

Determine el cambio de volumen ΔV del bloque de acero que se muestra en la figura 2.44, cuando se somete a la presión hidrostática $p = 180$ MPa. Considere $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$.

De la ecuación (2.33) se determina el módulo de elasticidad volumétrico del acero,

$$k = \frac{E}{3(1 - 2v)} = \frac{200 \text{ GPa}}{3(1 - 0.58)} = 158.7 \text{ GPa}$$

y de la ecuación (2.34), la dilatación,

$$e = -\frac{p}{k} = -\frac{180 \text{ MPa}}{158.7 \text{ GPa}} = -1.134 \times 10^{-3}$$

Ya que el volumen V del bloque en su estado inicial es

$$V = (80 \text{ mm})(40 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 192 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

y dado que e representa el cambio en el volumen por unidad de volumen, $e = \Delta V/V$, se tiene que

$$\Delta V = eV = (-1.134 \times 10^{-3})(192 \times 10^3 \text{ mm}^3)$$

$$\Delta V = -218 \text{ mm}^3$$

2.14 DEFORMACIÓN UNITARIA CORTANTE

Cuando en la sección 2.12 se dedujeron las relaciones (2.28) entre los esfuerzos normales y las deformaciones normales en un material isotrópico homogéneo, se supuso que no había esfuerzos cortantes involucrados. En la situación más general de esfuerzo representada en la figura 2.45, los esfuerzos cortantes τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx} estarán presentes (así como, desde luego, los esfuerzos cortantes correspondientes τ_{yx}, τ_{zy} y τ_{xz}). Estos esfuerzos no tienen un efecto directo sobre las deformaciones normales y, mientras todas las deformaciones involucradas permanezcan pequeñas, no afectarán la deducción ni la validez de las relaciones (2.28). Los esfuerzos cortantes, sin embargo, tenderán a deformar un elemento cúbico de material hacia la forma de un paralelepípedo *oblicuo*.

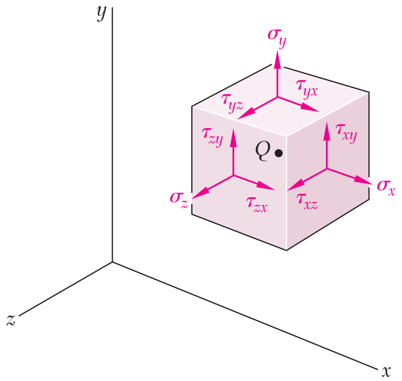


Figura 2.45

---

† Sin embargo, en el rango plástico, el volumen del material permanece casi constante.

Considere primero un elemento cúbico de lado uno (véase figura 2.46) sometido sólo a esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} aplicados a las caras del elemento respectivamente perpendiculares a los ejes x y y. (De la sección 1.12, recuerde que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.) Se observa que el elemento se deforma en un romboide con lados iguales a uno (figura 2.47). Dos de los ángulos formados por las cuatro caras bajo esfuerzo se reducen de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$, mientras que los otros dos aumentan de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$. El pequeño ángulo γ_{xy} (expresado en radianes) define la *deformación a cortante* que corresponde a las direcciones x y y. Cuando la deformación involucra una *reducción* del ángulo formado por las dos caras orientadas respectivamente hacia los ejes x y y positivos (como se observa en la figura 2.47), se dice que la deformación a corte γ_{xy} es *positiva*; de lo contrario, se le considera negativa.

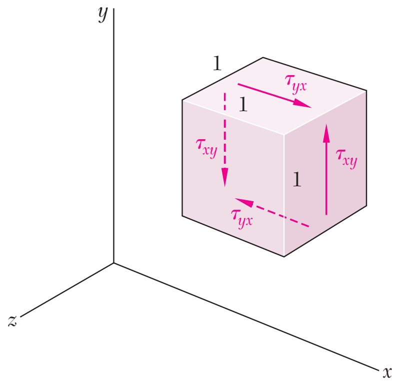


Figura 2.46

Debe advertirse que, como resultado de las deformaciones de otros elementos del material, el elemento considerado también puede experimentar una rotación. Sin embargo, al igual que en el estudio de las deformaciones normales, aquí sólo se abordará la *deformación real* del elemento, y no cualquier posible desplazamiento superimpuesto del cuerpo rígido.†

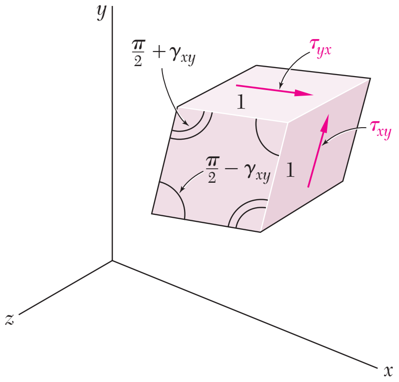


Figura 2.47

Graficando los valores sucesivos de τ_{xy} contra los valores correspondientes de γ_{xy}, se obtiene el diagrama correspondiente esfuerzo-deformación a cortante para el material considerado. Esto puede llevarse a cabo realizando un ensayo de torsión, como se verá en el capítulo 3. El diagrama obtenido es similar al diagrama esfuerzo-deformación normal obtenido para el mismo material a partir del ensayo de tensión ya descrito en este capítulo. Sin embargo, los valores obtenidos para la resistencia de cedencia, resistencia última, etc., de un material dado son aproximadamente la mitad de los valores en corte que sus equivalentes en tensión. Como en el caso de los esfuerzos y deformaciones normales, la porción inicial del diagrama esfuerzo-deformación a corte es una línea recta. Para valores del esfuerzo cortante que no so-

---

† Al definir la deformación γ_{xy} algunos autores suponen, en forma arbitraria, que la deformación del elemento se acompaña de una rotación de cuerpo rígido de tal manera que las caras horizontales del elemento no giran. La deformación γ_{xy} se representa, entonces, por el ángulo a través del cual las otras dos caras han girado (véase figura 2.48). Otros suponen una rotación de cuerpo rígido tal que las caras horizontales giran $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y las caras verticales a través de $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ en sentido horario (véase figura 2.49). Como ambas suposiciones son innecesarias y pueden crear confusión, en este texto se ha preferido asociar la deformación a corte γ_{xy} con el *cambio de ángulo* formado por las dos caras, más que con la *rotación de una cara dada* en condiciones restrictivas.

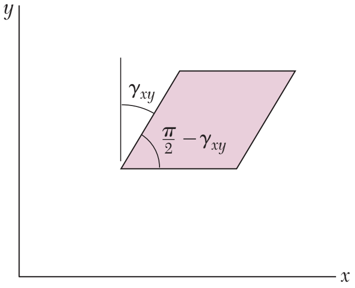


Figura 2.48

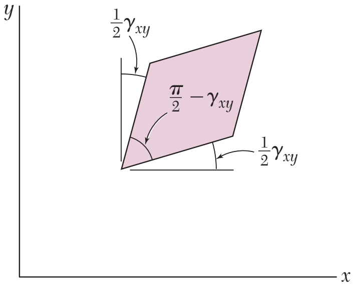


Figura 2.49

brepasan el límite de proporcionalidad a corte, se puede escribir para cualquier material isotrópico homogéneo,

$$\boxed{\tau_{xy} = G\gamma_{xy}} \tag{2.36}$$

Esta relación se conoce como la *ley de Hooke para esfuerzo y deformación a cortante*, y la constante G es el *módulo de rigidez* o *módulo de cortante del material*. Como la deformación γ_{xy} se definió como un ángulo en radianes, es adimensional, y el módulo G se expresa en las mismas unidades que τ_{xy}, es decir, en pascales o en psi. El módulo de rigidez G de cualquier material dado es menos de la mitad pero más de la tercera parte del módulo de elasticidad E de ese material.†

Considerando ahora un pequeño elemento de material sometido a esfuerzos cortantes τ_{yz} y τ_{zy} (figura 2.50*a*), se define la deformación unitaria a corte γ_{yz} como el cambio en el ángulo formado por las caras bajo esfuerzo. La deformación unitaria a corte γ_{zx} se define de manera similar considerando un elemento sometido a esfuerzos cortantes τ_{zx} y τ_{xz} (figura 2.50*b*). Para los valores de esfuerzo que no exceden el límite de proporcionalidad, pueden escribirse las dos relaciones adicionales

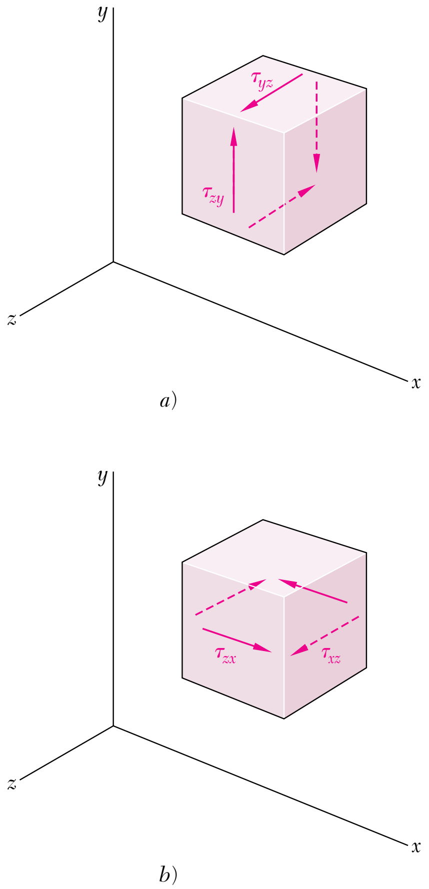
$$\boxed{\tau_{yz} = G\gamma_{yz}} \qquad \boxed{\tau_{zx} = G\gamma_{zx}} \tag{2.37}$$

donde la constante G es la misma que en la ecuación (2.36).

Para la condición general de esfuerzo representada en la figura 2.45, y en tanto ninguno de los esfuerzos involucrados exceda el correspondiente límite de proporcionalidad, es posible aplicar el principio de superposición y combinar los resultados obtenidos en esta sección y en la sección 2.12. Se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones que representan la ley de Hooke generalizada para un material isotrópico homogéneo bajo la condición más generalizada de esfuerzos.

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\
\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Un análisis de las ecuaciones (2.38) podrá conducir a pensar que primero deben determinarse, en forma experimental, tres distintas constantes, E, ν y G, si han de predecirse las deformaciones causadas en un material dado por una combinación arbitraria de esfuerzos. En realidad, sólo dos de estas constantes deben determinarse experimentalmente para cualquier material dado. Como se verá en la siguiente sección, la tercera constante puede obtenerse mediante un cálculo muy sencillo.



a)

b)

Figura 2.50

---

† Véase problema 2.91.

EJEMPLO 2.10

Un bloque rectangular de material con un módulo de rigidez $G = 90$ ksi se une a dos placas rígidas horizontales. La placa inferior está fija, mientras que la placa superior se somete a una fuerza horizontal **P** (figura 2.51). Sabiendo que la placa superior se mueve 0.04 in. bajo la acción de la fuerza, halle *a*) la deformación unitaria promedio a corte del material, *b*) la fuerza **P** ejercida sobre la placa superior.

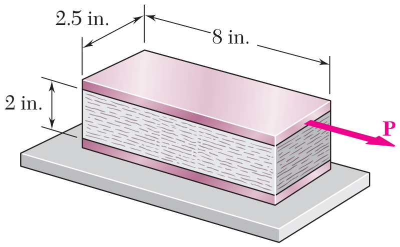


Figura 2.51

a) Deformación unitaria a corte. Se seleccionan ejes coordenados centrados en el punto medio *C* del borde *AB* y dirigidos como se muestra en la figura 2.52. De acuerdo con su definición, la deformación unitaria bajo cortante γ_{xy} es igual al ángulo formado por la vertical y por la línea *CF* que une los puntos medios de los bordes *AB* y *DE*. Advirtiendo que es un ángulo muy pequeño y recordando que debe expresarse en radianes, se escribe

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04 \text{ in.}}{2 \text{ in.}} \qquad \gamma_{xy} = 0.020 \text{ rad}$$

b) Fuerza ejercida sobre la placa superior. Primero se determina el esfuerzo cortante τ_{xy} en el material. Utilizando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación unitaria, se tiene que

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (90 \times 10^3 \text{ psi})(0.020 \text{ rad}) = 1\,800 \text{ psi}$$

La fuerza ejercida sobre la placa superior es, por lo tanto,

$$P = \tau_{xy}\ A = (1\,800 \text{ psi})(8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.}) = 36.0 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P = 36.0 \text{ kips}$$

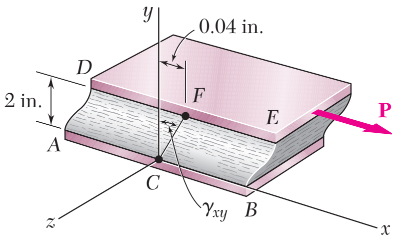
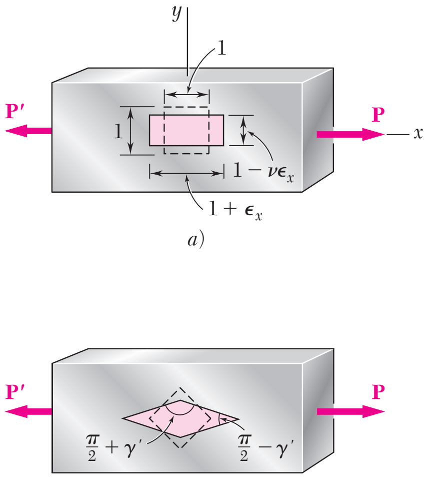


Figura 2.52

2.15 ANÁLISIS ADICIONAL DE LAS DEFORMACIONES BAJO CARGA AXIAL. RELACIÓN ENTRE *E*, *ν* Y *G*

En la sección 2.11 se estudió que una barra delgada sometida a una carga axial de tensión **P** dirigida a lo largo del eje *x* se alargará en la dirección *x* y se contraerá en ambas direcciones transversales *y* y *z*. Si ϵ_x es la deformación axial, la deformación lateral es expresada como $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, donde ν es la relación de Poisson. Así, un elemento en la forma de un cubo con un lado igual a uno y orientado como se muestra en la figura 2.53*a* se deformará como un paralelepípedo rectangular de lados $1 + \epsilon_x$, $1 - \nu\epsilon_x$ y $1 - \nu\epsilon_x$. (Note que sólo una cara del elemento se muestra en la figura.) Por otra parte, si el elemento está orientado a 45° de la carga, se observa que la cara mostrada en la figura se deforma como un rombo. Se concluye que la carga axial **P** causa en este elemento una deformación cortante γ' igual a la cantidad por la que cada uno de los ángulos que muestra la figura 2.53*b* aumenta o disminuye.†



a)

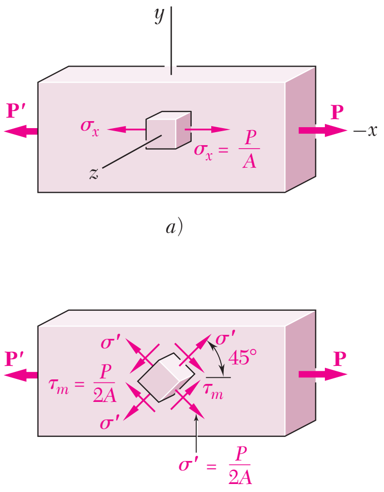
b)

Figura 2.53

---

† Observe que la carga **P** también produce deformaciones unitarias normales en el elemento que se muestra en la figura 2.53*b* (véase problema 2.74).

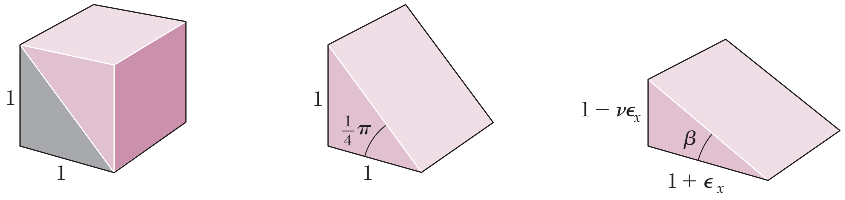
El hecho de que las deformaciones cortantes, además de las deformaciones normales, resulten de una carga axial no deberá sorprender, ya que al final de la sección 1.12 se ha observado que una carga axial **P** causa esfuerzos normales y cortantes de igual magnitud en cuatro de las caras de un elemento orientado a 45° del eje del miembro cargado. Este caso se ilustró en la figura 1.40, la que, por conveniencia, se repite aquí. En la sección 1.11, también se mostró que el esfuerzo cortante es máximo en un plano que forma un ángulo de 45° con el eje de la carga. Se deduce de la ley de Hooke para los esfuerzos y deformaciones cortantes que la deformación a corte γ'asociada con el elemento de la figura 2.53*b* es también máxima: $\gamma' = \gamma_m$.



a)

b)

Figura 1.40 (repetida)



a) *b*) *c*)

Figura 2.54

Mientras un estudio más detallado de las transformaciones de la deformación se pospondrá hasta el capítulo 7, en esta sección se deducirá una relación entre la máxima deformación a corte $\gamma' = \gamma_m$ asociada con el elemento de la figura 2.53*b* y la deformación unitaria normal ϵ_x en la dirección de la carga. Considere para este propósito el elemento prismático obtenido de intersectar el elemento cúbico de la figura 2.53*a* con un plano diagonal (figura 2.54*a* y *b*). Refiriéndose a la figura 2.53*a*, se concluye que este nuevo elemento se deformará como el elemento de la figura 2.54*c*, que tiene lados horizontales y verticales respectivamente iguales a $1 + \epsilon_x$ y $1 - \nu\epsilon_x$. Pero el ángulo formado por las caras oblicuas y horizontales del elemento de la figura 2.54*b* es precisamente la mitad de uno de los ángulos rectos en el elemento cúbico considerado en la figura 2.53*b*. El ángulo β en el que se deforma este ángulo debe ser, por lo tanto, igual a la mitad de $\pi/2 - \gamma_m$. Se escribe

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

Aplicando la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos, se obtiene

$$\tan\beta = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma_m}{2}}$$

o, como $\gamma_m/2$ es un ángulo muy pequeño,

$$\tan \beta = \frac{1 - \dfrac{\gamma_m}{2}}{1 + \dfrac{\gamma_m}{2}} \tag{2.39}$$

Pero, de la figura 2.54*c*, se observa que

$$\tan \beta = \frac{1 - \nu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \tag{2.40}$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (2.39) y (2.40), y despejando γ_m, se tiene

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu)\epsilon_x}{1 + \dfrac{1 - \nu}{2}\epsilon_x}$$

Ya que $\epsilon_x \ll 1$, el denominador en la expresión obtenida puede suponerse igual a uno; se tiene, por lo tanto,

$$\gamma_m = (1 + \nu)\epsilon_x \tag{2.41}$$

que es la relación deseada entre la máxima deformación unitaria a corte γ_m y la deformación axial ϵ_x.

Para obtener una relación entre las constantes E, ν y G, se recuerda que, por la ley de Hooke, $\gamma_m = \tau_m/G$ y que, para una carga axial, $\epsilon_x = \sigma_x/E$. La ecuación (2.41) puede escribirse entonces como

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

o

$$\frac{E}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{\tau_m} \tag{2.42}$$

De la figura 1.40, se sabe que $\sigma_x = P/A$ y que $\tau_m = P/2A$, donde A es el área de la sección transversal del miembro. Por lo tanto, se tiene que $\sigma_x/\tau_m = 2$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2.42) y dividiendo ambos miembros entre 2, se obtiene la relación

$$\boxed{\frac{E}{2G} = 1 + \nu} \tag{2.43}$$

que puede usarse para determinar una de las constantes E, ν o G a partir de las otras dos. Por ejemplo, despejando G de la ecuación (2.43), se tiene que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{2.43$'$}$$

*2.16 RELACIONES DE ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA MATERIALES COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS

Los materiales compuestos reforzados con fibras se analizaron brevemente en la sección 2.5. En ese momento se explicó que estos materiales se obtienen encapsulando fibras de un material resistente y rígido en un material más débil y blando, que se conoce como *matriz*. También se dijo que la relación entre el esfuerzo normal y la corriente deformación unitaria normal creada en una lámina o capa de un material compuesto depende de la dirección en que se aplica la carga. Diferentes módulos de elasticidad E_x, E_y y E_z se requieren, pues, para describir la relación entre el esfuerzo normal y la deformación normal, de acuerdo a si la carga se aplica en una dirección paralela a las fibras, en una dirección perpendicular a la capa, o en la dirección transversal.

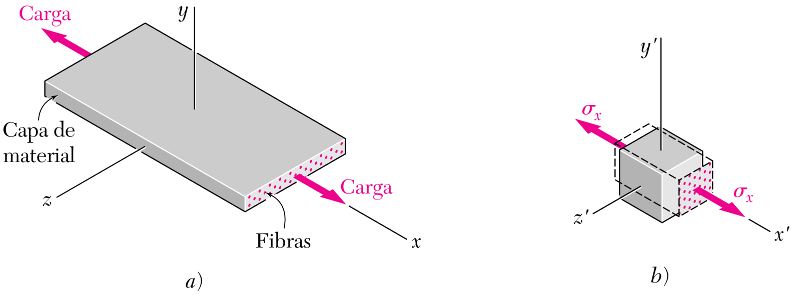


Figura 2.55

Se considera de nuevo la capa de material compuesto analizada en la sección 2.5 y se le someterá a una carga uniaxial de tensión paralela a sus fibras, es decir, en la dirección x (figura 2.55*a*). Para simplificar el análisis, se supondrá que las propiedades de las fibras y de la matriz han sido combinadas en un material homogéneo ficticio equivalente que posee estas propiedades combinadas. Considere ahora un pequeño elemento de esa capa de material combinado (figura 2.55*b*). Se denota con σ_x el esfuerzo normal correspondiente y se observa que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Como se indicó en la sección 2.5, la deformación normal correspondiente en la dirección x es $\epsilon_x = \sigma_x/E_x$, donde E_x es el módulo de elasticidad del material compuesto en la dirección x. Como se vio para los materiales isotrópicos, la elongación del material en la dirección x se acompaña de contracciones en las direcciones y y z. Tales contracciones dependen de la colocación de las fibras en la matriz y generalmente serán diferentes. Se deduce que las deformaciones laterales ϵ_y y ϵ_z también serán diferentes, así como también lo serán las relaciones de Poisson correspondientes:

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \qquad \text{y} \qquad \nu_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.44}$$

Observe que el primer subíndice en cada una de las relaciones de Poisson ν_{xy} y ν_{xz} en las ecuaciones (2.44) se refiere a la dirección de la carga, y el segundo a la dirección de la contracción.

De lo anterior se deduce que, en el caso de una *carga multiaxial* de una capa de material compuesto, pueden utilizarse ecuaciones similares a las ecuaciones (2.28) de la sección 2.12 para describir la relación esfuerzo-deformación. En el presente caso, no obstante, se involucrarán tres valores diferentes del módulo de elasticidad y seis valores de la relación de Poisson. Se escribe

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Puede considerarse que las ecuaciones (2.45) definen la transformación del esfuerzo en deformación para una capa dada. Se deduce de la propiedad general de dicha transformación que los coeficientes de las componentes de esfuerzo son simétricos, es decir, que

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \qquad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \qquad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \tag{2.46}$$

Estas ecuaciones muestran que, aunque diferentes, las relaciones de Poisson ν_{xy} y ν_{yx} no son independientes. Cualquiera de ellas puede obtenerse de la otra si los valores correspondientes del módulo de elasticidad son conocidos. Lo mismo es cierto para ν_{yz} y ν_{zy} y para ν_{zx} y ν_{xz}.

Considere ahora el efecto de la presencia de los esfuerzos cortantes sobre las caras de un pequeño elemento de la capa combinada. Como se señaló en la sección 2.14 en el caso de materiales isotrópicos, estos esfuerzos vienen en pares de vectores iguales y opuestos aplicados a lados opuestos del elemento dado y no tienen efecto sobre las deformaciones normales. Por lo tanto, las ecuaciones (2.45) permanecen válidas. Sin embargo, los esfuerzos cortantes, crearán deformaciones a corte que se definen por ecuaciones similares a las últimas tres de las ecuaciones (2.38) de la sección 2.14, excepto que ahora deben utilizarse tres diferentes valores del módulo de rigidez, G_{xy}, G_{yz} y G_{zx}. Se tiene que

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \tag{2.47}$$

El hecho de que las tres componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z se expresen sólo en términos de los esfuerzos normales y no dependan de cualesquiera de los esfuerzos cortantes, caracteriza a los *materiales ortotrópicos* y los distingue de otros materiales anisotrópicos.

Como se vio en la sección 2.5, un *laminado* plano se obtiene superponiendo un cierto número de capas o láminas. Si las fibras en todas las capas reciben la misma orientación para resistir mejor una carga axial de tensión, el laminado mismo será ortotrópico. Si la estabilidad lateral del laminado se incrementa colocando algunas de sus capas de tal manera que sus fibras estén en ángulo recto con las fibras de las otras capas, el laminado resultante también será ortotrópico. Por otra parte, si alguna de las capas de un laminado se coloca de tal manera que sus fibras no sean ni paralelas ni perpendiculares a las fibras de las otras capas, el laminado, en general, no será ortotrópico.†

---

† Para más información sobre materiales compuestos reforzados con fibras, véase Hyer, M. W., *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, McGraw-Hill, Nueva York, 1998.

EJEMPLO 2.11

Un cubo de 60 mm, elaborado con epóxico reforzado con fibras de grafito con las fibras alineadas en la dirección x, se sujeta a una carga compresiva de 140 kN en la dirección x. Las propiedades del material compuesto son: $E_x = 155.0$ GPa, $E_y = 12.10$ GPa, $E_z = 12.10$ GPa, $\nu_{xy} = 0.248$, $\nu_{xz} = 0.248$ y $\nu_{yz} = 0.458$. Encuentre los cambios en las dimensiones del cubo, sabiendo que *a*) el cubo es libre de expandirse en las direcciones y y z (figura 2.56); *b*) el cubo es libre de expandirse en la dirección z, pero está restringido de expandirse en la dirección y por dos placas fijas sin fricción (figura 2.57).

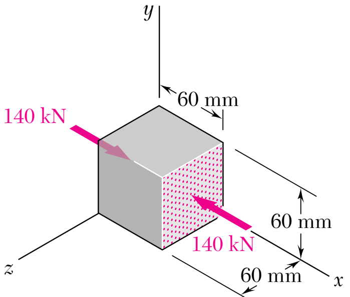


Figura 2.56

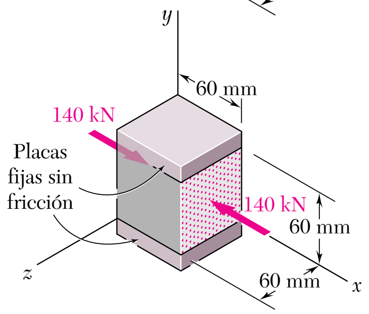


Figura 2.57

a) Libre en las direcciones y y z. Primero se determina el esfuerzo σ_x en la dirección de la carga. Se tiene que

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3\ \text{N}}{(0.060\ \text{m})(0.060\ \text{m})} = -38.89\ \text{MPa}$$

Como el cubo no está cargado ni restringido en las direcciones y y z, se tiene que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Así, los miembros de la derecha de las ecuaciones (2.45) se reducen a sus primeros términos. Sustituyendo los datos recibidos en estas ecuaciones, se escribe

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38.89\ \text{MPa}}{155.0\ \text{GPa}} = -250.9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.89\ \text{MPa})}{155.0\ \text{GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.69\ \text{MPa})}{155.0\ \text{GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

Los cambios en las dimensiones del cubo se obtienen multiplicando las deformaciones unitarias correspondientes por la longitud $L = 0.060$ m del lado del cubo:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250.9 \times 10^{-6})(0.060\ \text{m}) = -15.05\ \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060\ \text{m}) = +3.73\ \mu\text{m}$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060\ \text{m}) = +3.73\ \mu\text{m}$$

b) Libre en la dirección z, restringido en la dirección y. El esfuerzo en la dirección x es el mismo que en la parte *a*, es decir, $\sigma_x = -38.89$ MPa. Puesto que el cubo es libre de expandirse en la dirección z como en la parte *a*, de nuevo se tiene $\sigma_z = 0$. Pero ya que el cubo está ahora restringido en la dirección y, se debe esperar un esfuerzo σ_y diferente de cero. Por otra parte, debido a que el cubo no puede expandirse en la dirección y, debe tenerse $\delta_y = 0$ y, por lo tanto, $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$. Haciendo $\sigma_z = 0$ y $\epsilon_y = 0$ en la segunda de las ecuaciones (2.45), despejando esa ecuación para σ_y y sustituyendo los datos recibidos se tiene que

$$\sigma_y = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy}\sigma_x = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248)(-38.89\ \text{MPa})$$
$$= -752.9\ \text{kPa}$$

Ahora que las tres componentes del esfuerzo se han determinado, se utilizarán la primera y la última de las ecuaciones (2.45) para calcular las componentes de deformación ϵ_x y ϵ_z. Pero la primera de estas ecuaciones contiene la relación de Poisson ν_{yx} y, como se vio antes, esta razón *no es igual* a la relación ν_{xy} que estuvo entre los datos recibidos. Para calcular ν_{yx} se emplea la primera de las ecuaciones (2.46) y se escribe

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy} = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248) = 0.01936$$

Haciendo a $\sigma_z = 0$ en la primera y en la tercera ecuaciones (2.45) y sustituyendo en ellas los valores dados de E_x, E_y, ν_{xz} y ν_{yz}, así como los valores obtenidos de σ_x, σ_y y ν_{yx}, se tiene

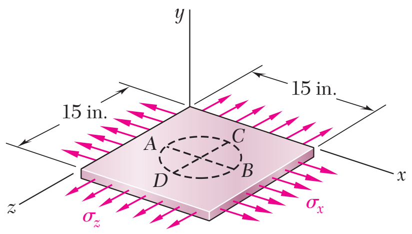
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} = \frac{-38.89\ \text{MPa}}{155.0\ \text{GPa}} - \frac{(0.01936)(-752.9\ \text{kPa})}{12.10\ \text{GPa}} = -249.7 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = -\frac{(0.248)(-38.89\ \text{MPa})}{155.0\ \text{GPa}} - \frac{(0.458)(-752.9\ \text{kPa})}{12.10\ \text{GPa}} = +\,90.72 \times 10^{-6}$$

Los cambios en las dimensiones del cubo se obtienen multiplicando las deformaciones correspondientes por la longitud $L = 0.060$ m de la arista del cubo:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249.7 \times 10^{-6})(0.060\ \text{m}) = -14.98\ \mu\text{m}$$
$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0.060\ \text{m}) = 0$$
$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90.72 \times 10^{-6})(0.060\ \text{m}) = +5.44\ \mu\text{m}$$

Al comparar los resultados de las partes *a* y *b*, se advierte que la diferencia entre los valores obtenidos para la deformación δ_x en la dirección de las fibras es despreciable. No obstante, la diferencia entre los valores obtenidos para la deformación lateral δ_z no es despreciable. Esta deformación es claramente mayor cuando el cubo se restringe de deformarse en la dirección y.



PROBLEMA MODELO 2.5

Un círculo con diámetro $d = 9$ in., cuyo espesor es $t = \frac{3}{4}$ in., se marca en una placa de aluminio sin esforzar. Las fuerzas que actúan después en el plano de la placa causan esfuerzos normales $\sigma_x = 12$ ksi y $\sigma_z = 20$ ksi. Para $E = 10 \times 10^6$ psi y $\nu = \frac{1}{3}$, determine el cambio en *a*) la longitud del diámetro *AB*, *b*) la longitud del diámetro *CD*, *c*) el espesor de la placa, *d*) el volumen de la placa.

SOLUCIÓN

Ley de Hooke. Advierta que $\sigma_y = 0$. Utilizando las ecuaciones (2.28) se encuentra que la deformación en cada una de las direcciones coordenadas es

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[(12 \text{ ksi}) - 0 - \frac{1}{3}(20 \text{ ksi})\right] = +0.533 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[-\frac{1}{3}(12 \text{ ksi}) + 0 - \frac{1}{3}(20 \text{ ksi})\right] = -1.067 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[-\frac{1}{3}(12 \text{ ksi}) - 0 + (20 \text{ ksi})\right] = +1.600 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

***a*) Diámetro *AB*.** El cambio en longitud es $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$.

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (+0.533 \times 10^{-3} \text{ in./in.})(9 \text{ in.})$$

$$\delta_{B/A} = +4.8 \times 10^{-3} \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

***b*) Diámetro *CD*.**

$$\delta_{C/D} = \epsilon_z d = (+1.600 \times 10^{-3} \text{ in./in.})(9 \text{ in.})$$

$$\delta_{C/D} = +14.4 \times 10^{-3} \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

***c*) Espesor.** Recordando que $t = \frac{3}{4}$ in., se tiene que

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-1.067 \times 10^{-3} \text{ in./in.})(\tfrac{3}{4} \text{ in.})$$

$$\delta_t = -0.800 \times 10^{-3} \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

***e*) Volumen de la placa.** Utilizando la ecuación (2.30), se tiene que

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (+0.533 - 1.067 + 1.600)10^{-3} = +1.067 \times 10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = +1.067 \times 10^{-3}[(15 \text{ in.})(15 \text{ in.})(\tfrac{3}{4} \text{ in.})] \; \Delta V = +0.187 \times \text{in.}^3 \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.61 En un ensayo estándar a tensión se somete una varilla de aluminio de 20 mm de diámetro a una fuerza de tensión de $P = 30$ kN. Si $\nu = 0.35$ y $E = 70$ GPa, determine *a*) la elongación de la varilla en una longitud calibrada de 150 mm, *b*) el cambio en el diámetro de la varilla.

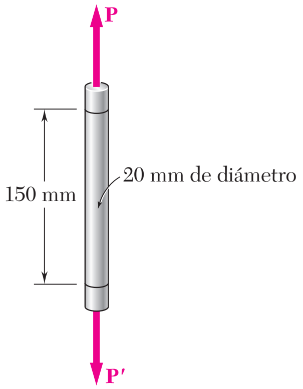


Figura *P2.61*

2.62 Una varilla con 20 mm de diámetro, hecha de un plástico experimental, se somete a una fuerza de tensión con una magnitud $P = 6$ kN. Puesto que se observa un alargamiento de 14 mm y una disminución en diámetro de 0.85 mm en una longitud calibrada de 150 mm, determine el módulo de elasticidad, el módulo de rigidez y la relación de Poisson para el material.

2.63 Una carga de tensión de 600 lb se aplica a una probeta elaborada con una placa plana de acero con $\frac{1}{16}$ in. de grosor ($E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$). Determine el cambio resultante *a*) en la longitud calibrada de 2 in., *b*) en el ancho de la porción *AB* de la probeta, *c*) en el grosor de la porción *AB*, *d*) en el área de la sección transversal de la porción *AB*.

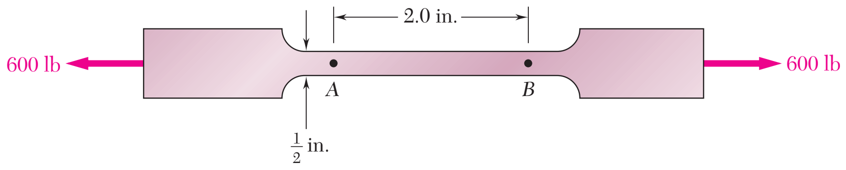


Figura P2.63

2.64 Un tramo de 6 ft de tubería de acero de 12 in. de diámetro exterior y $\frac{1}{2}$ in. de espesor de pared se emplea como columna corta y lleva una carga axial céntrica de 300 kips. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine *a*) el cambio de longitud de la tubería, *b*) el cambio en su diámetro exterior, *c*) el cambio en su espesor de pared.

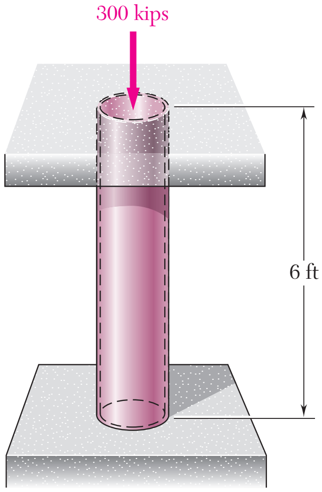


Figura P2.64

2.65 El cambio de diámetro de un perno grande de acero se mide cuidadosamente mientras se aprieta la tuerca. Si se sabe $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$, determine la fuerza interna en el perno, si se observa que el diámetro disminuye en 13 μm.

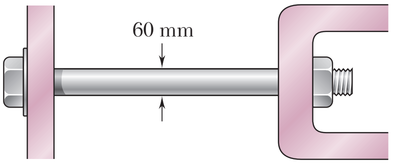


Figura P2.65

2.66 Una placa de aluminio ($E = 74$ GPa y $\nu = 0.33$) se somete a una carga axial céntrica que causa un esfuerzo normal σ. Si se sabe que, antes de aplicar la carga, se inscribió sobre la placa una pendiente 2:1, determine la pendiente de la línea cuando $\sigma = 125$ MPa.

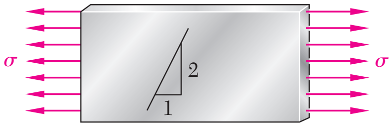


Figura *P2.66*

2.67 A la varilla de aluminio *AD* se le ajusta una coraza que se emplea para aplicar una presión hidrostática de 6 000 psi a la porción *BC* de 12 in. de la varilla. Si se sabe que $E = 10.1 \times 10^6$ psi y que $\nu = 0.36$, determine *a*) el cambio en la longitud total *AD*, *b*) el cambio en el diámetro del punto medio de la varilla.

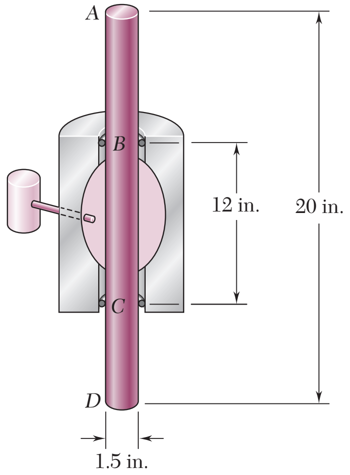


Figura P2.67

2.68 Para la varilla del problema 2.67, determine las fuerzas que deben aplicarse en sus extremos *A* y *D* *a*) si la deformación axial en la porción *BC* de la varilla debe permanecer en cero mientras se aplica la presión hidrostática, *b*) si la longitud total *AD* de la varilla debe permanecer sin cambios.

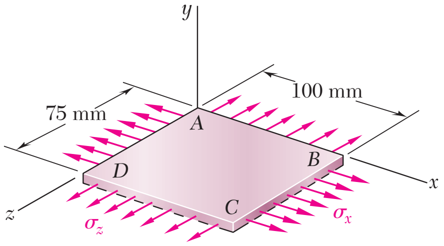


Figura P2.69

2.69 Una tela utilizada en estructuras infladas con aire se sujeta a una carga biaxial que resulta en esfuerzos normales $\sigma_x = 120$ MPa y $\sigma_z = 160$ MPa. Si se sabe que las propiedades de la tela pueden aproximarse a $E = 87$ GPa y $\nu = 0.34$, determine el cambio en longitud de *a*) el lado *AB*, *b*) el lado *BC*, *c*) la diagonal *AC*.

2.70 El bloque mostrado en la figura es de una aleación de magnesio para la que $E = 45$ GPa y $\nu = 0.35$. Si se sabe que $\sigma_x = -180$ MPa, determine *a*) la magnitud de σ_y para la cual el cambio en la altura del bloque será cero, *b*) el cambio correspondiente en el área de la cara *ABCD*, *c*) el cambio correspondiente en el volumen del bloque.

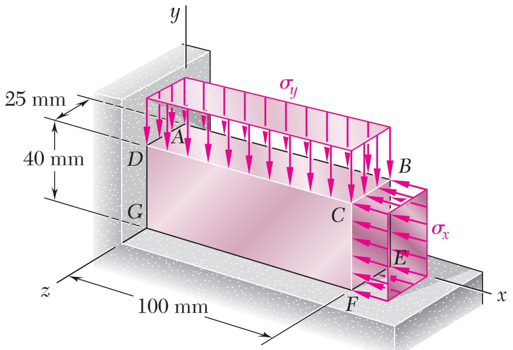


Figura P2.70

2.71 La placa homogénea *ABCD* se encuentra sujeta a carga biaxial como lo muestra la figura. Se sabe que $\sigma_z = \sigma_0$ y que el cambio en la longitud de la placa en la dirección x debe ser cero, es decir, $\epsilon_x = 0$. Si E es el módulo de elasticidad y ν la relación de Poisson, calcule *a*) la magnitud requerida de σ_x, *b*) la razón σ_0/ϵ_z.

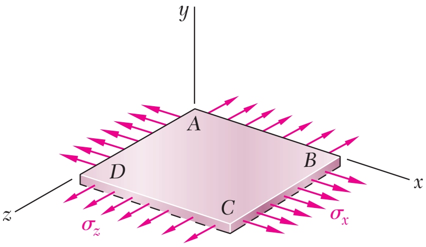


Figura *P2.71*

2.72 Para un elemento sometido a carga axial, exprese la deformación unitaria normal ϵ' en una dirección que forma un ángulo de 45° con el eje de la carga en términos de la deformación axial ϵ_x a partir de *a*) la comparación de las hipotenusas de los triángulos mostrados en la figura 2.54, que representan, respectivamente, a un elemento antes y después de la deformación; *b*) el uso de los valores de los esfuerzos correspondientes σ' y σ_x que se muestran en la figura 1.40, y la ley de Hooke generalizada.

2.73 En muchas situaciones se sabe que el esfuerzo normal en una dirección dada es cero, por ejemplo $\sigma_z = 0$ en el caso de la placa delgada mostrada en la figura. Para este caso, que se conoce como *esfuerzo plano*, demuestre que si las deformaciones ϵ_x y ϵ_y se han determinado experimentalmente, σ_x, σ_y y σ_z se pueden expresar como sigue:

$$\sigma_x = E\frac{\epsilon_x + \nu\epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E\frac{\epsilon_y + \nu\epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

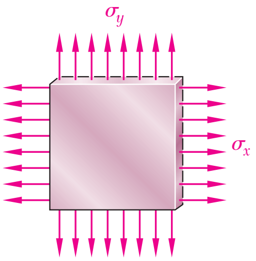


Figura P2.73

2.74 En muchas situaciones las restricciones físicas evitan que ocurra deformación unitaria en una dirección dada, por ejemplo $\epsilon_z = 0$ en el caso mostrado, donde el movimiento longitudinal del prisma se evita en todos los puntos. Las secciones planas perpendiculares al eje longitudinal permanecen planas y a la misma distancia. Demuestre que para esta situación, que se conoce como *deformación plana*, es posible expresar σ_z, ϵ_x y ϵ_y como sigue:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

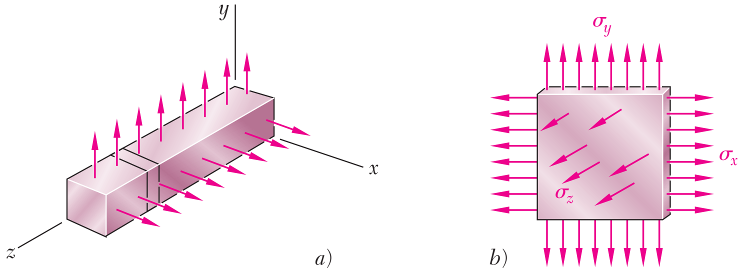


Figura P2.74

2.75 El bloque de plástico mostrado en la figura está adherido a una placa fija y a una placa rígida horizontal a la que se aplica una fuerza **P**. Si se sabe que para el plástico usado $G = 55$ ksi, determine la deflexión de la placa cuando $P = 9$ kips.

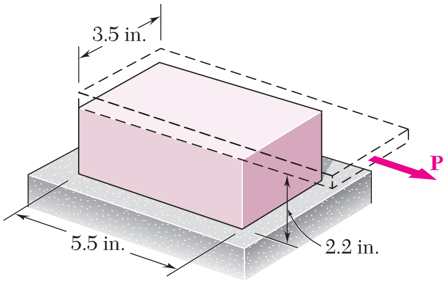


Figura P2.75

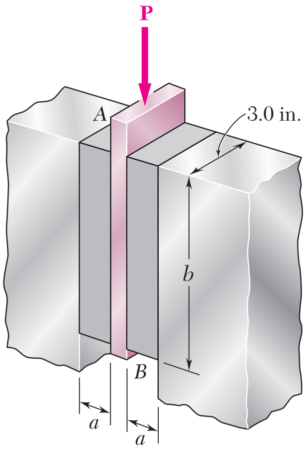
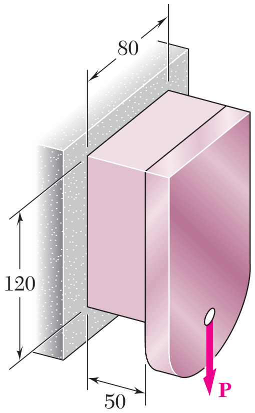


Figura P2.76

2.76 Una unidad para aislamiento de vibraciones se compone de dos bloques de caucho duro adheridos a la placa AB y a soportes rígidos como se muestra en la figura. Para el tipo y grado de caucho usado $\tau_{\text{perm}} = 220$ psi y $G = 1\,800$ psi. Si se sabe que una fuerza vertical céntrica con magnitud $P = 3.2$ kips debe causar una deflexión vertical de 0.1 in. en la placa AB, determine las dimensiones mínimas permisibles a y b del bloque.

2.77 El bloque de plástico mostrado en la figura está adherido a un soporte rígido y a una placa vertical a la que se aplica una fuerza **P** de 240 kN. Si se sabe que para el plástico usado $G = 1\,050$ MPa, determine la deflexión de la placa.



Dimensiones en mm

Figura P2.77

2.78 ¿Cuál es la carga **P** que debe aplicarse a la placa del problema 2.77 para producir una deflexión de 1.5 mm?

2.79 Dos bloques de caucho con un módulo de rigidez $G = 1.75$ ksi están unidos a soportes rígidos y a la placa AB. Si se sabe que $c = 4$ in. y $P = 10$ kips, determine las dimensiones mínimas permisibles a y b de los bloques si el esfuerzo cortante en el caucho no debe exceder de 200 psi y la deflexión de la placa debe ser al menos de $\frac{3}{16}$ in.

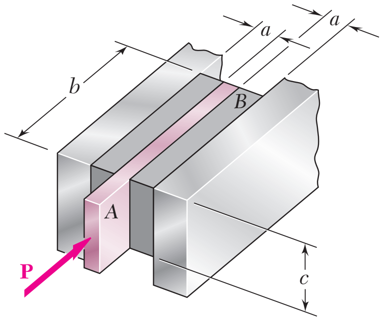


Figura *P2.79* y *P2.80*

2.80 Dos bloques de caucho con un módulo de rigidez $G = 1.50$ ksi están unidos a soportes rígidos y a la placa AB. Si se sabe que $b = 8$ in. y $c = 5$ in., determine la carga máxima permisible P y el grosor mínimo permisible a de los bloques si el esfuerzo cortante en el caucho no debe exceder de 210 psi y la deflexión de la placa debe ser al menos de $\frac{1}{4}$ in.

2.81 Un soporte elastomérico ($G = 0.9$ MPa) se emplea para apoyar una viga de un puente, como se muestra en la figura, para suministrar flexibilidad durante terremotos. La viga no debe desplazarse más de 10 mm cuando una carga lateral de 22 kN sea aplicada como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo cortante permisible es de 420 kPa, determine *a*) la dimensión b mínima permisible, *b*) el mínimo grosor a requerido.

2.82 Para el apoyo elastomérico del problema 2.81 con $b = 220$ mm y $a = 30$ mm, determine el módulo de cortante G y el esfuerzo cortante τ para una carga lateral máxima $P = 19$ kN y un desplazamiento máximo $\delta = 12$ mm.

***2.83** Una esfera sólida de acero de 6 in. de diámetro se introduce en el océano hasta un punto en el que la presión es de 7.1 ksi (alrededor de 3 millas bajo la superficie). Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine *a*) la disminución en el diámetro de la esfera, *b*) la disminución en el volumen de la esfera, *c*) el porcentaje de incremento en la densidad de la esfera.

***2.84** *a*) Para la carga axial mostrada en la figura, determine el cambio en altura y el cambio en volumen del cilindro de latón mostrado. *b*) Resuelva el inciso *a*), con el supuesto de que la carga es hidrostática con $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70$ MPa.

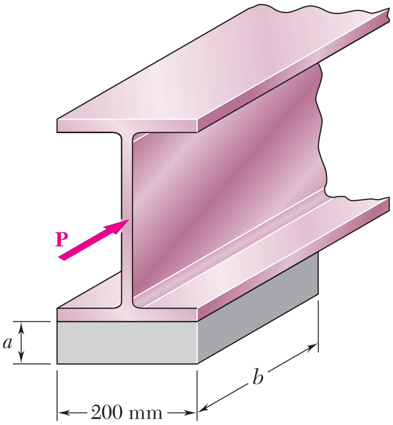


Figura P2.81

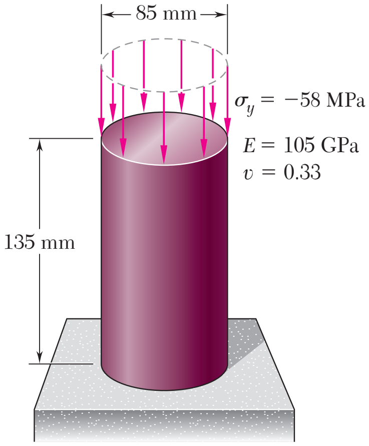


Figura P2.84

***2.85** Determine la dilatación e y el cambio de volumen del tramo de 200 mm de la varilla mostrada en la figura, si *a*) la varilla es de acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$, *b*) la varilla es de aluminio con $E = 70$ GPa y $\nu = 0.35$.

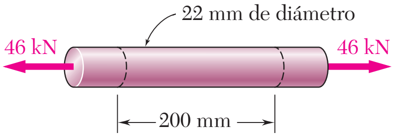


Figura *P2.85*

***2.86** Determine el cambio de volumen de la sección calibrada de 2 in. AB del problema 2.63, *a*) calculando la dilatación del material, *b*) restando el volumen original de la porción AB de su volumen final.

***2.87** Un soporte para aislamiento de vibraciones se compone de una varilla A con radio $R_1 = 10$ mm y un tubo B con radio interior $R_2 = 25$ mm adheridos a un cilindro hueco de caucho con 80 mm de longitud y con un módulo de rigidez $G = 12$ MPa. Determine la fuerza máxima permisible **P** que puede aplicarse a la varilla A si su deflexión no debe exceder 2.50 mm.

***2.88** Un soporte para aislamiento de vibraciones consiste de una varilla A con radio R_1 y un tubo B con radio interior R_2 adheridos a un cilindro hueco de caucho con 80 mm de longitud y con un módulo de rigidez $G = 10.93$ MPa. Determine el valor requerido de la razón R_2/R_1 si una fuerza **P** de 10 kN debe causar una deflexión de 2 mm en la varilla A.

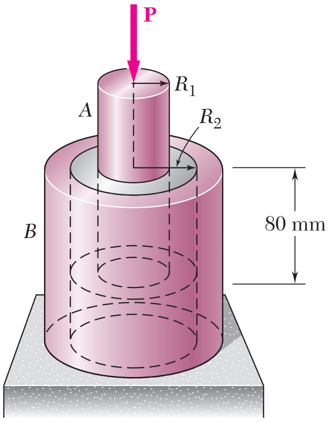


Figura *P2.87* y P2.88

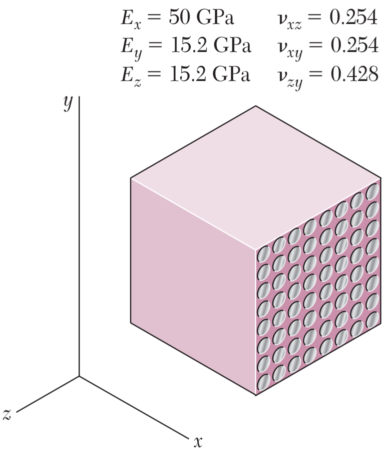


Figura P2.89

***2.89** Un cubo de material compuesto con lados de 40 mm y con las propiedades indicadas en la figura está fabricado en fibras de polímero vítreo alineadas en la dirección x. El cubo está restringido contra las deformaciones en las direcciones y y z y se somete a una carga de tensión de 65 kN en la dirección x. Determine *a*) el cambio en la longitud del cubo en la dirección x, *b*) los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z.

***2.90** El cubo de material compuesto del problema 2.89 está restringido contra la deformación en la dirección z y está estirado en 0.035 mm en la dirección x debido a una carga de tensión en dicha dirección. Determine *a*) los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z, *b*) el cambio en dimensión en la dirección y.

***2.91** Las constantes del material E, G, k y ν están relacionadas por las ecuaciones (2.33) y (2.43). Muestre que cualquiera de estas constantes puede expresarse en términos de cualesquiera otras dos constantes. Por ejemplo, demuestre que *a*) $k = GE/(9G - 3E)$ y *b*) $\nu = (3k - 2G)/(6k + 2G)$.

***2.92** Muestre que para cualquier material dado, la razón G/E del módulo de rigidez sobre el módulo de elasticidad, siempre es menor que $\frac{1}{2}$ pero mayor que $\frac{1}{3}$. [*Sugerencia*: Utilice la ecuación (2.43) y la sección 2.13.]

2.17 DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO Y DE LA DEFORMACIÓN BAJO CARGA AXIAL. PRINCIPIO DE SAINT-VENANT

Se ha supuesto, hasta ahora, que en cualquier elemento cargado axialmente, los esfuerzos normales se encuentran distribuidos de manera uniforme en cualquier sección perpendicular al eje del elemento. Como se vio en la sección 1.5, tal suposición puede estar bastante equivocada en la inmediata vecindad de los puntos de aplicación de las cargas. Sin embargo, la determinación de los esfuerzos en una sección dada de un elemento requiere de la solución de un problema estáticamente indeterminado.

En la sección 2.9 se estudió que los problemas estáticamente indeterminados que involucran la determinación de *fuerzas* pueden resolverse considerando las *deformaciones* causadas por estas fuerzas. Por lo tanto, es razonable concluir que la determinación de los *esfuerzos* en un elemento requiere del análisis de las *deformaciones* producidas por los esfuerzos en el elemento. En esencia, éste es el enfoque encontrado en los libros de texto avanzados, donde la teoría matemática de la elasticidad se emplea para determinar la distribución de esfuerzos que corresponde a varios modos de aplicación de las cargas en los extremos de un elemento. Dadas las limitadas herramientas matemáticas que se tienen a la disposición, el análisis de esfuerzos se restringirá al caso particular de dos placas rígidas que se emplean para transmitir las cargas a un elemento elaborado con un material isotrópico homogéneo (figura 2.58).

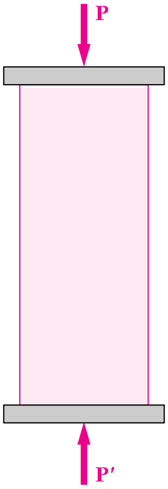


Figura 2.58

Si las cargas se aplican en el centro de cada placa,† las placas se moverán una hacia la otra sin girar, acortando el elemento y aumentando su ancho y espesor. Es razonable suponer que el elemento permanecerá recto, que las secciones planas seguirán planas, y que todos los elementos del miembro

---

† Dicho con mayor precisión: la línea común de acción de las cargas deberá pasar a través del centroide de la sección transversal (confróntese la sección 1.5).

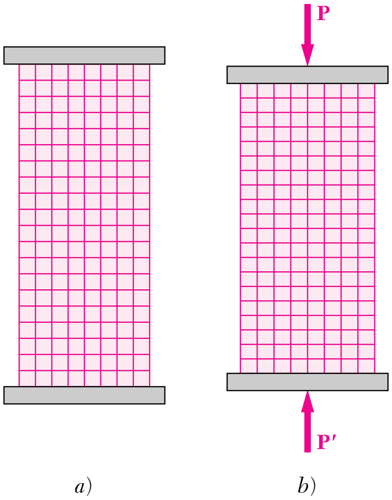


Figura 2.59

se deformarán de la misma manera, ya que tal suposición es claramente compatible con las condiciones dadas. Esto se ilustra en la figura 2.59, que muestra un modelo de caucho antes y después de la carga.† Ahora, si todos los elementos se deforman de la misma manera, la distribución de deformaciones unitarias a través del miembro debe ser uniforme. En otras palabras, la deformación unitaria axial ϵ_y y la deformación unitaria lateral $\epsilon_x = -\nu\epsilon_y$ son constantes. Pero, si los esfuerzos no sobrepasan el límite de proporcionalidad, se aplica la ley de Hooke y puede escribirse $\sigma_y = E\epsilon_y$, de lo que sigue que el esfuerzo normal σ_y también es constante. Por lo tanto, la distribución de esfuerzos es uniforme a través del miembro y, en cualquier punto,

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{\text{prom}} = \frac{P}{A}$$

Por otra parte, si las cargas están concentradas, como se ilustra en la figura 2.60, los elementos en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas se encuentran sometidos a esfuerzos muy grandes, mientras que otros elementos cerca de los extremos del miembro no están afectados por la carga. Esto puede verificarse observando que grandes deformaciones y, por lo tanto, grandes esfuerzos ocurren cerca de los puntos de aplicación de las cargas, mientras que no ocurren deformaciones en las esquinas. Sin embargo, cuando se consideran los elementos cada vez más lejos de los extremos, se nota una igualación progresiva de las deformaciones involucradas y, por lo tanto, una distribución casi uniforme de las deformaciones y de los esfuerzos a través de una sección del miembro. Esto se ilustra mejor en la figura 2.61, la cual muestra el resto del cálculo por métodos matemáticos avanzados de la distribución de esfuerzos a través de

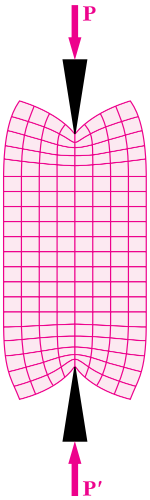


Figura 2.60

---

† Obsérvese que para elementos largos y esbeltos, es posible otra configuración y, de hecho, prevalecen si la carga es lo suficientemente grande. El elemento se pandea y se curva. Esto se analizará en mayor detalle en el capítulo 10.

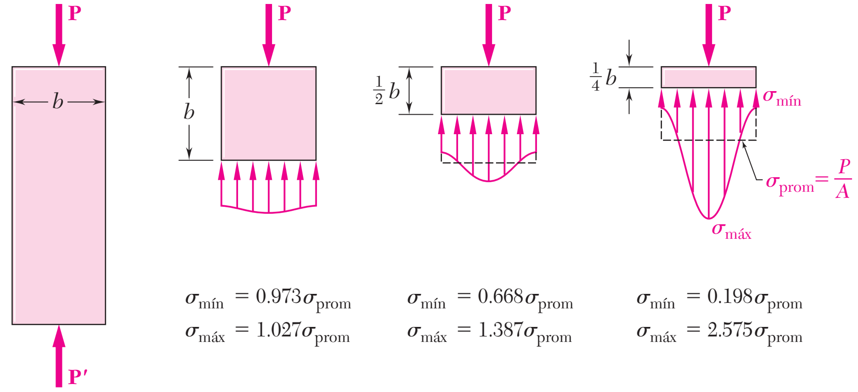

P
P
P
P
b
b
$\frac{1}{2}b$
$\frac{1}{4}b$
P'
$\sigma_{\text{mín}}$
$\sigma_{\text{prom}} = \frac{P}{A}$
$\sigma_{\text{máx}}$
$\sigma_{\text{mín}} = 0.973\sigma_{\text{prom}}$
$\sigma_{\text{máx}} = 1.027\sigma_{\text{prom}}$
$\sigma_{\text{mín}} = 0.668\sigma_{\text{prom}}$
$\sigma_{\text{máx}} = 1.387\sigma_{\text{prom}}$
$\sigma_{\text{mín}} = 0.198\sigma_{\text{prom}}$
$\sigma_{\text{máx}} = 2.575\sigma_{\text{prom}}$

Figura 2.61

varias secciones de una placa rectangular delgada sometida a cargas concentradas. Se advierte que a una distancia b de cada extremo, donde b es el ancho de la placa, la distribución de esfuerzos es casi uniforme a través de la sección, y el valor del esfuerzo σ_y en cualquier punto de esa sección puede suponerse igual al valor promedio P/A. Por consiguiente, a una distancia igual o mayor que el ancho del elemento, la distribución de los esfuerzos a través de una sección dada es la misma, sea que el elemento esté cargado como en la figura 2.58 o en la figura 2.60. En otras palabras, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos puede suponerse independiente del modo de aplicación de la carga. Este enunciado, que se aplica no sólo a cargas axiales sino prácticamente a cualquier tipo de carga, se conoce como el *principio de Saint-Venant*, en honor del matemático e ingeniero francés Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886).

En tanto que el principio de Saint-Venant permite reemplazar una carga dada por una más sencilla con el propósito de calcular los esfuerzos en un elemento estructural, deberán recordarse dos puntos importantes al aplicar este principio:

1. La carga real y la utilizada para calcular los esfuerzos deben ser *estáticamente equivalentes*.
2. Los esfuerzos no pueden calcularse, de esta manera, en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Deben utilizarse métodos teóricos o experimentales avanzados para determinar la distribución de esfuerzos en estas áreas.

Deberá observarse también que las placas empleadas para obtener una distribución uniforme de esfuerzos en el elemento de la figura 2.59 deben permitir la libre expansión del elemento hacia los lados. Así, las placas no pueden estar unidas rígidamente al elemento; debe suponerse que sólo están en contacto con él, y lo suficientemente lisas para no impedir la expansión lateral del elemento. Aun cuando tales condiciones de extremos pueden lograrse con un elemento a compresión, no pueden realizarse físicamente con uno en tensión. No importa, sin embargo, si puede fabricarse un aditamento que permita cargar un elemento de tal manera que la distribución de esfuerzos en el elemento sea uniforme. Lo importante es ser capaz de *imaginar un modelo* que permita tal distribución de esfuerzos, y tener este modelo en mente para que más tarde pueda comparárselo con las condiciones reales de carga.

2.18 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Como se vio en la sección precedente, los esfuerzos cerca de los puntos de aplicación de cargas concentradas pueden alcanzar valores mucho más grandes que el valor promedio del esfuerzo en el elemento. Cuando un elemento estructural contiene una discontinuidad, como un agujero o un cambio repentino en su sección transversal, también pueden ocurrir grandes esfuerzos localizados cerca de la discontinuidad. Las figuras 2.62 y 2.63 muestran la distribución de esfuerzos en las secciones críticas correspondientes a dos situaciones como las mencionadas. La figura 2.62 ilustra una barra plana con un *agujero circular* y muestra la distribución de esfuerzos en un corte que pasa a través del centro del agujero. La figura 2.63 ilustra una barra plana con dos porciones de diferentes anchos conectadas por *filetes*; muestra la distribución de esfuerzos en la parte más angosta de la conexión, donde ocurren los esfuerzos más altos.

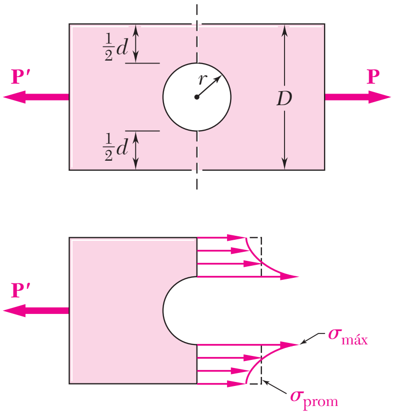


Figura 2.62 Distribución de esfuerzos cerca de un agujero circular en una barra plana bajo carga axial.

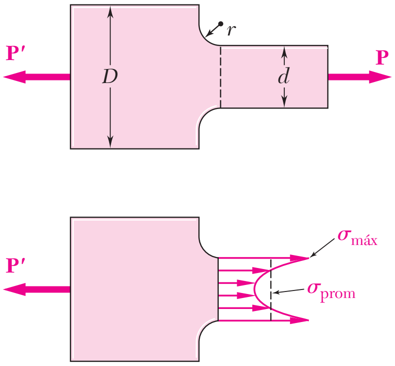
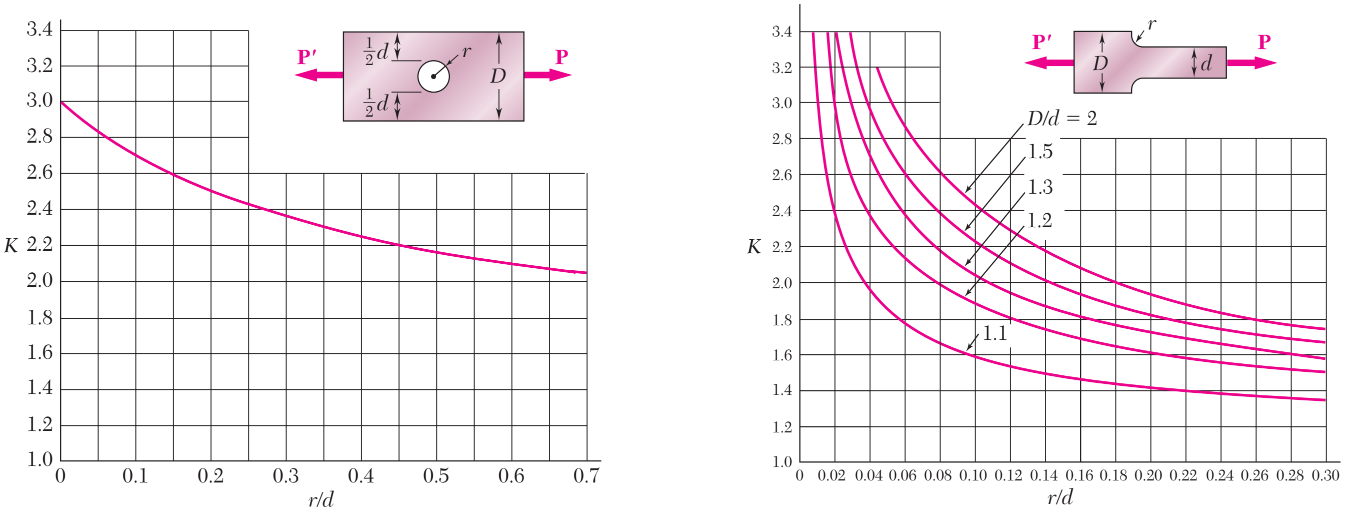


Figura 2.63 Distribución de esfuerzos cerca de los filetes en una barra plana bajo carga axial.

Estos resultados se obtuvieron en forma experimental por el método fotoelástico. Afortunadamente para el ingeniero que tiene que diseñar un elemento dado y no puede permitirse llevar a cabo dicho análisis, los resultados obtenidos son independientes del tamaño del elemento y del material utilizado; sólo dependen de las razones de los parámetros geométricos involucrados, es decir, de la razón r/d en el caso de un agujero circular, y de las razones r/d y D/d en el caso de los filetes. Además, el diseñador está más interesado en el *valor máximo* del esfuerzo en una sección dada, que en la distribución real de los esfuerzos en dicha sección, ya que su preocupación principal es determinar *si* el esfuerzo permisible será excedido bajo una carga dada, y no *dónde* se excederá este valor. Por este motivo, se define la razón

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{prom}}} \tag{2.48}$$

del esfuerzo máximo sobre el esfuerzo promedio calculado en la sección crítica (la más angosta) de la discontinuidad. Esta razón se conoce como el *factor de concentración de esfuerzos* de la discontinuidad dada. Los factores de concentración de esfuerzo pueden calcularse de una vez por todas en términos de las razones de los parámetros geométricos involucrados, y los resultados obtenidos pueden ser expresados en la forma de tablas o gráficas, como se muestra en la figura 2.64. Para determinar el máximo esfuerzo que ocurre cerca de una discontinuidad en un elemento dado sometido a una carga axial P dada, el diseñador sólo necesita calcular el esfuerzo promedio $\sigma_{\text{prom}} = P/A$ en la sección crítica, y multiplicar el resultado obtenido por el valor apropiado del factor de concentración de esfuerzos K. Deberá observarse, sin embargo, que este procedimiento es válido sólo mientras $\sigma_{\text{máx}}$ no exceda el límite de proporcionalidad del material, ya que los valores de K graficados en la figura 2.64 se obtuvieron suponiendo una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria.



a) Barras planas con agujeros

b) Barras planas con filetes

Figura 2.64 Factores de concentración de esfuerzos para barras planas bajo carga axial†

Observe que el esfuerzo promedio debe calcularse en la sección más angosta, $\sigma_{\text{prom}} = P/td$ donde t es el espesor de la barra.

EJEMPLO 2.12

Determine la máxima carga axial **P** que puede soportar con seguridad una barra plana de acero que consta de dos porciones, ambas de 10 mm de espesor, y anchos de 40 y 60 cm, conectadas con filetes de radio $r = 8$ mm. Suponga un esfuerzo normal permisible de 165 MPa.

Primero se calculan las razones

$$\frac{D}{d} = \frac{60\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 1.50 \qquad \frac{r}{d} = \frac{8\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 0.20$$

Utilizando la curva en la figura 2.64*b* que corresponde a $D/d = 1.50$, se encuentra que el valor del factor de concentración de esfuerzo que corresponde a $r/d = 0.20$ es

$$K = 1.82$$

Llevando este valor a la ecuación (2.48) y despejando σ_{prom}, se tiene

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{1.82}$$

Pero $\sigma_{\text{máx}}$ no puede exceder el esfuerzo permisible $\sigma_{\text{perm}} = 165$ MPa. Sustituyendo este valor de $\sigma_{\text{máx}}$, se obtiene que el esfuerzo promedio de la porción más angosta ($d = 40$ mm) de la barra no deberá sobrepasar el valor

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{165\text{ MPa}}{1.82} = 90.7\text{ MPa}$$

Recordando que $\sigma_{\text{prom}} = P/A$, se tiene que

$$P = A\sigma_{\text{prom}} = (40\text{ mm})(10\text{ mm})(90.7\text{ MPa}) = 36.3 \times 10^3\text{ N}$$
$$P = 36.3\text{ kN}$$

---

† W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.

2.19 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Los resultados obtenidos en las secciones precedentes se basaron en la suposición de una relación lineal del esfuerzo y la deformación. En otras palabras, se supuso que el límite de proporcionalidad del material nunca fue excedido. Ésta es una suposición razonable en el caso de los materiales frágiles, que se fracturan sin ceder. En el caso de los materiales dúctiles, sin embargo, esta suposición implica que la resistencia a la cedencia del material no se excede. Las deformaciones permanecerán, entonces, dentro del rango elástico y el elemento estructural bajo consideración recuperará su forma original después de que todas las cargas hayan sido retiradas. Si, por otra parte, los esfuerzos en cualquier parte del elemento exceden la resistencia a la cedencia del material, ocurren deformaciones plásticas y la mayoría de los resultados en las anteriores secciones dejan de ser válidos. Por ello debe realizarse un análisis más profundo, basado en relaciones no lineales de esfuerzo y deformación.

Aunque un análisis que tenga en cuenta la relación real entre el esfuerzo y la deformación está más allá del alcance de este libro, se ganará una visión considerable del comportamiento plástico considerando un *material elastoplástico* idealizado para el que el diagrama esfuerzo-deformación consta de los dos segmentos en línea recta mostrados en la figura 2.65. Se nota que el diagrama de esfuerzo-deformación para el acero dulce en los rangos elástico y plástico es similar a esta idealización. Mientras que el esfuerzo σ sea menor que la resistencia a la cedencia σ_Y, el material se comporta elásticamente y obedece la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Cuando σ alcanza el valor σ_Y, el material empieza a fluir y continúa deformándose plásticamente bajo una carga constante. Si la carga se retira, la descarga ocurre a lo largo del segmento de recta CD paralelo a la porción inicial AY sobre la curva de carga. El segmento AD del eje horizontal representa la deformación unitaria correspondiente a la deformación permanente o deformación plástica resultante de la carga y descarga de la probeta. A pesar de que ningún material real se comporta exactamente como se muestra en la figura 2.65, este diagrama de esfuerzo-deformación será útil para analizar las deformaciones plásticas de materiales dúctiles como el acero dulce.

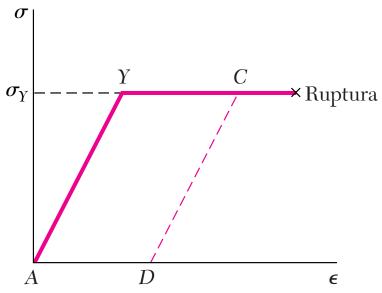


Figura 2.65

EJEMPLO 2.13

Una varilla de longitud $L = 500$ mm y área de sección transversal $A = 60\text{ mm}^2$ es de un material elastoplástico que tiene un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa en el rango elástico y un punto de cedencia $\sigma_Y = 300$ MPa. A la varilla se le somete a una carga axial hasta que se estira 7 mm; al llegar a ese punto la carga se retira. ¿Cuál es la deformación permanente resultante?

Con referencia al diagrama de la figura 2.65, se encuentra que la deformación máxima, representada por la abscisa del punto C, es

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{7\text{ mm}}{500\text{ mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

Por otra parte, el esfuerzo de cedencia, representado por la abscisa del punto Y, es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{300 \times 10^6\text{ Pa}}{200 \times 10^9\text{ Pa}} = 1.5 \times 10^{-3}$$

La deformación después de descargar está representada por la abscisa ϵ_D del punto D. Se observa de la figura 2.65 que

$$\begin{aligned} \epsilon_D &= AD = YC = \epsilon_C - \epsilon_Y \\ &= 14 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3} = 12.5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

La deformación permanente es la deformación δ_D correspondiente a la deformación ϵ_D. Se tiene que

$$\delta_D = \epsilon_D L = (12.5 \times 10^{-3})(500\text{ mm}) = 6.25\text{ mm}$$

EJEMPLO 2.14

Una varilla cilíndrica de 30 in. de largo con un área de sección transversal de $A_v = 0.075 \text{ in.}^2$ se coloca dentro de un tubo de la misma longitud y con área de sección transversal $A_t = 0.100 \text{ in}^2$. Los extremos de la varilla y del tubo están unidos a un soporte rígido por un lado, y a una placa rígida por el otro, como se muestra en el corte longitudinal de la figura 2.66. Se supone que tanto la varilla como el tubo son elastoplásticos, con módulos de elasticidad $E_v = 30 \times 10^6$ psi y $E_t = 15 \times 10^6$ psi, y resistencias a la cedencia $(\sigma_v)_Y = 36$ ksi y $(\sigma_t)_Y = 45$ ksi. Dibújese el diagrama de carga-deflexión para conjunto cuando se aplica una carga **P** a la placa como se muestra.

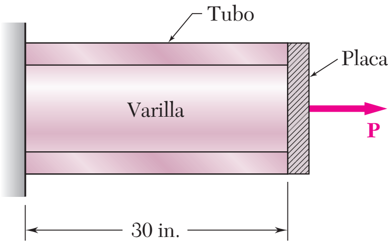


Figura 2.66

Primero se determina la fuerza interna y la elongación de la varilla cuando comienza a ceder:

$$(P_v)_Y = (\sigma_v)_Y A_v = (36 \text{ ksi})(0.075 \text{ in.}^2) = 2.7 \text{ kips}$$

$$(\delta_v)_Y = (\epsilon_v)_Y L = \frac{(\sigma_v)_Y}{E_v} L = \frac{36 \times 10^3 \text{ psi}}{30 \times 10^6 \text{ psi}}(30 \text{ in.})$$

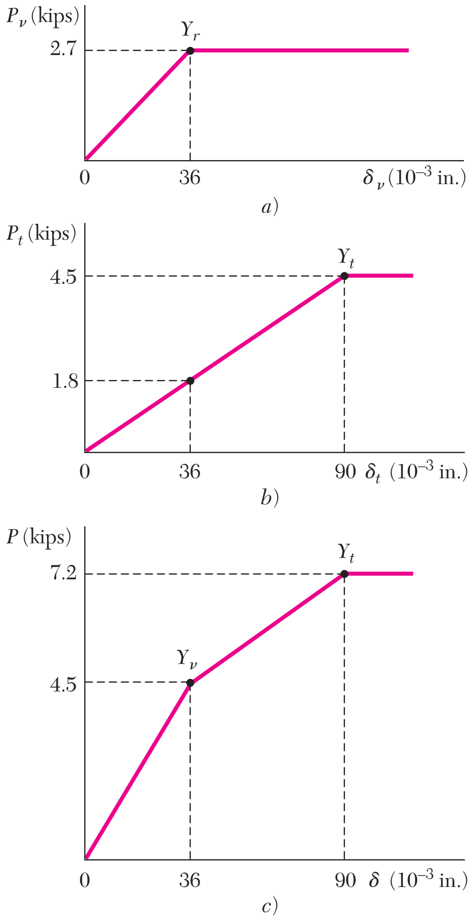
$$= 36 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

Puesto que el material es elastoplástico, el diagrama de fuerza-alargamiento *de la varilla* sólo consiste en una línea recta oblicua y una línea recta horizontal, como se muestra en la figura 2.67*a*. Siguiendo el mismo procedimiento para el tubo, se tiene que

$$(P_t)_Y = (\sigma_t)_Y A_t = (45 \text{ ksi})(0.100 \text{ in.}^2) = 4.5 \text{ kips}$$

$$(\delta_t)_Y = (\epsilon_t)_Y L = \frac{(\sigma_t)_Y}{E_t} L = \frac{45 \times 10^3 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}}(30 \text{ in.})$$

$$= 90 \times 10^{-3} \text{ in.}$$



a)

b)

c)

Figura 2.67

El diagrama de carga-deflexión del tubo sólo se muestra en la figura 2.67*b*. Observando que la carga y la deflexión de la combinación varilla-tubo son, respectivamente

$$P = P_v + P_t \qquad \delta = \delta_v = \delta_t$$

se dibuja el diagrama carga-deformación requerido sumando las ordenadas de los diagramas obtenidos para la varilla y para el tubo (figura 2.67*c*). Los puntos Y_v y Y_t corresponden al inicio de la cedencia en la varilla y en el tubo, respectivamente.

EJEMPLO 2.15

Si la carga **P** aplicada al ensamble varilla-tubo del ejemplo 2.14 se incrementa de cero a 5.7 kips y se reduce de nuevo a cero, determine *a*) la máxima elongación del ensamble, *b*) la deformación permanente después de retirar la carga.

a) Alargamiento máximo. Con referencia a la figura 2.67*c*, se observa que la carga $P_{\text{máx}} = 5.7$ kips corresponde a un punto localizado en el segmento Y_vY_t del diagrama de carga-deflexión del ensamble. Así, la varilla ha alcanzado el rango plástico, con $P_v = (P_v)_Y = 2.7$ kips y $\sigma_v = (\sigma_v)_Y = 36$ ksi, en tanto que el tubo todavía está en el rango elástico, con

$$P_t = P - P_v = 5.7 \text{ kips} - 2.7 \text{ kips} = 3.0 \text{ kips}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = \frac{3.0 \text{ kips}}{0.1 \text{ in.}^2} = 30 \text{ ksi}$$

$$\delta_t = \epsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = \frac{30 \times 10^3 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in.}) = 60 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

El alargamiento máximo del ensamble es, pues,

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_t = 60 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

b) Deformación permanente. Al disminuir la carga **P** desde 5.7 kips hasta cero, las fuerzas internas P_v y P_t decrecen a lo largo de una línea recta, como se muestra en la figura 2.68*a* y *b*, respectivamente. La fuerza P_v disminuye a lo largo de la línea *CD* paralela a la posición unitaria de la curva de carga, mientras que la fuerza P_t disminuye a lo largo de la curva original de carga, ya que el esfuerzo de cedencia no fue excedido en el tubo. Su suma *P*, por lo tanto, se reducirá a lo largo de una línea *CE* paralela a la porción $0Y_v$ de la curva carga-deflexión para el ensamble (figura 2.68*c*). Con referencia a la figura 2.67*c*, se encuentra que la pendiente de $0Y_v$, y por lo tanto *CE*, es

$$m = \frac{4.5 \text{ kips}}{36 \times 10^{-3} \text{ in.}} = 125 \text{ kips/in.}$$

El segmento de línea *FE* en la figura 2.68*c* representa la deformación δ' del ensamble durante la fase de descarga, el segmento $0E$ es la deformación permanente δ_p después de retirar la carga **P**. Del triángulo *CEF* se tiene que

$$\delta' = -\frac{P_{\text{máx}}}{m} = -\frac{5.7 \text{ kips}}{125 \text{ kips/in.}} = -45.6 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

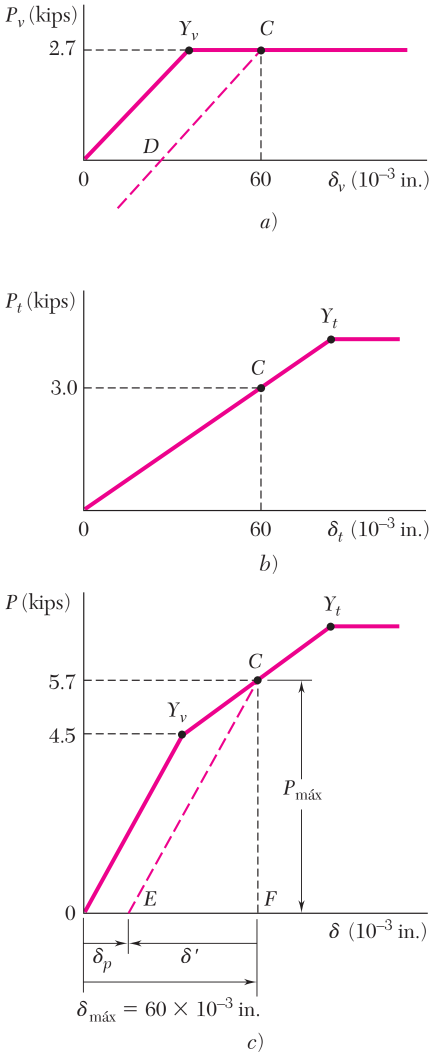


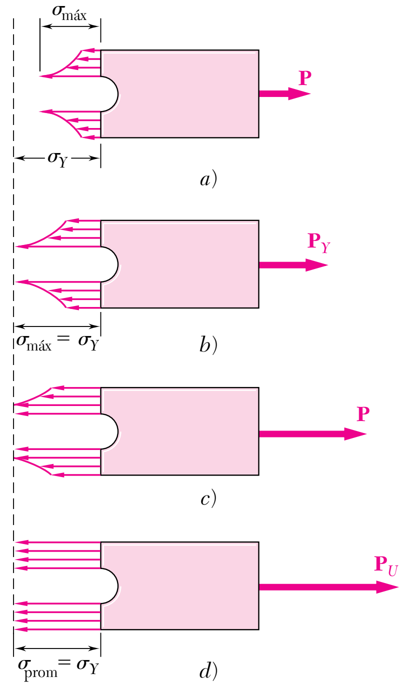
Figura 2.68

La deformación permanente es, pues

$$\delta_P = \delta_{\text{máx}} + \delta' = 60 \times 10^{-3} - 45.6 \times 10^{-3}$$
$$= 14.4 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

El análisis de las concentraciones de esfuerzo de la sección 2.18 se efectuó bajo el supuesto de que la relación esfuerzo-deformación unitaria es lineal. Las distribuciones de esfuerzo mostradas en las figuras 2.62 y 2.63 y los valores de los factores de concentración de esfuerzos en la figura 2.64 no pueden, por lo tanto, usarse cuando hay deformaciones plásticas, es decir, cuando el valor de $\sigma_{\text{máx}}$ obtenido de estas figuras excede la resistencia a la cedencia σ_Y.

Considere otra vez la barra plana con un agujero circular de la figura 2.62, y suponga que el material es elastoplástico, es decir, que su diagrama de esfuerzo-deformación es como se muestra en la figura 2.65. Mientras no ocurra deformación plástica, la distribución de esfuerzo será como se indica en la sección 2.18 (figura 2.69*a*). Se observa que el área bajo la curva de distribución de esfuerzos representa la integral $\int \sigma \, dA$, que es igual a la carga P. Así, esta área y el valor $\sigma_{\text{máx}}$, deben aumentar al incrementarse la carga P. Mientras $\sigma_{\text{máx}} \leq \sigma_y$, todas las distribuciones sucesivas de esfuerzo obtenidas al aumentar P tendrán la forma mostrada en la figura 2.62 y repetida en la figura 2.69*a*. Sin embargo, al aumentar P por encima del valor P_Y que corresponde a $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$ (figura 2.69*b*), la curva de distribución de esfuerzo se debe aplanar en la cercanía del agujero (figura 2.69*c*), ya que el esfuerzo en el material considerado no puede exceder el valor σ_Y. Esto indica que el material está fluyendo en la cercanía del agujero. Al aumentar más la carga P, la zona plástica donde ocurre la cedencia se sigue expandiendo, hasta que alcanza los bordes de la placa (figura 2.69*d*). En ese punto, la distribución de esfuerzos a través de la placa es uniforme, $\sigma = \sigma_Y$ y el valor correspondiente de la carga $P = P_U$ es el valor máximo que puede aplicarse a la barra sin causar ruptura.



$\sigma_{\text{máx}}$
P
σ_Y
a)
P_Y
$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$
b)
P
c)
P_U
$\sigma_{\text{prom}} = \sigma_Y$
d)

Figura 2.69 Distribución de esfuerzos en un material elastoplástico cuando se incrementa la carga.

Es interesante comparar el valor máximo P_Y de la carga que puede aplicarse sin producir deformación permanente en la barra con el valor P_U que causará la ruptura. Recordando la definición del esfuerzo promedio $\sigma_{\text{prom}} = P/A$, donde A es el área neta de la sección transversal, y la definición del factor de concentración de esfuerzos, $K = \sigma_{\text{máx}}/\sigma_{\text{prom}}$, se escribe

$$P = \sigma_{\text{prom}} A = \frac{\sigma_{\text{máx}} A}{K} \tag{2.49}$$

para cualquier valor de $\sigma_{\text{máx}}$ que no exceda σ_Y. Cuando $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$ (figura 2.69*b*), se tiene que $P = P_Y$, y la ecuación (2.49) da

$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K} \tag{2.50}$$

Por otro lado, cuando $P = P_U$ (figura 2.69*d*) se tiene que $\sigma_{\text{prom}} = \sigma_Y$ y

$$P_U = \sigma_Y A \tag{2.51}$$

Comparando las ecuaciones (2.50) y (2.51), se concluye que

$$P_Y = \frac{P_U}{K} \tag{2.52}$$

*2.20 ESFUERZOS RESIDUALES

En el ejemplo 2.13 de la sección anterior, se consideró una varilla estirada más allá del punto de cedencia. Al retirarse la carga, la varilla no recuperó su longitud original: había sido deformada permanentemente. Sin embargo, después de que se quitó la carga, todos los esfuerzos desaparecieron. No debe suponerse que éste es siempre el caso. De hecho, cuando sólo algunas de las partes de una estructura indeterminada sufren deformaciones plásticas, como en el ejemplo 2.15, o cuando distintas partes de la estructura sufren diferentes deformaciones plásticas, los esfuerzos en varias partes de la estructura no regresarán a cero, por lo general, después de que la carga haya sido retirada. Los esfuerzos, llamados *esfuerzos residuales*, permanecerán en las distintas partes de la estructura.

A pesar de que el cálculo de los esfuerzos residuales en una estructura real pueden ser muy complicados, el ejemplo siguiente proporcionará una comprensión general del método que debe emplearse para su determinación.

EJEMPLO 2.16

Determine los esfuerzos residuales en la varilla y el tubo de los ejemplos 2.14 y 2.15 después de que la carga **P** aumenta de cero a 5.7 kips y luego se reduce de nuevo a cero.

Se observa en los diagramas de la figura 2.70 que después de que la carga **P** ha regresado a cero, las fuerzas internas P_v y P_t *no* son iguales a cero. Sus valores se indican por el punto *E* en las partes *a* y *b*, respectivamente, de la figura 2.70. Se deduce que los esfuerzos correspondientes tampoco son iguales a cero después de que el ensamble ha sido descargado. Para determinar estos esfuerzos residuales, se determinarán los esfuerzos inversos σ'_v y σ'_t causados por la descarga y se sumarán a los esfuerzos máximos $\sigma_v = 36$ ksi y $\sigma_t = 30$ ksi encontrados en la parte *a* del ejemplo 2.15.

La deformación que causa la descarga es la misma en el tubo y en la varilla. Es igual a δ'/L, donde δ' es la deformación del ensamble durante la descarga, que fue encontrado en el ejemplo 2.15. Se tiene que

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-45.6 \times 10^{-3} \text{ in.}}{30 \text{ in.}} = -1.52 \times 10^{-3} \text{in./in.}$$

Los esfuerzos inversos correspondientes en la varilla y en el tubo son

$$\sigma'_v = \epsilon' E_v = (-1.52 \times 10^{-3})(30 \times 10^6 \text{ psi}) = -45.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1.52 \times 10^{-3})(15 \times 10^6 \text{ psi}) = -22.8 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos residuales se encuentran superponiendo los esfuerzos debidos a la carga y los esfuerzos inversos debidos a la descarga. Se tiene que

$$(\sigma_v)_{\text{res}} = \sigma_v + \sigma'_v = 36 \text{ ksi} - 45.6 \text{ ksi} = -9.6 \text{ ksi}$$

$$(\sigma_t)_{\text{res}} = \sigma_t + \sigma'_t = 30 \text{ ksi} - 22.8 \text{ ksi} = +7.2 \text{ ksi}$$

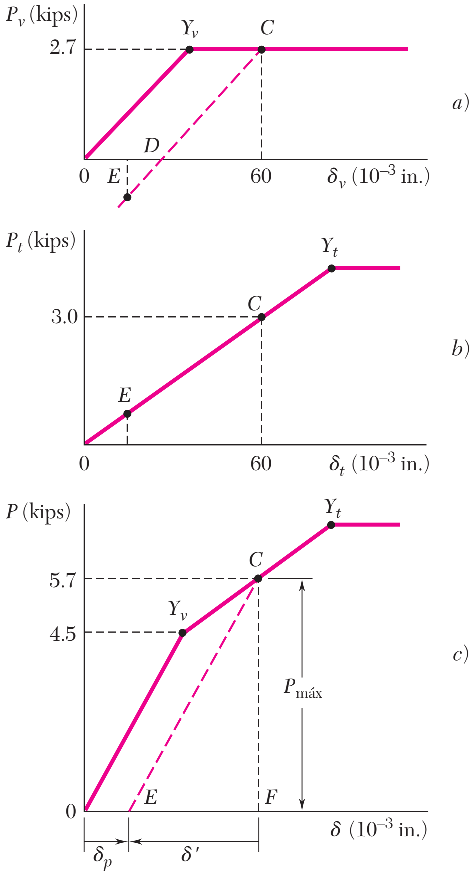


Figura 2.70

Las deformaciones plásticas debidas a cambios de temperatura también pueden producir esfuerzos residuales. Por ejemplo, considere un pequeño tapón que debe soldarse a una placa grande. Para propósitos de análisis al tapón se le considera como una pequeña varilla *AB* que será soldada a través de un pequeño agujero en la placa (figura 2.71). Durante el proceso de soldadura, la temperatura de la varilla se elevará a más de 1 000°C, temperatura a la que su módulo de elasticidad y, por lo tanto, su rigidez y su esfuerzo, serán casi cero. Como la placa es grande, su temperatura no aumentará significativamente por encima de la temperatura ambiente (20°C). Así, al terminar la soldadura, se tendrá la varilla *AB* a una $T = 1\,000°\text{C}$, sin esfuerzo, unida a una placa que se encuentra a 20°C.

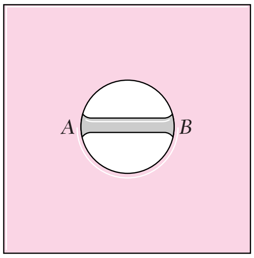


Figura 2.71

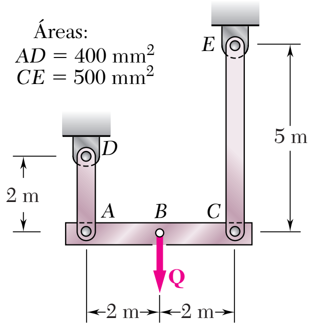
Al enfriarse la varilla, aumenta su módulo de elasticidad y, alrededor de los 500°C, se aproximará a su valor normal de alrededor de 200 GPa. Al disminuir aún más la temperatura de la varilla, se supone una situación similar a la considerada en la sección 2.10 y que se ilustra en la figura 2.35. Despejando ΔT de la ecuación (2.23) e igualando a σ a la resistencia de cedencia, $\sigma_Y = 300$ MPa, de acero promedio y $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°\text{C}$, encontramos el cambio de temperatura que hará que la varilla fluya:

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300 \text{ MPa}}{(200 \text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/°\text{C})} = -125°\text{C}$$

Esto significa que la varilla comenzará a fluir alrededor de 375°C y continuará cediendo a un nivel casi constante de esfuerzo mientras se enfría a temperatura ambiente. Como resultado de la operación de soldadura, un esfuerzo residual aproximadamente igual a la resistencia de cedencia del acero utilizado se crea en el tapón y en la soldadura.

Los esfuerzos residuales también ocurren como resultado del enfriamiento de los metales fundidos o laminados en caliente. En estos casos, las capas externas se enfrían con mayor rapidez que el núcleo interior. Esto provoca que las capas externas adquieran de nuevo su rigidez (*E* regresa a su valor normal) más rápidamente que el núcleo interior. Cuando el elemento completo ha retornado a la temperatura ambiente, el núcleo interior se habrá contraído más que las capas externas. El resultado son esfuerzos residuales longitudinales de tensión en el núcleo interno y esfuerzos residuales longitudinales de compresión en las capas exteriores.

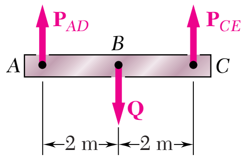
Los esfuerzos residuales debidos a la soldadura, la fundición y el laminado en caliente pueden ser muy grandes (del orden de magnitud de la resistencia a la cedencia). Es posible eliminar estos esfuerzos, cuando es necesario, recalentando el elemento a alrededor de 600°C, y después permitiéndole enfriarse lentamente en un periodo de 12 a 24 horas.



PROBLEMA MODELO 2.6

La viga rígida ABC está suspendida de dos varillas de acero, como se muestra en la figura y está inicialmente en posición horizontal. El punto medio B de la viga se deflecta 10 mm hacia abajo por la aplicación lenta de la fuerza **Q**, después de lo cual la fuerza se retira lentamente. Sabiendo que el acero empleado para las varillas es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa, determine *a*) el valor máximo requerido de Q y la posición correspondiente de la viga, *b*) la posición final de la viga.

SOLUCIÓN



Estática. Como **Q** se aplica en el punto medio de la viga, se tiene que

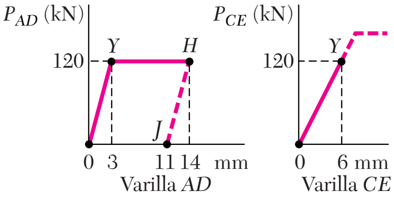
$$P_{AD} = P_{CE} \qquad \text{y} \qquad Q = 2P_{AD}$$

Acción elástica. El valor máximo de Q y la deflexión elástica máxima del punto A ocurren cuando $\sigma = \sigma_Y$ en la varilla AD.

$$(P_{AD})_{\text{máx}} = \sigma_Y A = (300\text{ MPa})(400\text{ mm}^2) = 120\text{ kN}$$

$$Q_{\text{máx}} = 2(P_{AD})_{\text{máx}} = 2(120\text{ kN}) \qquad Q_{\text{máx}} = 240\text{ kN} \blacktriangleleft$$

$$\delta_{A_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_Y}{E}L = \left(\frac{300\text{ MPa}}{200\text{ GPa}}\right)(2\text{ m}) = 3\text{ mm}$$



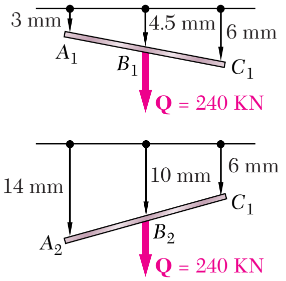
Diagramas carga-deflexión

Puesto que $P_{CE} = P_{AD} = 120$ kN, el esfuerzo en la varilla CE es

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120\text{ kN}}{500\text{ mm}^2} = 240\text{ MPa}$$

La deflexión correspondiente del punto C es

$$\delta_{C_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E}L = \left(\frac{240\text{ MPa}}{200\text{ GPa}}\right)(5\text{ m}) = 6\text{ mm}$$



a) Deflexiones para $\delta_B = 10$ mm ◄

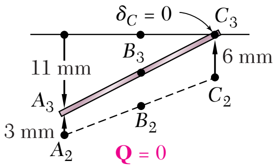
La deflexión correspondiente del punto B es

$$\delta_{B_1} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_1} + \delta_{C_1}) = \tfrac{1}{2}(3\text{ mm} + 6\text{ mm}) = 4.5\text{ mm}$$

Como $\delta_B = 10$ mm, se concluye que ocurrirá deformación plástica.

Deformación plástica. Para $Q = 240$ kN, la deformación plástica ocurre en la varilla AD, donde $\sigma_{AD} = \sigma_Y = 300$ MPa. Ya que el esfuerzo en la varilla CE está dentro del rango elástico, δ_C permanece igual a 6 mm. La deflexión δ_A para la que $\delta_B = 10$ mm se obtiene escribiendo

$$\delta_{B_2} = 10\text{ mm} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_2} + 6\text{ mm}) \qquad \delta_{A_2} = 14\text{ mm}$$



b) Deflexiones finales ◄

Descarga. Al retirarse lentamente la fuerza **Q**, la fuerza P_{AD} disminuye a lo largo de la línea HJ paralela a la porción inicial del diagrama carga-deflexión de la varilla AD. La deflexión final del punto A es

$$\delta_{A_3} = 14\text{ mm} - 3\text{ mm} = 11\text{ mm}$$

Como el esfuerzo en la varilla CE permaneció dentro del rango elástico, se advierte que la deflexión final del punto C es cero.

PROBLEMAS

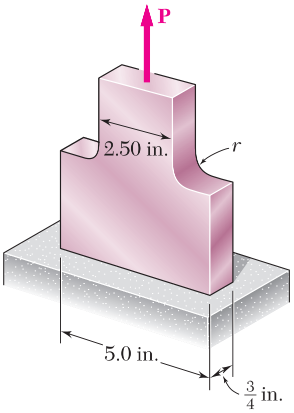

P
2.50 in.
r
5.0 in.
$\frac{3}{4}$ in.

Figura *P2.93* y *P2.94*

2.93 Si se sabe que $P = 10$ kips, determine el esfuerzo máximo cuando *a*) $r = 0.50$ in., *b*) $r = 0.625$ in.

2.94 Si se sabe que, para la placa mostrada, el esfuerzo permisible es de 16 ksi, determine el valor máximo permisible de P cuando *a*) $r = \frac{3}{8}$ in., *b*) $r = \frac{3}{4}$ in.

2.95 Para $P = 8.5$ kips, determine el mínimo grosor t de la placa que se requiere si el esfuerzo permisible es de 18 ksi.

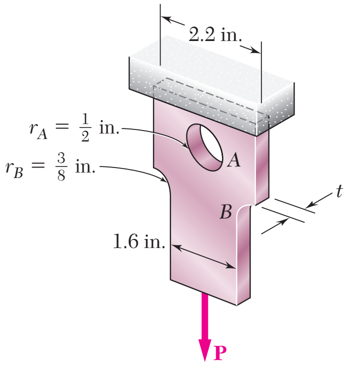

2.2 in.
$r_A = \frac{1}{2}$ in.
$r_B = \frac{3}{8}$ in.
A
t
B
1.6 in.
P

Figura P2.95

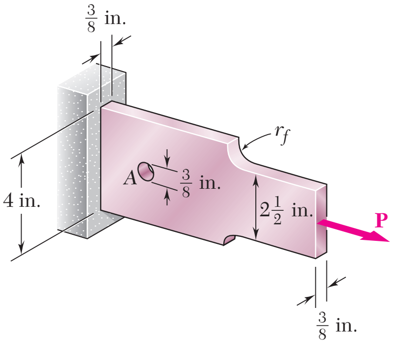

$\frac{3}{8}$ in.
r_f
A
$\frac{3}{8}$ in.
4 in.
$2\frac{1}{2}$ in.
P
$\frac{3}{8}$ in.

Figura P2.96

2.96 Si se sabe que el agujero tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ in., determine *a*) el radio r_f de los filetes para el cual ocurre el mismo esfuerzo máximo en el agujero A y en los filetes, *b*) la carga máxima permisible **P** correspondiente si el esfuerzo permisible es de 15 ksi.

2.97 En la placa debe perforarse un agujero en A. Los diámetros de las brocas disponibles para perforar el agujero van de 12 a 24 mm en incrementos de 3 mm. *a*) Determine el diámetro d de la broca más grande que puede utilizarse si la carga permisible en el agujero debe exceder la de los filetes. *b*) Si el esfuerzo permisible en la placa es de 145 MPa, ¿cuál es la carga permisible **P** correspondiente?

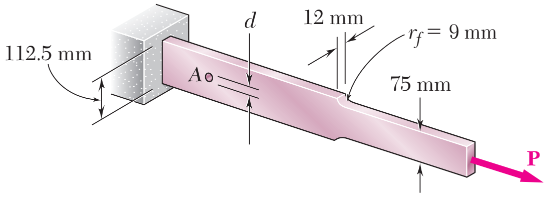
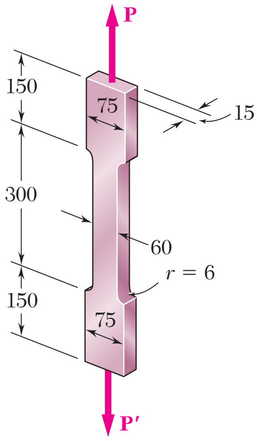

d
12 mm
$r_f = 9$ mm
112.5 mm
A
75 mm
P

Figura P2.97 y P2.98

2.98 *a*) Para $P = 58$ kN y $d = 12$ mm, determine el esfuerzo máximo en la placa mostrada. *b*) Resuelva el inciso *a*), si no se perfora el agujero en A.

2.99 La probeta de aluminio que se muestra en la figura está sujeta a dos fuerzas axiales céntricas iguales y opuestas de magnitud P. *a*) Si se sabe que $E = 70$ GPa y $\sigma_{\text{perm}} = 200$ MPa, determine el valor permisible máximo de P y la elongación total correspondiente de la probeta. *b*) Resuelva el inciso *a*) en el supuesto de que la probeta ha sido reemplazada por una barra de aluminio de la misma longitud y una sección transversal rectangular uniforme de 60 × 15 mm.



Dimensiones en mm

Figura P2.99

2.100 Para la probeta del problema 2.99, determine el valor máximo del esfuerzo normal correspondiente a la elongación total de 0.75 mm.

2.101 La varilla AB es de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi. Después de que la varilla se ha conectado a una palanca rígida CD, se encuentra que el extremo C está $\frac{3}{8}$ in. más alto de lo debido.

Una fuerza vertical **Q** se aplica a C hasta que este punto se mueve a la posición C'. Determine la magnitud requerida de **Q** y la deflexión δ_1 si la palanca debe regresar *elásticamente* a la posición horizontal cuando **Q** se retira.

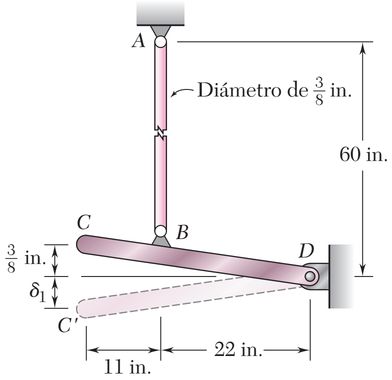


Figura P2.101

2.102 Retome el problema 2.101, ahora suponga que el punto de fluencia del acero dulce es de 50 ksi.

2.103 La barra cuadrada de 30 mm AB tiene una longitud $L = 2.2$ m, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la barra hasta que el extremo A se ha movido hacia abajo en una cantidad δ_m. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la deformación permanente de la barra después de que se elimina la fuerza, sabiendo que *a*) $\delta_m = 4.5$ mm, *b*) $\delta_m = 8$ mm.

2.104 La barra cuadrada de 30 mm AB tiene una longitud $L = 2.5$ m, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la barra y después se retira para darle una deformación permanente de δ_p. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la máxima cantidad δ_m a la que debe estirarse la barra si el valor deseado de δ_p es *a*) 3.5 mm, *b*) 6.5 mm.

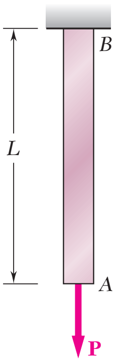


Figura *P2.103* y *P2.104*

2.105 La varilla *ABC* consta de dos porciones cilíndricas *AB* y *BC*, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la varilla y después se retira para darle una deformación permanente de $\delta_p = 2$ mm. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la máxima cantidad δ_m a la que debe estirarse la varilla para obtener la deformación permanente deseada.

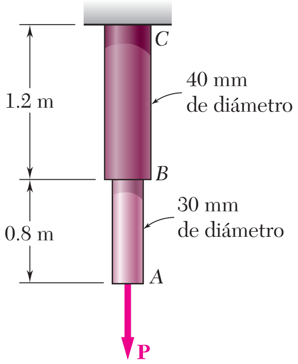


Figura P2.105 y P2.106

2.106 La varilla *ABC* consta de dos porciones cilíndricas *AB* y *BC*, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la varilla hasta que el extremo *A* se ha movido hacia abajo en una cantidad $\delta_m = 5$ mm. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la deformación permanente de la varilla después de que se elimina la fuerza.

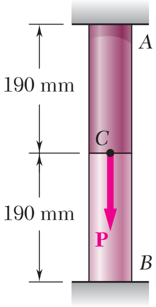


Figura P2.107

2.107 La varilla *AB* consta de dos secciones cilíndricas *AC* y *BC*, cada una con un área de sección transversal de 1 750 mm^2. La porción *AC* está hecha de un acero dulce con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, y la porción *CB* es de acero de alta resistencia con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una carga **P** se aplica en *C* como se muestra en la figura. Si ambos aceros se suponen elastoplásticos, determine *a*) la máxima deflexión de *C* si *P* se incrementa gradualmente desde cero hasta 975 kN y al llegar ahí se reduce de nuevo a cero, *b*) el máximo esfuerzo en cada porción de la varilla, *c*) la deflexión permanente de *C*.

2.108 Para la barra compuesta del problema 2.107, si *P* se incrementa de manera gradual desde cero hasta que la deflexión en el punto *C* alcanza un valor máximo de $\delta_m = 0.03$ mm y, al llegar a este punto, se reduce de nuevo a cero, determine *a*) el valor máximo de *P*, *b*) el máximo esfuerzo de cada porción de la barra, *c*) la deflexión permanente de *C* después de retirar la carga.

2.109 Cada uno de los cables tiene un área de sección cruzada de 100 mm^2 y está hecho de un material elastoplástico para el que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa. Una fuerza **Q** se aplica en el punto *C* de la barra rígida *ABC* y se incrementa de manera gradual desde 0 hasta 50 kN y después se reduce de nuevo hasta cero. Si se sabe que los cables estaban inicialmente tensos, determine *a*) el esfuerzo máximo que ocurre en el cable *BD*, *b*) la deflexión máxima del punto *C*, *c*) el desplazamiento final del punto *C*. (*Sugerencia*: En el inciso *c*), considere que el cable *CE* no está tenso.)

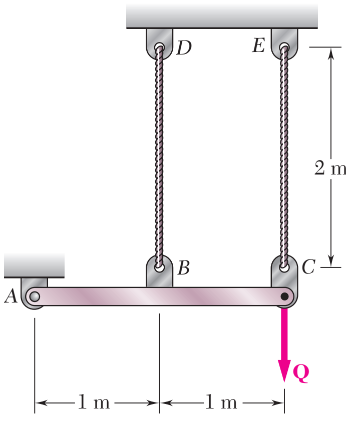


Figura *P2.109*

2.110 Retome el problema 2.109, y ahora suponga que los cables son reemplazados por varillas con la misma área de sección transversal y del mismo material. Además, que las varillas se apuntalan de tal manera que puedan llevar cargas de compresión.

2.111 Dos barras de acero templado, cada una de $\frac{3}{16}$ in. de grosor, se unen a una barra de acero dulce de $\frac{1}{2}$ in. Esta barra compuesta se sujeta a una carga axial centrada de magnitud P. Ambos aceros son elastoplásticos con $E = 29 \times 10^6$ psi y resistencias a la fluencia iguales a 100 ksi y 50 ksi, respectivamente, para el acero templado y el dulce. La carga P se incrementa en forma gradual desde cero hasta que la deformación de la barra alcanza un valor máximo $\delta_m = 0.04$, y entonces se reduce de nuevo a cero. Calcule *a*) el máximo valor de P, *b*) el máximo esfuerzo en las barras de acero templado, *c*) la deformación permanente una vez que la carga se retira.

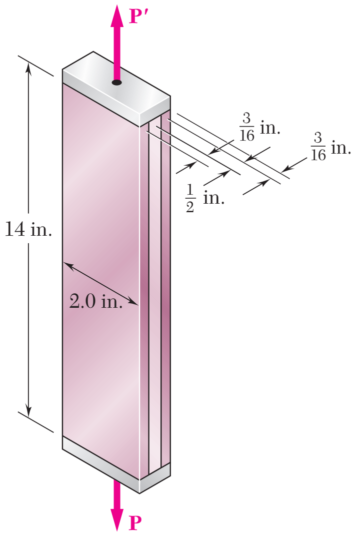


Figura P2.111

2.112 Para la barra compuesta del problema 2.111, si P se incrementa gradualmente desde cero hasta 98 kips y después disminuye hasta cero, determine *a*) la deformación máxima de la barra, *b*) el esfuerzo máximo en las barras de acero templado, *c*) la deformación permanente después de que la carga se retira.

2.113 La barra rígida ABC se soporta en dos eslabones, AD y BE, de sección transversal rectangular uniforme de 37.5 × 6 mm, los cuales están hechos de acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. La magnitud de la fuerza $\mathbf{Q}$ aplicada en B se incrementa gradualmente desde cero a 260 kN. Si se sabe que $a = 0.640$ m, determine *a*) el valor del esfuerzo normal en cada eslabón, *b*) la máxima deflexión del punto B.

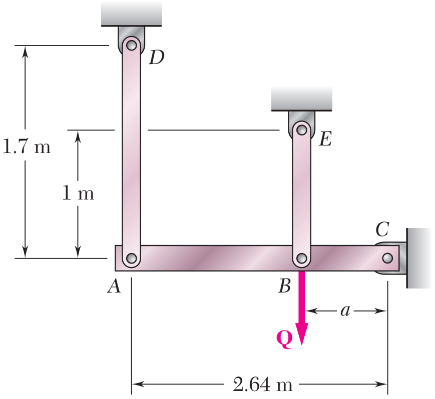


Figura P2.113

2.114 Retome el problema 2.113, y ahora suponga que $a = 1.76$ m y que la magnitud de la fuerza $\mathbf{Q}$ que se aplica en B se incrementa gradualmente desde cero hasta 135 kN.

***2.115** Retome el problema 2.113, y ahora suponga que la magnitud de la fuerza $\mathbf{Q}$ aplicada en B se incrementa gradualmente desde cero hasta 260 kN y después se disminuye hasta cero. Si se sabe que $a = 0.640$ m, determine *a*) el esfuerzo residual en cada eslabón, *b*) la deflexión final en el punto B. Suponga que los eslabones se apuntalan de tal manera que puedan soportar cargas compresivas sin pandearse.

2.116 Una varilla uniforme de acero con área de sección transversal A se une a unos soportes rígidos y se encuentra sin esforzar a una temperatura de 45°F. Se supone que el acero es elastoplástico con $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se sabe que $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/°\text{F}$, determine el esfuerzo en la barra *a*) cuando la temperatura se eleva a 320°F, *b*) después de que la temperatura ha regresado a 45°F.

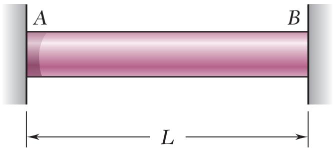


Figura P2.116

2.117 La varilla de acero *ABC* está unida a soportes rígidos y se encuentra sin esforzar a una temperatura de 25°C. El acero se supone elastoplástico, con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. La temperatura de ambas porciones de la varilla se eleva entonces a 150°C. Si se sabe que $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°\text{C}$, determine *a*) el esfuerzo en ambas partes de la varilla, *b*) la deflexión del punto *C*.

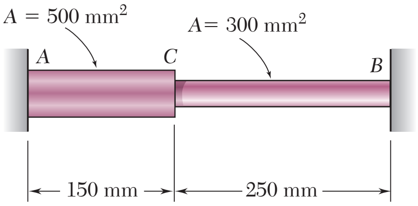


Figura P2.117

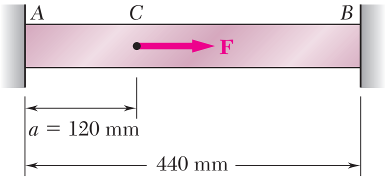


Figura P2.119

***2.118** Retome el problema 2.117, y ahora suponga que la temperatura de la varilla se eleva a 150°C y después regresa a 25°C.

***2.119** La barra *AB* tiene un área de sección transversal de 1 200 mm² y es de un acero que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Si se sabe que la fuerza **F** aumenta desde 0 hasta 520 kN y después disminuye de nuevo a cero, determine *a*) la deflexión permanente del punto *C*, *b*) el esfuerzo residual en la barra.

***2.120** Retome el problema 2.119, y ahora suponga que $a = 180$ mm.

****2.121*** Para la barra compuesta del problema 2.111, determine los esfuerzos residuales en las barras de acero templado si *P* se incrementa gradualmente desde cero hasta 98 kips y después se disminuye nuevamente a cero.

****2.122*** Para la barra compuesta del problema 2.111, determine los esfuerzos residuales en las barras de acero templado si *P* se incrementa gradualmente desde cero hasta que la deformación en la barra alcanza un valor máximo $\delta_m = 0.04$ in. y después disminuye de nuevo hasta cero.

***2.123** Dos barras angostas de aluminio están unidas a los costados de una placa gruesa de acero como se muestra en la figura. Inicialmente, a una $T_1 = 70°\text{F}$, todos los esfuerzos son cero. Si se sabe que la temperatura se elevará lentamente hasta T_2 y después se reducirá a T_1, determine *a*) la máxima temperatura T_2 que no resulta en esfuerzos residuales, *b*) la temperatura T_2 que resultará en un esfuerzo residual en el aluminio igual a 58 ksi. Suponga $\alpha_{al} = 12.8 \times 10^{-6}/°\text{F}$ para el aluminio y $\alpha_{ac} = 6.5 \times 10^{-6}/°\text{F}$ para el acero. Suponga, además, que el aluminio es elastoplástico con $E = 10.9 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 58$ ksi. (*Sugerencia*: Desprecie los pequeños esfuerzos en la placa.)

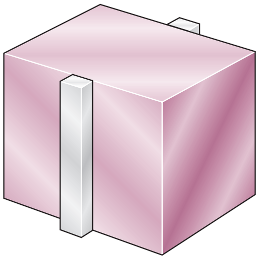


Figura P2.123

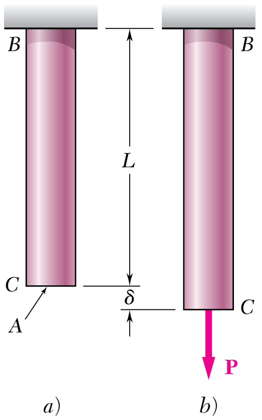
REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

Este capítulo se dedicó a la introducción del concepto de *deformación*, al análisis de la relación entre el esfuerzo y la deformación en varios tipos de materiales, y a la determinación de las deformaciones de componentes estructurales bajo carga axial.

Esfuerzo normal

Considerando una varilla de longitud L y sección transversal uniforme y denotando con δ su deformación bajo una carga axial **P** (figura 2.1), se definió la *deformación normal* ϵ en la varilla como la *deformación por unidad de longitud* (sección 2.2):

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$



a) *b*)

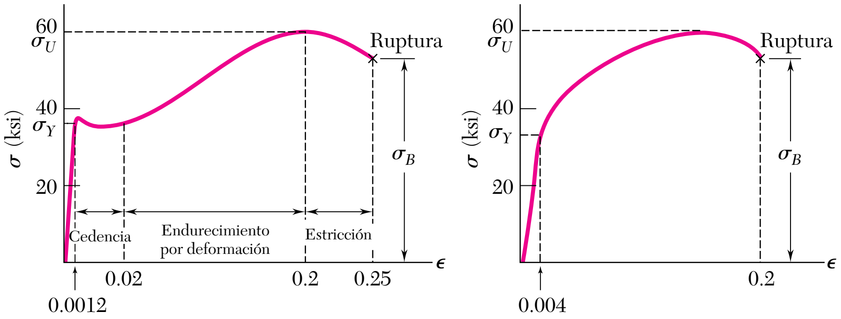
Figura 2.1

En el caso de una varilla con sección transversal variable, la deformación normal se define en cualquier punto dado Q considerando un pequeño elemento de varilla en Q. Denotando con Δx la longitud del elemento y con $\Delta\delta$ su deformación bajo una carga dada, se escribió

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Diagrama esfuerzo-deformación

Graficando el esfuerzo σ contra la deformación ϵ al aumentar la carga, se obtuvo un *diagrama de esfuerzo-deformación* unitaria para el material utilizado (sección 2.3). De dicho diagrama, se pudo distinguir entre materiales *frágiles* y *dúctiles*: un elemento hecho de un material frágil se fractura sin cambio previo notable en su tasa de elongación (figura 2.11), mientras que un elemento hecho de un material dúctil *cede* después de que un esfuerzo crítico σ_Y, llamado el *esfuerzo de cedencia*, ha sido alcanzado, es decir, el elemento sufre una gran deformación antes de fracturarse, con un incremento relativamente pequeño de la carga aplicada (figura 2.9). Un ejemplo de material frágil con propiedades diferentes a tensión y a compresión es el *concreto*.



a) Acero al bajo carbono

b) Aleación de aluminio

Figura 2.9

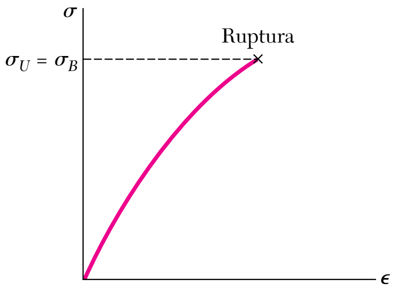


Figura 2.11

Ley de Hooke
Módulo de elasticidad

Se advirtió en la sección 2.5 que la parte inicial del diagrama esfuerzo-deformación es una línea recta. Esto significa que para deformaciones pequeñas, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

Esta relación se conoce como *ley de Hooke* y el coeficiente E es el *módulo de elasticidad* del material. El máximo esfuerzo para el que la ecuación (2.4) es aplicable es el *límite de proporcionalidad* del material.

Los materiales considerados hasta este punto fueron *isotrópicos*, es decir, materiales en los que sus propiedades son independientes de la dirección. En la sección 2.5 también se consideró una clase de materiales *anisotrópicos*, es decir, materiales cuyas propiedades dependen de la dirección. Fueron los *materiales compuestos reforzados con fibras*, hechos de fibras de un material fuerte y rígido embebidas en capas de un material más débil y blando (figura 2.17). Se observó que deben utilizarse diferentes módulos de elasticidad, dependiendo de la dirección de la carga.

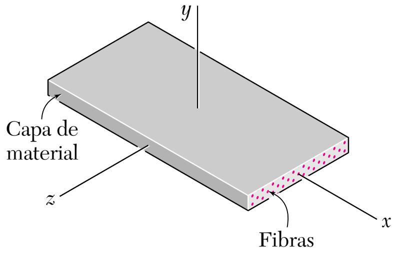


Figura 2.17

Deformación elástica y plástica

Si las deformaciones causadas en una probeta por la aplicación de una carga dada desaparecen cuando la carga se retira, se dice que el material se comporta *elásticamente*, y el máximo esfuerzo para el que esto ocurre se llama el *límite elástico* del material (véase sección 2.6). Si el límite elástico se excede, el esfuerzo y la deformación unitaria disminuyen de forma lineal cuando la carga se retira y la deformación unitaria no regresa a cero (figura 2.18), indicando que ha tenido lugar una *deformación permanente* o *deformación plástica* en el material.

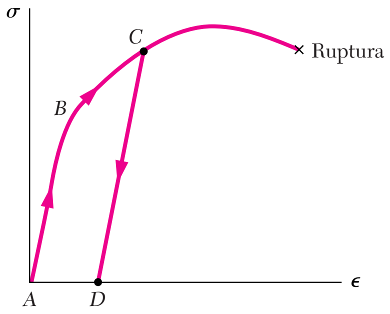


Figura 2.18

Fatiga. Límite de tolerancia

En la sección 2.7 se analizó el fenómeno de *fatiga*, que causa la falla de componentes estructurales o de máquina después de un gran número de cargas repetidas, a pesar de que los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico. Un ensayo estándar de fatiga consiste en determinar el número n de ciclos sucesivos de carga y descarga requeridos para causar la falla de un elemento para cualquier nivel dado de esfuerzo máximo σ, y graficar la curva σ-n resultante. El valor de σ para el que no ocurre la falla, aun para un número indefinidamente grande de ciclos, se conoce como el *límite de tolerancia* del material usado en el ensayo.

Deformación elástica bajo carga axial

La sección 2.8 se dedicó a la determinación de las deformaciones elásticas de varios tipos de componentes estructurales y de máquinas bajo varias condiciones de carga axial. Se vio que si una varilla de longitud L y sección transversal uniforme de área A se somete, en su extremo, a una carga axial centrada **P** (figura 2.22), la deformación correspondiente es

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

Si la varilla se carga en varios puntos o consta de varias partes de varias secciones transversales y posiblemente de distintos materiales, la deformación δ de la varilla debe expresarse como la suma de las deformaciones de sus partes componentes (véase ejemplo 2.01):

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

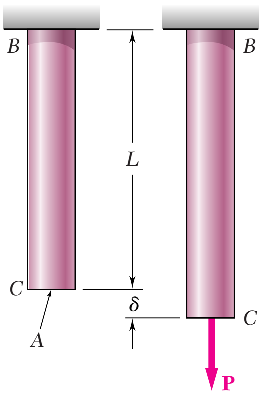


Figura 2.22

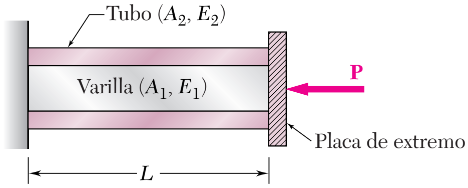


Figura 2.25*a*

Problemas estáticamente indeterminados

La sección 2.9 se dedicó a la solución de *problemas estáticamente indeterminados*, es decir, problemas en los que las reacciones y las fuerzas internas *no pueden* determinarse sólo por la estática. Las ecuaciones de equilibrio deducidas del diagrama de cuerpo libre del elemento en consideración se complementaron por relaciones que involucran deformaciones y que se obtuvieron de la geometría del problema. Las fuerzas en la varilla y en el tubo de la figura 2.25*a*, por ejemplo, se determinaron observando, por una parte, que su suma es igual a P, y por la otra, que causan deformaciones iguales en la varilla y en el tubo (véase ejemplo 2.02). De manera similar, las reacciones en los apoyos de la barra de la figura 2.26 no pudieron obtenerse del diagrama de cuerpo libre de la barra únicamente (véase ejemplo 2.03); pero sí pudieron determinarse expresando que el alargamiento total de la barra debe ser igual a cero.

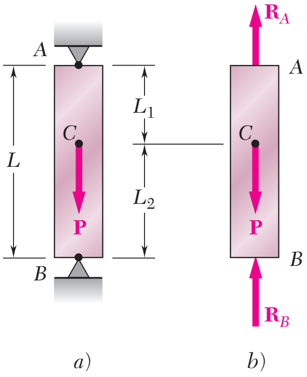


Figura 2.26

Problemas con cambios de temperatura

En la sección 2.10 se consideraron problemas que involucran *cambios de temperatura*. Primero se observó que si la temperatura en una *varilla AB sin restricciones* de largo L se incrementa en ΔT, su alargamiento es

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.21}$$

donde α es el *coeficiente de expansión térmica* del material. Se advirtió que la deformación unitaria correspondiente, llamada *deformación unitaria térmica*, es

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \tag{2.22}$$

y que *no hay esfuerzo* asociado con esta deformación. Sin embargo, si la varilla AB es *restringida* por soportes fijos (figura 2.35*a*), se desarrollan esfuerzos en la varilla al aumentar la temperatura, debido a las reacciones en los soportes. Para determinar la magnitud P de las reacciones, se desprende la varilla de su soporte en B (figura 2.36) y se considera separadamente la deformación δ_T de la varilla cuando se expande libremente debido al cambio de temperatura, y la deformación δ_P generada por la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para regresarla a su longitud original, de manera que pueda reconectarse con el soporte en B. Escribiendo que la deformación total $\delta = \delta_T + \delta_P$ es igual a cero, se obtiene una ecuación de la que puede despejarse P. En tanto que la deformación final en la varilla AB es claramente cero, éste no será, por lo general, el caso para varillas y barras que consistan en elementos de secciones transversales o materiales diferentes, ya que las deformaciones de los diversos elementos comúnmente *no* serán cero [ejemplo 2.06].

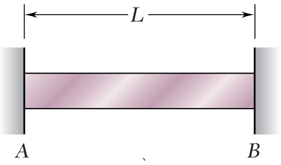


Figura 2.35*a*

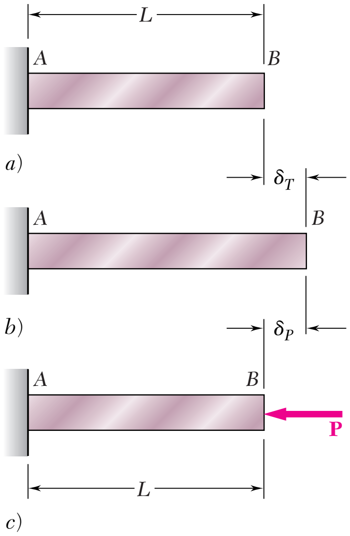


Figura 2.36

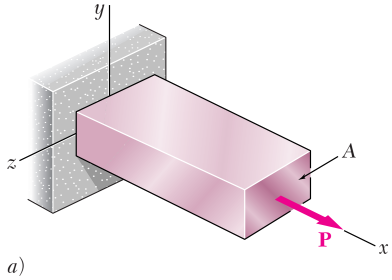


Figura 2.39a

Deformación lateral. Relación de Poisson

Cuando una carga axial **P** se aplica a una barra homogénea y esbelta (figura 2.39*a*), causa una deformación, no sólo a lo largo del eje de la barra sino también en cualquier dirección transversal (véase sección 2.11). Esta deformación se conoce como *deformación lateral*, y la razón de la deformación lateral a la deformación axial se denomina *relación de Poisson* y se denota con ν (letra griega nu). Se escribe

$$\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \tag{2.25}$$

Recuerde que la deformación axial de la barra es $\epsilon_x = \sigma_x/E$, y se expresó como sigue la condición de deformación bajo una carga axial en la dirección x:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.27}$$

Carga multiaxial

Este resultado se extendió en la sección 2.12 al caso de una *carga multiaxial* que cause el estado de esfuerzos mostrado en la figura 2.42. La condición resultante de deformaciones unitarias se describió por las siguientes relaciones, que se conocen como la *ley de Hooke generalizada* para carga multiaxial.

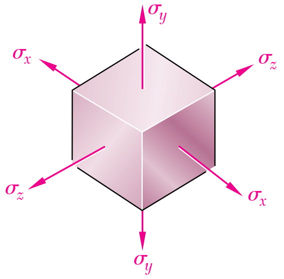


Figura 2.42

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}\\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}\\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dilatación

Si un elemento de material se somete a los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z, se deformará y resultará un cierto cambio de volumen (véase sección 2.13). El *cambio de volumen por volumen unitario* se conoce como la *dilatación* del material y se denota con e. Se mostró que

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.31}$$

Cuando un material se somete a una presión hidrostática p, se tiene que

$$e = -\frac{p}{k} \tag{2.34}$$

Módulo volumétrico

donde k es el *módulo volumétrico* del material:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{2.33}$$

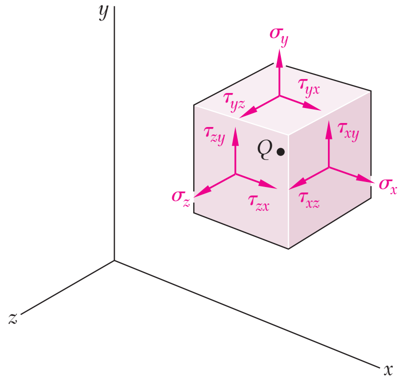


Figura 2.45

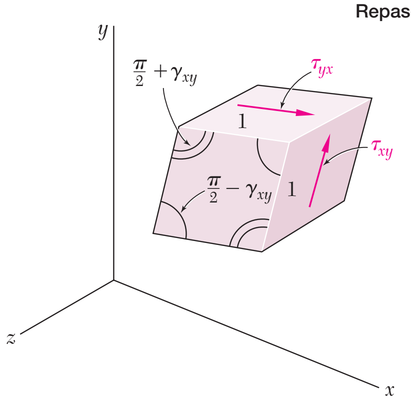


Figura 2.47

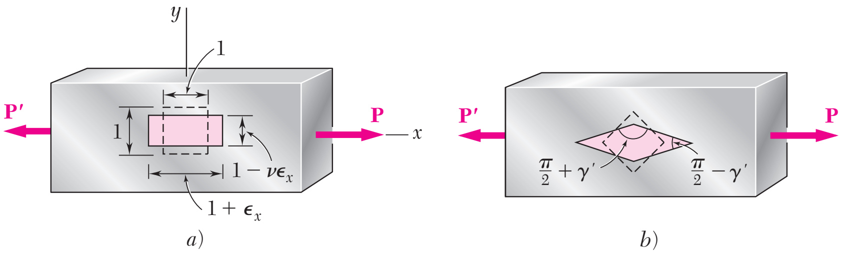
Deformación a cortante. Módulo de rigidez

Como se vio en el capítulo 1, el estado de esfuerzos en un material bajo las condiciones de carga más generales involucra esfuerzos cortantes además de esfuerzos normales (figura 2.45). Los esfuerzos cortantes tienden a deformar un elemento cúbico de material para que tome la forma de un paralelepípedo oblicuo (véase sección 2.14). Considerando, por ejemplo, los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} mostrados en la figura 2.47 (que son iguales en magnitud), se advirtió que ellos hacen que los ángulos formados por las caras en las que actúan aumenten o disminuyan por un pequeño ángulo γ_{xy}; este ángulo, expresado en radianes, define la *deformación a cortante* correspondiente a las direcciones x y y. Definiendo de manera similar las deformaciones a cortante γ_{yz} y γ_{zx}, se escribieron las relaciones

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \qquad (2.36, 2.37)$$

que son válidas para cualquier material isotrópico homogéneo dentro de su límite de proporcionalidad a cortante. La constante G se denomina el *módulo de rigidez* del material y las relaciones obtenidas expresan la *ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación unitaria cortantes*. Junto con las ecuaciones (2.28), forman un grupo de ecuaciones que representan la ley de Hooke generalizada para un material isotrópico homogéneo bajo la condición más generalizada de esfuerzos.

Se estudió en la sección 2.15 que mientras que una carga axial ejercida en una barra esbelta produce sólo esfuerzos normales —tanto axiales como transversales— en un elemento de material orientado a lo largo del eje de la barra, producirá tanto esfuerzos normales como cortantes en un elemento girado 45° (figura 2.53). También se advirtió que las tres constantes E, ν y G no son independientes; satisfacen la relación



a)

b)

Figura 2.53

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \qquad (2.43)$$

que puede emplearse para hallar cualquiera de las tres constantes en términos de las otras dos.

Materiales compuestos reforzados con fibras

Las relaciones esfuerzo-deformación para los materiales compuestos reforzados con fibras se analizaron en una sección opcional (véase sección 2.16). Se dedujeron ecuaciones similares a las ecuaciones (2.28) y (2.36, 37) para estos materiales, pero se observó que deben utilizarse módulos de elasticidad, relaciones de Poisson y módulos de rigidez dependientes de la dirección.

Principio de Saint-Venant

En la sección 2.17 se estudió el *principio de Saint-Venant*, el cual enuncia que, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos en un elemento dado es independiente del modo de aplicación de las cargas. Este principio permite suponer una distribución uniforme de esfuerzos en un elemento sometido a cargas axiales concentradas, excepto cerca de los puntos de aplicación de las cargas, donde ocurrirán concentraciones de esfuerzos.

Concentraciones de esfuerzos

También ocurrirán concentraciones de esfuerzos cerca de las discontinuidades en elementos estructurales, como agujeros o cambios repentinos en la sección transversal (véase sección 2.18). La razón del máximo valor del esfuerzo que ocurre cerca de la discontinuidad sobre el esfuerzo promedio calculado en la sección crítica se conoce como el *factor de concentración de esfuerzos* de la discontinuidad y se denota con K:

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{prom}}} \qquad (2.48)$$

Los valores de K para agujeros circulares y filetes en barras planas fueron dados en la figura 2.64 en la página 108.

Deformaciones plásticas

En la sección 2.19 se trataron las *deformaciones plásticas* que ocurren en elementos estructurales hechos de un material dúctil cuando los esfuerzos en alguna parte del elemento exceden la resistencia a la cedencia del material. El análisis se realizó para un *material elastoplástico* idealizado, caracterizado por el diagrama esfuerzo-deformación como el de la figura 2.65 (véanse ejemplos 2.13, 2.14 y 2.15). Finalmente, en la sección 2.20, se observó que cuando una estructura indeterminada sufre deformaciones plásticas, los esfuerzos, en general, no regresan a cero después de que la carga se retira. Los esfuerzos remanentes en las distintas partes de la estructura se denominan *esfuerzos residuales* y se calculan sumando los esfuerzos máximos alcanzados durante la fase de carga y los esfuerzos inversos correspondientes a la fase de descarga (véase ejemplo 2.16).

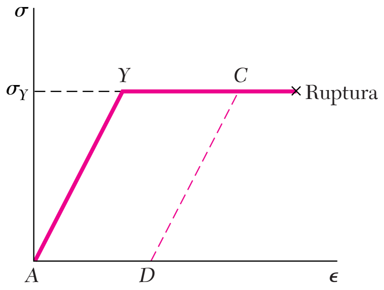


Figura 2.65

PROBLEMAS DE REPASO

2.124 La varilla de aluminio *ABC* ($E = 10.1 \times 10^6$ psi) que consiste en dos porciones cilíndricas *AB* y *BC*, será reemplazada con una varilla cilíndrica de acero *DE* ($E = 29 \times 10^6$ psi) de la misma longitud total. Determine el diámetro mínimo requerido *d* para la varilla de acero si su deformación vertical no debe exceder la deformación de la varilla de aluminio bajo la misma carga y si el esfuerzo permisible en la varilla de acero no debe exceder 24 ksi.

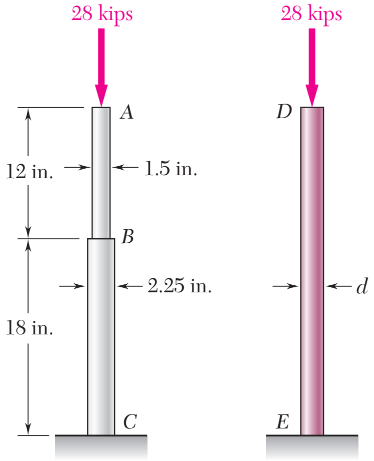

28 kips
28 kips
A
D
12 in.
1.5 in.
B
2.25 in.
d
18 in.
C
E

Figura P2.124

2.125 La tira de latón *AB* se encuentra unida a un soporte fijo en *A* y descansa sobre un soporte rugoso en *B*. Si se sabe que el coeficiente de fricción entre la tira y el soporte en *B* es de 0.60, determine el descenso en temperatura para el cual sería inminente un deslizamiento.

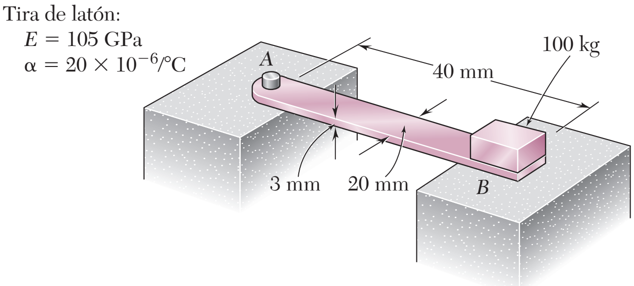

Tira de latón:
E = 105 GPa
α = 20 × 10⁻⁶/°C
A
40 mm
100 kg
3 mm
20 mm
B

Figura P2.125

2.126 Dos varillas cilíndricas están unidas en *B* y son sometidas a la carga que se muestra en la figura. La varilla *AB* está hecha de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y la varilla *BC* de latón ($E = 15 \times 10^6$ psi). Determine *a*) la deformación total de la varilla compuesta *ABC*, *b*) la deflexión del punto *B*.

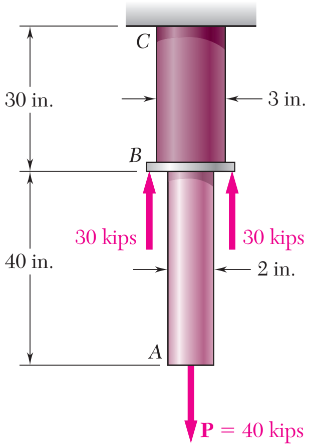

C
30 in.
3 in.
B
30 kips
30 kips
40 in.
2 in.
A
P = 40 kips

Figura *P2.126*

2.127 El eslabón *BD* está hecho de latón ($E = 15 \times 10^6$ psi) y tiene un área de sección transversal de 0.40 in.^{2} El eslabón *CE* es de aluminio ($E = 10.4 \times 10^6$ psi) y tiene un área de sección transversal de 0.50 in.^{2} Determine la fuerza máxima **P** que puede aplicarse verticalmente en el punto *A* si la deflexión de *A* no debe exceder 0.014 in.

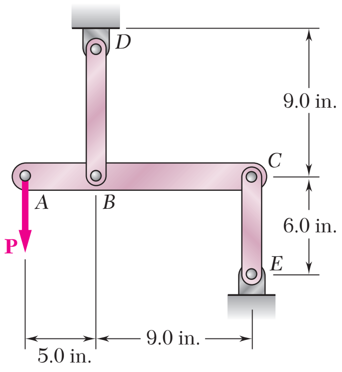

D
9.0 in.
C
A
B
P
6.0 in.
E
5.0 in.
9.0 in.

Figura P2.127

2.128 Un tubo de aluminio ($E = 70$ GPa) con una longitud de 250 mm, un diámetro exterior de 36 mm y un diámetro interior de 28 mm puede cerrarse en ambos extremos por medio de tapas roscadas de hilo sencillo con un paso de 1.5 mm. Con una tapa completamente enroscada, en el interior del tubo se coloca una varilla de latón sólido ($E = 105$ GPa) de 25 mm de diámetro y después se enrosca la segunda tapa. Como la varilla es ligeramente más larga que el tubo, se observa que la tapa debe forzarse contra la varilla girándola un cuarto de vuelta antes de que pueda estar enroscada por completo. Determine *a*) el esfuerzo normal promedio en el tubo y en la varilla, *b*) las deformaciones del tubo y de la varilla.

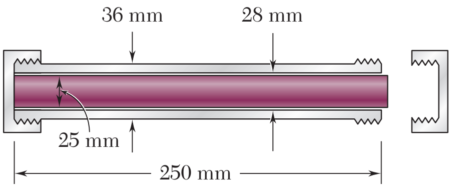


Figura *P2.128*

2.129 El alambre uniforme *ABC*, cuya longitud sin estirar es $2l$, se conecta a los soportes mostrados en la figura y se le aplica una carga vertical **P** al punto medio *B*. Si *A* es el área de la sección transversal del alambre y *E* su módulo de elasticidad, demuestre que para $\delta \ll l$, la deflexión en el punto medio *B* es

$$\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}}$$

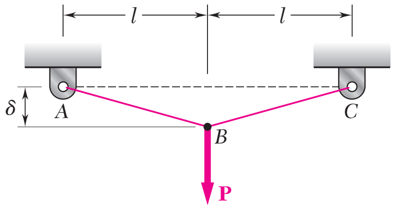


Figura P2.129

2.130 La barra rígida *AD* está soportada por dos alambres de acero de $\frac{1}{16}$ in. de diámetro ($E = 29 \times 10^6$ psi), un pasador y una ménsula en *A*. Si se sabe que los alambres estaban originalmente tensos, determine *a*) la tensión adicional en cada alambre cuando una carga **P** de 220 lb se aplica en *D*, *b*) la deflexión correspondiente en el punto *D*.

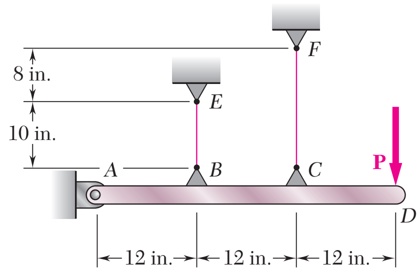


Figura *P2.130*

2.131 El poste de concreto ($E_c = 25$ GPa y $\alpha_c = 9.9 \times 10^{-6}/°\mathrm{C}$) está reforzado con seis varillas de acero, cada una de 22 mm de diámetro ($E_a = 200$ GPa y $\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}/°\mathrm{C}$). Determine los esfuerzos normales que se inducen en el acero y en el concreto por una elevación de 35°C en la temperatura.

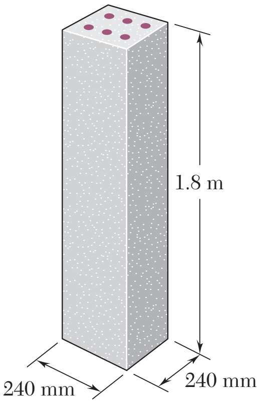


Figura P2.131

2.132 Una unidad para aislamiento de vibraciones se compone de dos bloques de caucho duro con un módulo de rigidez $G = 2.75$ ksi adheridos a la placa *AB* y a soportes rígidos como se muestra en la figura. Si *P* es la magnitud de la fuerza aplicada a la placa y δ la deflexión correspondiente, determine la constante de resorte efectiva $k = P/\delta$ del sistema.

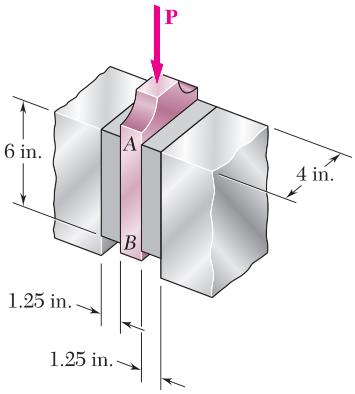


Figura P2.132

2.133 Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 120$ MPa, determine el valor máximo permisible de la carga axial centrada **P**.

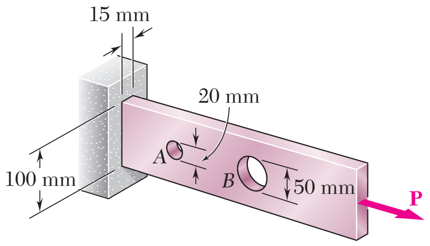


Figura P2.133

2.134 La varilla AB consta de dos secciones cilíndricas AC y BC, cada una con un área de sección transversal de 2 950 mm^2. La porción AC está hecha de un acero dulce con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, y la porción CB es de acero de alta resistencia con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una carga **P** se aplica en C como se muestra en la figura. Si ambos aceros se suponen elastoplásticos, determine *a*) la máxima deflexión de C si P se incrementa gradualmente desde cero hasta 1 625 kN y al llegar ahí se reduce de nuevo a cero, *c*) la deflexión permanente de C.

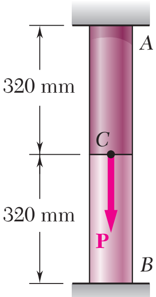


Figura *P2.134*

2.135 La varilla uniforme BC tiene un área de sección transversal uniforme A y está hecha de un acero suave que puede asumirse como elastoplástico con un módulo de elasticidad E y una resistencia a la fluencia σ_y. Con el sistema de bloque y resorte mostrado en la figura, se desea simular la deflexión del extremo C de la varilla conforme se aplica y se retira gradualmente la fuerza axial **P**; esto es, la deflexión de los puntos C y C' debe ser la misma para todos los valores de P. Si μ es el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie horizontal, obtenga una expresión para *a*) la masa m requerida para el bloque, *b*) la constante k requerida para el resorte.

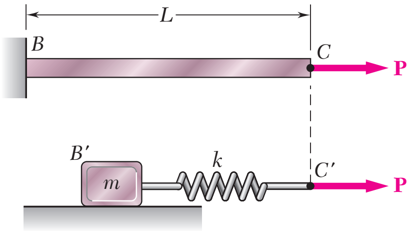


Figura P2.135

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas están diseñados para resolverse con la ayuda de una computadora. Escriba cada programa para que pueda usarse con unidades SI o estadounidenses, y de tal manera que los elementos cilíndricos sólidos puedan definirse por su diámetro o por el área de su sección transversal.

2.C1 Una varilla de n elementos, siendo cada elemento homogéneo y de sección transversal uniforme, se somete a la carga mostrada. La longitud del elemento i está denotada por L_i, su área de sección transversal por A_i, su módulo de elasticidad mediante E_i, y la carga aplicada a su extremo derecho es $\mathbf{P}_i$; la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ va hacia la derecha, de lo contrario se considera negativa. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda usarse para determinar el esfuerzo normal promedio en cada elemento, la deformación en cada elemento y la deformación total de la varilla. *b*) Utilice tal programa para resolver los problemas 2.20 y 2.126.

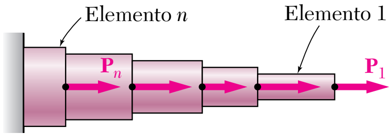


Figura P2.C1

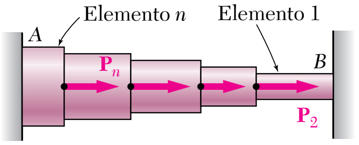


Figura P2.C2

2.C2 La varilla horizontal AB con ambos extremos fijos tiene n elementos homogéneos de sección transversal uniforme. La longitud del elemento i se denota mediante L_i, su área de sección transversal con A_i, su módulo de elasticidad con E_i, y la carga aplicada a su extremo por $\mathbf{P}_i$; la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ va hacia la derecha; de lo contrario, se considera negativa. (Advierta que $P_1 = 0$.) *a*) Escriba un programa para computadora que pueda emplearse para determinar las reacciones en A y B, el esfuerzo normal promedio en cada elemento, y la deformación de cada elemento. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.41 y 2.42.

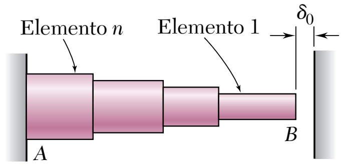


Figura P2.C3

2.C3 La varilla AB tiene n elementos, cada uno de los cuales es homogéneo y de sección transversal uniforme. El extremo A se encuentra fijo, mientras que existe una separación inicial δ_0 entre el extremo B y la superficie fija vertical situada a la derecha. La longitud del elemento i es L_i, su área de sección transversal A_i, su módulo de elasticidad se denota mediante E_i, y su coeficiente de expansión térmica es α_i. Después de que la temperatura de la varilla se ha aumentado en ΔT, la separación en B se cierra y las superficies verticales ejercen fuerzas iguales y opuestas sobre la varilla. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda usarse para determinar la magnitud de las reacciones en A y B, el esfuerzo normal y la deformación en cada elemento. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.51, 2.59 y 2.60.

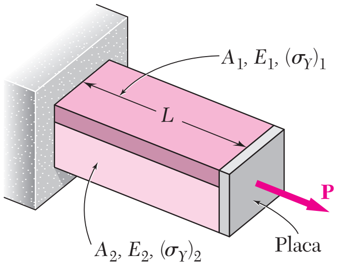


Figura P2.C4

2.C4 La barra AB tiene longitud L y está hecha a partir de dos materiales diferentes con área de sección transversal, módulo de elasticidad y resistencia a la fluencia dados. La barra se somete, como se muestra en la figura, a una carga $\mathbf{P}$ que se incrementa gradualmente desde cero hasta que la deformación alcanza un valor máximo δ_m y entonces se reduce a cero. *a*) Escriba un programa de cómputo que, para cada uno de los 25 valores de δ_m uniformemente espaciados en un rango que se extienda desde 0 hasta un valor igual al 120% de la deformación que cause que ambos materiales cedan, pueda emplearse para determinar el valor máximo P_m de la carga, el esfuerzo normal máximo en cada material, la deformación permanente δ_p de la barra, y el esfuerzo residual en cada material. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.111 y 2.112.

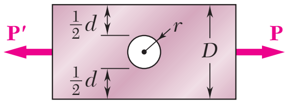


Figura P2.C5

2.C5 La placa tiene un orificio central que la atraviesa de lado a lado. El factor de concentración de esfuerzos para una barra plana bajo carga axial y con un agujero central puede expresarse como:

$$K = 3.00 - 3.13\left(\frac{2r}{D}\right) + 3.66\left(\frac{2r}{D}\right)^2 - 1.53\left(\frac{2r}{D}\right)^3$$

donde r es el radio del agujero y D el ancho de la barra. Escriba un programa de cómputo que pueda utilizarse para determinar la carga permisible $\mathbf{P}$ para valores dados de r, D, el espesor t de la barra y el esfuerzo permisible σ_{perm} del material. Si se sabe que $t = \frac{1}{4}$ in., $D = 3.0$ in. y $\sigma_{\text{perm}} = 16$ ksi, determine la carga permisible $\mathbf{P}$ para valores de r desde 0.125 in. hasta 0.75 in., con incrementos de 0.125 in.

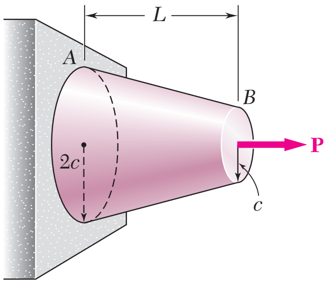


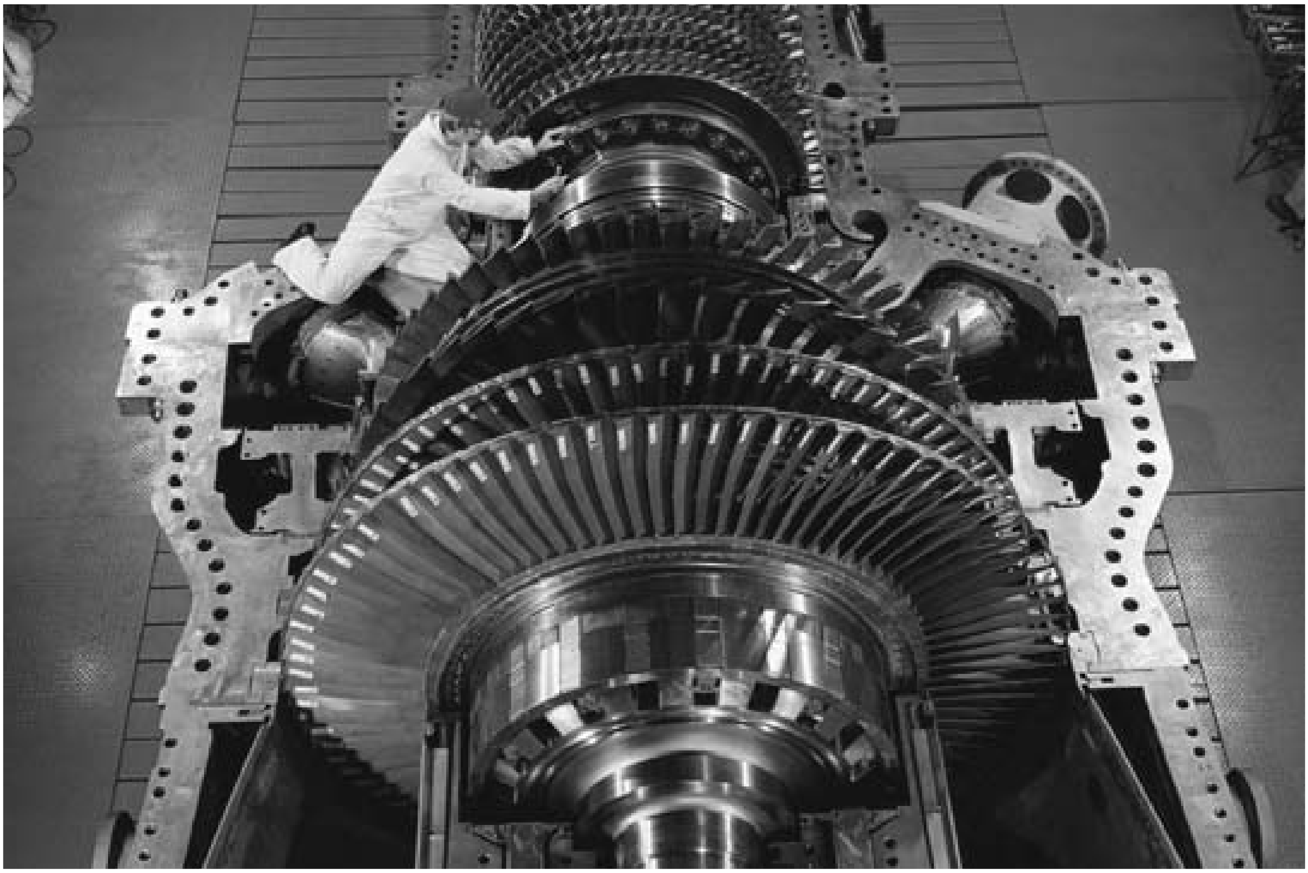
Figura P2.C6

2.C6 Un cono sólido truncado es sometido a una carga axial $\mathbf{P}$ como se muestra en la figura. El alargamiento exacto del cono es $(PL)/(2\pi c^2 E)$. Reemplazando el cono mediante n cilindros circulares de igual espesor, escriba un programa para computadora que pueda usarse para calcular el alargamiento del cono truncado. ¿Cuál es el error porcentual de la respuesta obtenida con el programa si se usa *a*) $n = 6$, *b*) $n = 12$, *c*) $n = 60$?

CAPÍTULO

3

Torsión



Este capítulo se dedica al estudio de la torsión y de los esfuerzos y deformaciones que causa. En el motor de jet que se muestra en la fotografía, el eje central conecta los componentes del motor para desarrollar el empuje que impulsa al avión.

3.1 INTRODUCCIÓN

En los dos capítulos anteriores se estudió cómo calcular los esfuerzos y las deformaciones en elementos estructurales sometidos a cargas axiales, es decir, a fuerzas dirigidas a lo largo del eje del elemento. En este capítulo se analizarán los elementos estructurales y partes de maquinaria que se encuentran en *torsión*. Más específicamente, se estudiarán los esfuerzos y las deformaciones en elementos de sección transversal circular sometidos a pares de torsión, o *momentos torsores*, **T** y **T′** (figura 3.1). Estos pares tienen una magnitud igual a T y sentidos opuestos. Son cantidades vectoriales que pueden representarse mediante flechas curvas, como en la figura 3.1*a*, o por vectores de par como en la figura 3.1*b*.

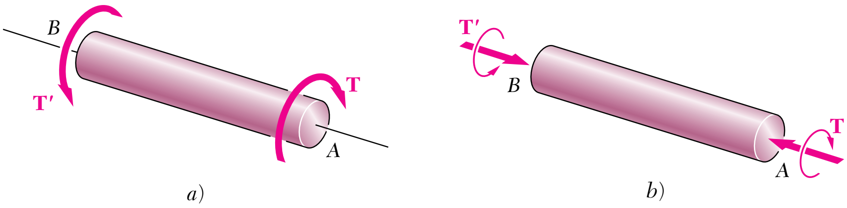


Figura 3.1

Los elementos sometidos a torsión se encuentran en muchas situaciones de ingeniería. La aplicación más común la representan los *ejes de transmisión*, que se emplean para transmitir potencia de un punto a otro. Por ejemplo, el eje mostrado en la figura 3.2 se utiliza para transmitir potencia del motor a las ruedas traseras de un automóvil. Estos ejes pueden ser sólidos, como el que se muestra en la figura 3.1, o huecos.

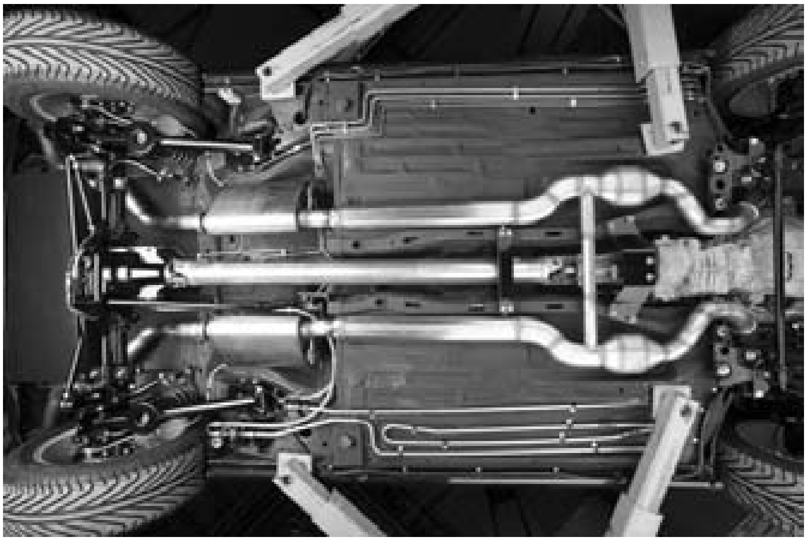
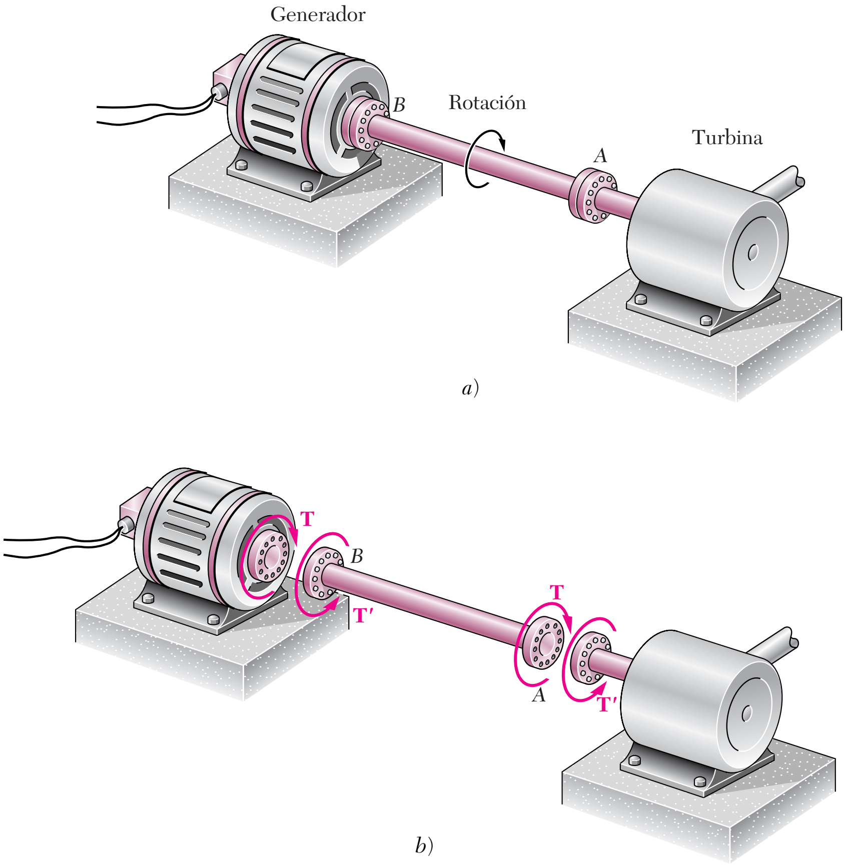


Figura 3.2 En el tren de transmisión automotriz que se muestra, el eje transmite potencia desde el motor hasta las ruedas traseras.



a)

b)

Figura 3.3

Considere el sistema que se presenta en la figura 3.3*a*, que consiste en una turbina de vapor *A* y un generador *B* conectados por un eje de transmisión *AB*. Separando el sistema en sus tres partes componentes (figura 3.3*b*), puede verse que la turbina ejerce un par de torsión o momento torsor **T** sobre el eje y que el eje ejerce un par igual sobre el generador. El generador reacciona ejerciendo un par de torsión igual y opuesto **T**′ sobre el eje, y el eje ejerce la torsión **T**′ sobre la turbina.

Primero se analizarán los esfuerzos y las deformaciones que ocurren en ejes circulares. En la sección 3.3 se demostrará una propiedad importante de los ejes circulares: *cuando un eje circular se somete a torsión, todas las secciones transversales permanecen planas y sin distorsión*. En otras palabras, mientras que las diversas secciones transversales a lo largo del eje giran a través de distintos ángulos, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida. Esta propiedad permitirá determinar la *distribución de los esfuerzos cortantes sobre un eje circular y obtener en conclusión que la deformación a cortante varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*.

Considerando las deformaciones en el *rango elástico* y utilizando la ley de Hooke para el esfuerzo cortante y la deformación a cortante, se determinará la *distribución de esfuerzos cortantes* en un eje circular y se deducirán las *fórmulas para la torsión elástica* (véase sección 3.4).

En la sección 3.5 se aprenderá a encontrar el *ángulo de giro* de un eje circular sujeto a un par de torsión dado, suponiendo otra vez deformaciones elásticas. La solución de problemas que involucran *ejes estáticamente indeterminados* se considerará en la sección 3.6.

En la sección 3.7 se estudiará el *diseño de ejes de transmisión*. Para lograr el diseño, se aprenderá a determinar las características físicas requeridas de un eje en términos de su velocidad de rotación y de la potencia que debe ser transmitida.

Las fórmulas de torsión no pueden usarse para determinar los esfuerzos cerca de secciones donde los pares de carga se aplican o cerca de una sección donde ocurre un cambio abrupto en el diámetro del eje. Más aún, estas fórmulas se aplican únicamente dentro del rango elástico del material.

En la sección 3.8 se aprenderá a calcular las concentraciones de esfuerzos donde ocurre un cambio abrupto en el diámetro del eje. En las secciones 3.9 a 3.11 se considerarán los esfuerzos y las deformaciones en ejes circulares hechos de un material dúctil cuando se excede el punto de cedencia del material. Se aprenderá, entonces, a determinar las *deformaciones plásticas* permanentes y los *esfuerzos residuales* que permanecen en un eje después de que se le ha cargado más allá del punto de cedencia del material.

En las últimas secciones de este capítulo se estudiará la torsión de elementos no circulares (sección 3.12) y se analizará la distribución de esfuerzos en elementos huecos no circulares de pared delgada (sección 3.13).

3.2 ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS ESFUERZOS EN UN EJE

Considerando un eje AB sometido en A y en B a pares de torsión $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ iguales y opuestos, se efectúa un corte perpendicular al eje de la flecha en algún punto arbitrario C (figura 3.4). El diagrama de cuerpo libre de la porción BC del eje debe incluir las fuerzas cortantes elementales $d\mathbf{F}$, perpendiculares al radio del eje, que la porción AC ejerce sobre BC al torcerse el eje (figura

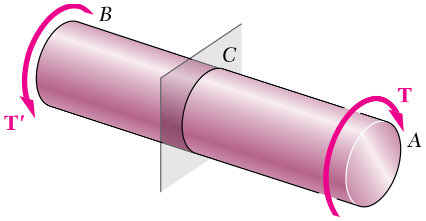


Figura 3.4

3.5*a*). Pero las condiciones de equilibrio para *BC* requieren que el sistema de estas fuerzas elementales sea equivalente a un par de torsión interno **T**, igual y opuesto a **T**′ (figura 3.5*b*). Denotando con ρ la distancia perpendicular desde la fuerza $d\mathbf{F}$ al eje de la flecha, y expresando que la suma de momentos de las fuerzas cortantes $d\mathbf{F}$ alrededor del eje es igual en magnitud al par **T**, se escribe

$$\int \rho \, dF = T$$

o, ya que $dF = \tau \, dA$, donde τ es el esfuerzo cortante en el elemento de área dA,

$$\int \rho(\tau \, dA) = T \tag{3.1}$$

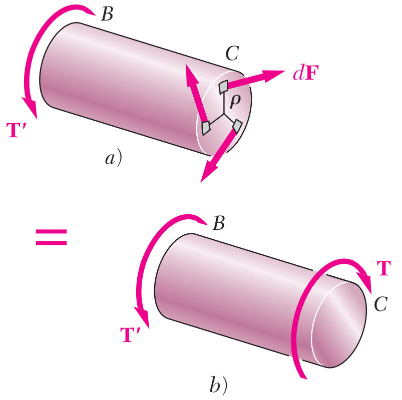


Figura 3.5

A pesar de que la relación obtenida expresa una condición importante que deben satisfacer los esfuerzos cortantes en cualquier sección transversal del eje, *no* indica cómo están distribuidos estos esfuerzos en la sección transversal. Debe observarse, por lo tanto, como ya se hizo en la sección 1.5, que la distribución real de esfuerzos bajo una carga dada es *estáticamente indeterminada*, es decir, que esta distribución *no puede determinarse por los métodos de la estática*. Sin embargo, habiendo supuesto en la sección 1.5 que los esfuerzos normales producidos por una carga axial centrada estaban distribuidos uniformemente, se encontró después (véase sección 2.17) que esta suposición estaba justificada, excepto en la cercanía de cargas concentradas. Una suposición similar con respecto a la distribución de esfuerzos cortantes en un eje elástico *estaría equivocada*. Debe evitarse cualquier juicio con respecto a la distribución de esfuerzos en un eje hasta que se hayan analizado las *deformaciones* que se producen en el mismo. Esto se efectuará en la siguiente sección.

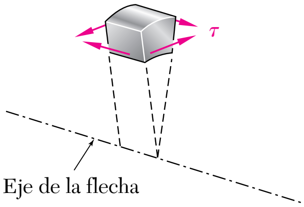


Figura 3.6

Debe hacerse una observación más en este punto. Como se indicó en la sección 1.12, el cortante no puede tener lugar únicamente en un plano. Considere el pequeño elemento de eje mostrado en la figura 3.6. Se sabe que el par de torsión aplicado al eje produce esfuerzos cortantes τ en las caras perpendiculares al eje de la flecha. Pero las condiciones de equilibrio estudiadas en la sección 1.12 requieren de la existencia de esfuerzos iguales en las caras formadas por los dos planos que contienen al eje de la flecha. Puede demostrarse que tales esfuerzos cortantes ocurren en realidad en la torsión

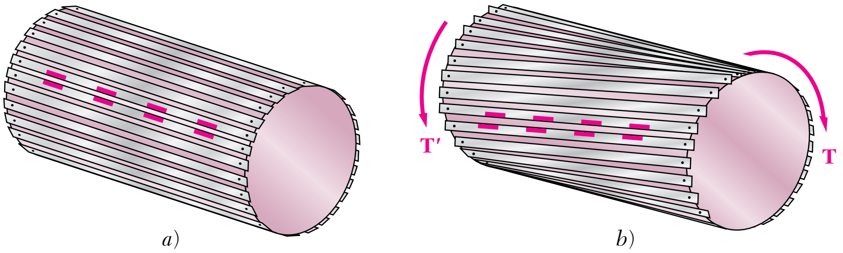


Figura 3.7

considerando un "eje" elaborado de duelas separadas sujetas con pasadores en ambos extremos a discos, como se muestra en la figura 3.7*a*. Si se pintan marcas en dos duelas adyacentes, se observa que las duelas se deslizan una con respecto a la otra cuando se aplican pares iguales y opuestos a los extremos del "eje" (figura 3.7*b*). Aunque no ocurrirá deslizamiento en un eje de un material homogéneo y cohesivo, la tendencia al deslizamiento existirá, lo cual muestra que ocurren esfuerzos en planos longitudinales así como en los planos perpendiculares al eje de la flecha.†

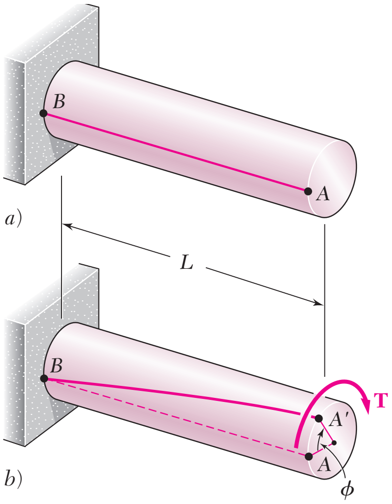


Figura 3.8

3.3 DEFORMACIONES EN UN EJE CIRCULAR

Considere un eje circular unido a un soporte fijo en uno de sus extremos (figura 3.8*a*). Si se aplica un par de torsión **T** al otro extremo, el eje se torcerá al girar su extremo libre a través de un ángulo ϕ llamado *ángulo de giro* (figura 3.8*b*). Esto significa que, dentro de un cierto rango de valores de T, el ángulo de giro ϕ es proporcional a T. También muestra que ϕ es proporcional a la longitud L del eje. En otras palabras, el ángulo de giro para un eje del mismo material y con la misma sección transversal, pero del doble de longitud, se duplicará bajo el mismo par de torsión **T**. Un propósito de este análisis será encontrar la relación específica que existe entre ϕ, L y T; otro propósito será determinar la distribución de esfuerzos cortantes en el eje, que no fue posible obtener sólo con base en la estática en la sección precedente.

En este punto, debe señalarse una propiedad importante de los ejes circulares: cuando un eje circular se somete a torsión, *todas sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión*. Dicho de otra manera, aunque las distintas secciones transversales a lo largo del eje giran diferentes cantidades, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida. Esto se ilustra en la figura 3.9*a*, que muestra las deformaciones en un modelo de caucho sometido a torsión. La propiedad que se analiza en este momento es característica de ejes circulares, sólidos o huecos. Y no la comparten los elementos con sección transversal no circular. Por ejemplo, cuando una barra con sección transversal cuadrada se sujeta a torsión, sus distintas secciones transversales se tuercen y no permanecen planas (figura 3.9*b*).

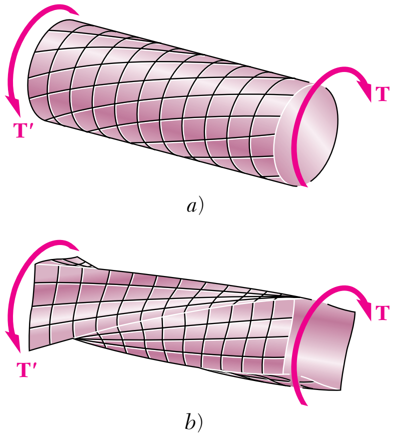


Figura 3.9

---

† La torcedura de un tubo de cartón que se ha ranurado a lo largo es otra demostración de la existencia de esfuerzos cortantes en los planos longitudinales.

Las secciones transversales de un eje circular permanecen planas y sin distorsión debido a que un eje circular es *axisimétrico*, es decir, su apariencia es la misma cuando se ve desde una posición fija y se gira alrededor de su eje por un ángulo arbitrario. (Las barras cuadradas, por otro lado, conservan la misma apariencia sólo si se les gira 90° o 180°.) Como se verá a continuación, la simetría axial de los ejes circulares puede emplearse para probar teóricamente que sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión.

Considere los puntos C y D localizados en la circunferencia de una sección transversal del eje, y sean C' y D' las posiciones que ocupan después de que el eje ha sido torcido (figura 3.10*a*). La simetría axial del eje y de la carga requiere que la rotación que hubiera causado que D llegara a C ahora debe llevar a que D' llegue a C'. Por lo tanto C' y D' deben estar en la circunferencia de un círculo, y el arco $C'D'$ debe ser igual al arco CD (véase figura 3.10*b*). Ahora se examinará si el círculo donde se encuentran C' y D' es diferente del círculo original. Suponga que C' y D' sí están en un círculo diferente y que el círculo nuevo está a la izquierda del círculo original, como se muestra en la figura 3.10*b*. La misma situación prevalecerá para cualquier otra sección transversal, ya que todas las secciones transversales del eje están sometidas al mismo par de torsión interno T; de esta manera un observador que vea al eje desde su extremo A concluirá que la carga provoca que cualquier círculo dado dibujado sobre el eje se *aleje*. Por el contrario, para un observador localizado en B, para quien la carga dada se ve igual (un par en sentido horario en primer plano y un par en sentido antihorario al fondo) llegará a la conclusión opuesta, es decir, que el círculo se mueve *hacia* él. Esta contradicción prueba que la suposición era equivocada y que C' y D' se encuentran en el mismo círculo que C y que D. Por lo tanto, al ser torcido el eje, el círculo original sólo gira sobre su propio plano. Ya que el mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier círculo concéntrico más pequeño localizado en la sección transversal bajo consideración, se concluye que toda la sección transversal permanece plana (figura 3.11).

El anterior argumento no excluye la posibilidad de que los distintos círculos concéntricos de la figura 3.11 giren en cantidades diferentes cuando se tuerce el eje. Pero si ése fuera el caso, un diámetro dado de la sección transversal sería distorsionado en una curva que se vería como se muestra en la figura 3.12*a*. Un observador que viera esta curva desde A concluiría que las capas externas del eje se tuercen más que las internas, mientras que un observador colocado en B concluirá lo contrario (figura 3.12*b*). Esta inconsistencia permite concluir que cualquier diámetro de una sección transversal dada permanece recto (figura 3.12*c*) y, por lo tanto, que cualquier sección transversal dada de un eje circular permanece plana y sin distorsión.

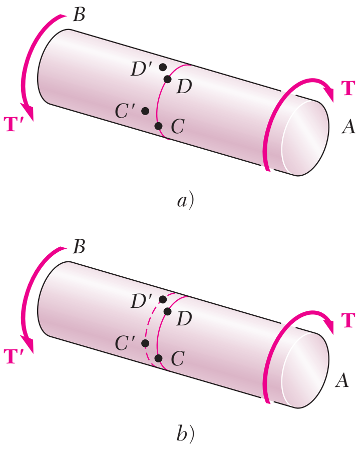


Figura 3.10

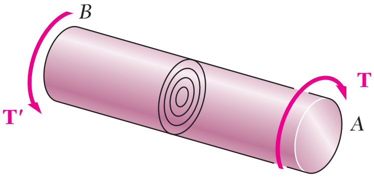


Figura 3.11

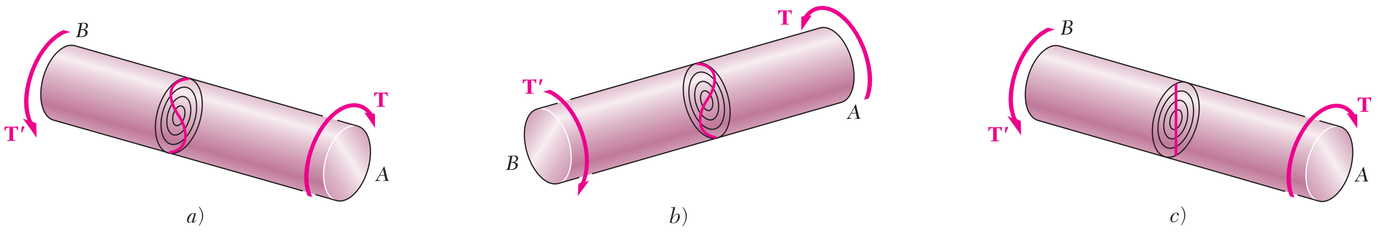
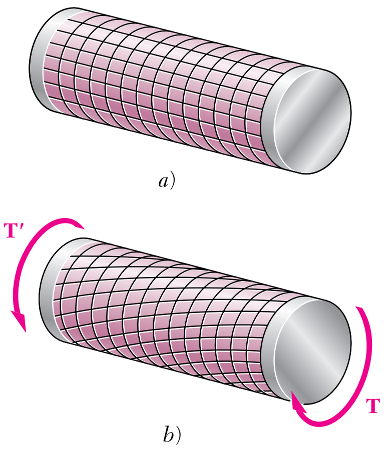


Figura 3.12



a)

b)

Figura 3.13

Este análisis hasta ahora ha ignorado el modo de aplicación de los pares torsores **T** y **T**′. Si *todas* las secciones del eje, desde un extremo hasta el otro, deben permanecer planas y sin distorsión, es necesario asegurarse de que los pares se aplican de tal manera que los extremos mismos del eje permanezcan planos y sin distorsión. Esto puede lograrse aplicando los pares **T** y **T**′ a placas rígidas, que se encuentren sólidamente unidas a los extremos del eje (figura 3.13*a*). Sólo así puede estarse seguro de que todas las secciones permanecerán planas y sin distorsión cuando la carga se aplique, y que las deformaciones resultantes ocurrirán de manera uniforme a lo largo de todo el eje. Todos los círculos igualmente espaciados, que se muestran en la figura 3.13*a*, girarán en la misma cantidad en relación con sus vecinos, y cada una de las líneas rectas se convertirá en una curva (hélice) que interseca los distintos círculos con el mismo ángulo (figura 3.13*b*).

Las deducciones dadas en esta sección y en las siguientes se basarán en la suposición de placas rígidas en los extremos. Las condiciones de carga encontradas en la práctica pueden diferir de manera considerable de las correspondientes al modelo de la figura 3.13. El mérito principal de este modelo es que ayuda a definir un problema de torsión para el que puede obtenerse una solución exacta, de la misma manera que el modelo con placas rígidas en los extremos de la sección 2.17 hizo posible que se definiera un problema de carga axial que pudiera resolverse con facilidad y exactitud. Gracias al principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos para el modelo idealizado pueden extenderse a la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería. Sin embargo, deben mantenerse en la mente estos resultados asociados con el modelo específico que se muestra en la figura 3.13.

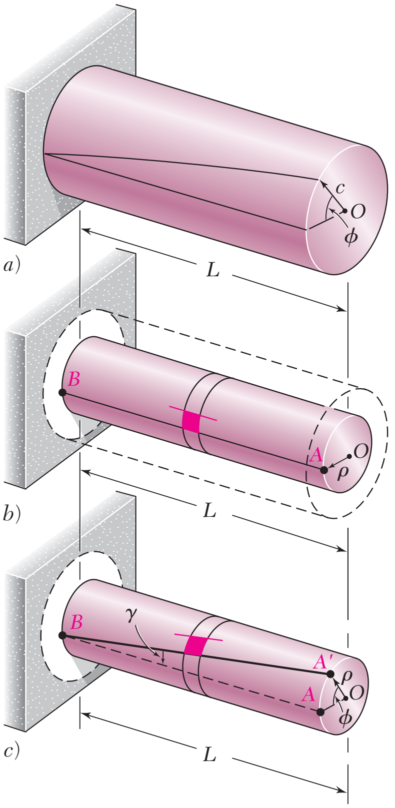


Figura 3.14

Ahora se determinará la distribución de las *deformaciones a cortante* en un eje circular de longitud L y radio c que ha sido girado en un ángulo ϕ (figura 3.14*a*). Desprendiendo del eje un cilindro de radio ρ, considere el pequeño cuadrado formado por dos círculos adyacentes y dos líneas rectas adyacentes trazadas en la superficie del cilindro antes de que se aplique carga alguna (figura 3.14*b*). Al someterse el eje a una carga de torsión, el elemento se deforma para convertirse en un rombo (figura 3.14*c*). Ahora, recuerde que en la sección 2.14 se vio que la deformación unitaria cortante γ en un elemento dado se mide por el cambio en los ángulos formados por los lados de dicho elemento. Ya que los círculos que definen dos de los lados del elemento considerado aquí permanecen sin cambio, la deformación en corte γ debe ser igual al ángulo entre las líneas AB y $A'B$. (Recuerde que γ debe expresarse en radianes.)

En la figura 3.14*c* se observa que, para valores pequeños de γ, puede expresarse la longitud de arco AA' como $AA' = L\gamma$. Pero, por otra parte, se tiene que $AA' = \rho\phi$. Se deduce que $L\gamma = \rho\phi$, o

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

donde γ y ϕ están, ambos, expresados en radianes. La ecuación obtenida muestra, como podría haberse anticipado, que la deformación a cortante γ en un punto dado del eje en torsión es proporcional al ángulo de giro ϕ. También muestra que γ es proporcional a la distancia ρ desde el eje de la flecha hasta el punto bajo consideración. Por lo tanto, la *deformación unitaria a corte en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha.*

Se deduce de la ecuación (3.2) que la deformación a cortante es máxima en la superficie del eje, donde $\rho = c$. Se tiene que

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Eliminando ϕ de las ecuaciones (3.2) y (3.3), puede expresarse la deformación a cortante γ a una distancia ρ del eje de la flecha como

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.4}$$

3.4 ESFUERZOS EN EL RANGO ELÁSTICO

Hasta el momento ninguna relación esfuerzo-deformación en particular se ha supuesto para el análisis de ejes circulares en torsión. Considere ahora el caso en que el par de torsión **T** es tal que todos los esfuerzos cortantes en el eje se encuentran por debajo de la resistencia a la cedencia τ_Y. Se sabe, por el capítulo 2, que esto significa que los esfuerzos en el eje permanecerán por debajo del límite de proporcionalidad y también por debajo del límite elástico. Por lo tanto, se aplicará la ley de Hooke y no habrá deformación permanente.

Aplicando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación a cortante de la sección 2.14, se escribe

$$\tau = G\gamma \tag{3.5}$$

donde G es el módulo de rigidez o módulo de corte del material. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.4) por G, se escribe

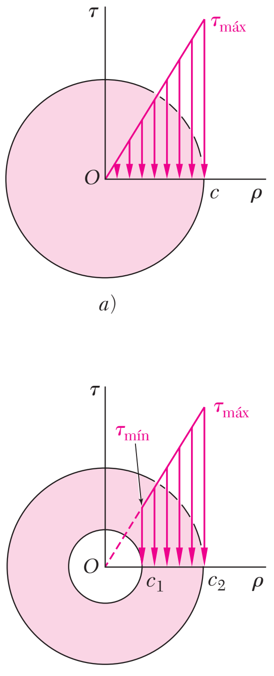
$$G\gamma = \frac{\rho}{c}G\gamma_{\text{máx}}$$

o, utilizando la ecuación (3.5),

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\text{máx}} \tag{3.6}$$

La ecuación obtenida muestra que, mientras la resistencia a la cedencia (o el límite de proporcionalidad) no sea excedida en ninguna parte de una flecha circular, *el esfuerzo cortante en la flecha varía linealmente con la distancia* ρ *desde el eje de la flecha*. La figura 3.15*a* muestra la distribución de esfuerzos en un eje circular de radio c, y la figura 3.15*b* la muestra en un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2. De la ecuación (3.6) se encuentra que, en el segundo caso,

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{\text{máx}} \tag{3.7}$$



a)

b)

Figura 3.15

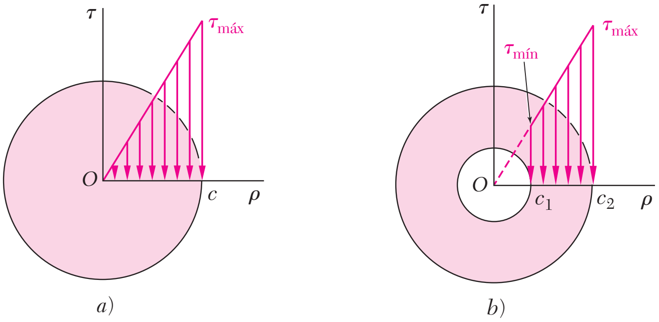


Figura 3.15 (repetida)

Recuerde ahora que en la sección 3.2 se vio que la suma de los momentos de las fuerzas elementales ejercidas sobre cualquier sección transversal del eje debe ser igual a la magnitud T del par ejercido sobre el eje:

$$\int \rho(\tau\, dA) = T \tag{3.1}$$

Sustituyendo τ de la ecuación (3.6) en la ecuación (3.1), se escribe

$$T = \int \rho\tau\, dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c}\int \rho^2\, dA$$

La integral en el último miembro representa el momento polar de inercia J de la sección transversal con respecto a su centro O. Se tiene entonces que

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} \tag{3.8}$$

o, despejando para $\tau_{\text{máx}}$

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J}} \tag{3.9}$$

Sustituyendo $\tau_{\text{máx}}$ de la ecuación (3.9) en la ecuación (3.6), se expresa el momento cortante a cualquier distancia ρ del eje de la flecha como

$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}} \tag{3.10}$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) se conocen como las *fórmulas de torsión elástica*. Recuerde de la estática que el momento polar de inercia de un círculo de radio c es $J = \frac{1}{2}\pi c^4$. En el caso de un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2, el momento polar de inercia es

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c_2^4 - \tfrac{1}{2}\pi c_1^4 = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) \tag{3.11}$$

Note que, si se emplean unidades métricas del SI en la ecuación (3.9) o en la (3.10), T se expresará en $\mathrm{N \cdot m}$, c o ρ en metros y J en m^4; se verifica que el esfuerzo cortante resultante se exprese en $\mathrm{N/m^2}$, es decir, en pascales (Pa). Si se emplean las unidades acostumbradas en Estados Unidos, T deberá expresarse en $\mathrm{lb \cdot in.}$, c o ρ en in., y J en $\mathrm{in.}^4$, con el esfuerzo cortante resultante expresado en psi.

EJEMPLO 3.01

Un eje cilíndrico hueco de acero mide 1.5 m de longitud y tiene diámetros interior y exterior iguales a 40 y 60 mm, respectivamente (figura 3.16). *a*) ¿Cuál es el máximo par de torsión que puede aplicarse al eje si el esfuerzo cortante no debe exceder 120 MPa? *b*) ¿Cuál es el valor mínimo correspondiente del esfuerzo cortante en el eje?

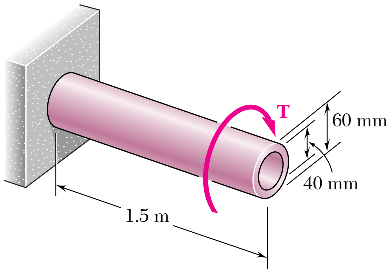


Figura 3.16

a) Máximo par de torsión permisible. El máximo par permisible **T** que puede aplicarse al eje es el par para el que $\tau_{\text{máx}} = 120$ MPa. Como este valor es menor que la resistencia de cedencia del acero, se puede usar la ecuación (3.9). Despejando T de esta ecuación, se tiene

$$T = \frac{J\tau_{\text{máx}}}{c} \qquad (3.12)$$

Recuerde que el momento polar de inercia J de la sección transversal es dado por la ecuación (3.11), donde $c_1 = \frac{1}{2}(40 \text{ mm}) = 0.02$ m y $c_2 = \frac{1}{2}(60 \text{ mm}) = 0.03$ m, y se escribe

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Sustituyendo J y $\tau_{\text{máx}}$ en la ecuación (3.12) y haciendo $c = c_2 = 0.03$ m, se tiene

$$T = \frac{J\tau_{\text{máx}}}{c} = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}}$$
$$= 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

b) Esfuerzo mínimo de corte. El valor mínimo del esfuerzo cortante ocurre en la superficie interior del eje. Se obtiene de la ecuación (3.7), que expresa que $\tau_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ son respectivamente proporcionales a c_1 y c_2:

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{\text{máx}} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}}(120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$

Las fórmulas de torsión (3.9) y (3.10) se dedujeron para un eje con sección transversal circular uniforme sometido a pares torsores en sus extremos. Sin embargo, también pueden utilizarse para un eje con sección transversal variable o para un eje sujeto a pares de torsión en lugares distintos de sus extremos (figura 3.17*a*). La distribución de los esfuerzos cortantes en una sección transversal S dada del eje se obtiene de la ecuación (3.9), donde J denota el momento polar de inercia de esa sección, y donde T representa el *par de torsión interno* en esa sección. El valor de T se obtiene dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción de eje localizada de un lado del corte (figura 3.17*b*) y escribiendo que la suma de los pares aplicados a esta porción, incluyendo el par interno **T**, es cero (véase problema modelo 3.1).

Hasta este punto, el análisis de esfuerzos en un eje se ha limitado a los esfuerzos cortantes. Esto se debe a que el elemento que se seleccionó estaba orientado de tal manera que sus caras eran paralelas o bien, perpendiculares al eje de la flecha (figura 3.6). De análisis anteriores (véanse secciones 1.11 y 1.12) se sabe que los esfuerzos normales, los esfuerzos cortantes o una combinación de ambos pueden encontrarse bajo la misma condición de carga, dependiendo de la orientación del elemento elegido. Considere los dos elementos *a* y *b* localizados en la superficie de un eje circular sometido a torsión (figura 3.18). Como las caras del elemento *a* son respectivamente para-

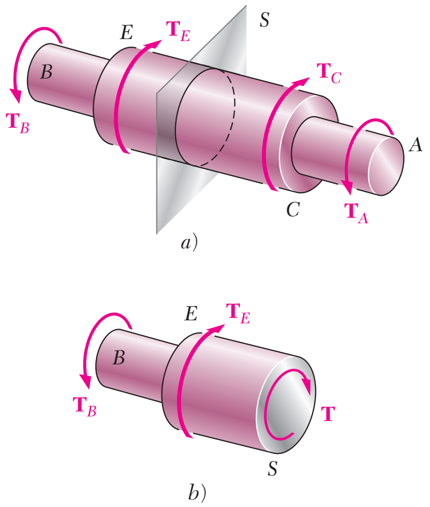


Figura 3.17

lelas y perpendiculares al eje de la flecha, los únicos esfuerzos en el elemento serán los esfuerzos de corte definidos por la fórmula (3.9), específicamente $\tau_{\text{máx}} = Tc/J$. Por otro lado, las caras del elemento *b*, que forman ángulos arbitrarios con el eje de la flecha, estarán sujetas a una combinación de esfuerzos normales y cortantes.

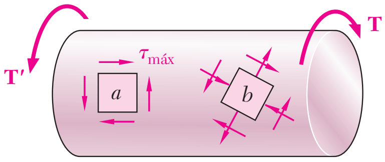


Figura 3.18

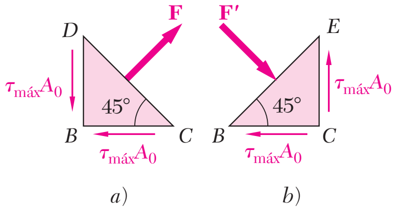


Figura 3.19

Considere el caso particular de un elemento *c* (que no se muestra) a 45° al eje de la flecha. Para determinar los esfuerzos en las caras de este elemento, se consideran los dos elementos triangulares mostrados en la figura 3.19 y se dibujan sus diagramas de cuerpo libre. En el caso del elemento de la figura 3.19*a*, se sabe que los esfuerzos ejercidos en las caras *BC* y *BD* son los esfuerzos cortantes $\tau_{\text{máx}} = Tc/J$. La magnitud de las fuerzas cortantes correspondientes es, por lo tanto, $\tau_{\text{máx}}A_0$, donde A_0 denota el área de la cara. Observando que las componentes a lo largo de *DC* de las dos fuerzas cortantes son iguales y opuestas, se concluye que la fuerza **F** ejercida sobre *DC* debe ser perpendicular a esa cara. Es una fuerza de tensión, y su magnitud es

$$F = 2(\tau_{\text{máx}}A_0)\cos 45° = \tau_{\text{máx}}A_0\sqrt{2} \tag{3.13}$$

El esfuerzo correspondiente se obtiene dividiendo la fuerza *F* entre el área *A* de la cara *DC*. Observando que $A = A_0\sqrt{2}$, se escribe

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\text{máx}}A_0\sqrt{2}}{A_0\sqrt{2}} = \tau_{\text{máx}} \tag{3.14}$$

Un análisis similar del elemento de la figura 3.19*b* muestra que el esfuerzo sobre la cara *BE* es $\sigma = -\tau_{\text{máx}}$. Se concluye que los esfuerzos ejercidos sobre las caras de un elemento *c* a 45° al eje de la flecha (figura 3.20) son esfuerzos normales iguales a $\pm\tau_{\text{máx}}$. Así, mientras que el elemento *a* en la figura 3.20 está en cortante puro, el elemento *c* en la misma figura está sometido a esfuerzos de tensión en dos de sus caras, y a un esfuerzo de compresión en las otras dos. También se advierte que todos los esfuerzos involucrados tienen la misma magnitud, *Tc*/*J*.†

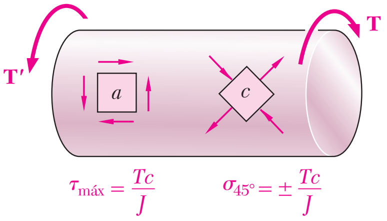
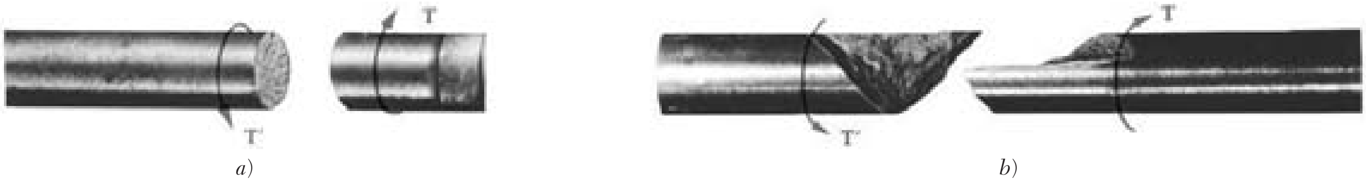

T′
a
c
T
$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J}$
$\sigma_{45°} = \pm\frac{Tc}{J}$

Figura 3.20

Como se vio en la sección 2.3, los materiales dúctiles generalmente fallan a cortante. Por lo tanto, cuando está sujeta a torsión, una probeta *J* hecha de un material dúctil se rompe a lo largo de un plano perpendicular a su eje longitudinal (figura 3.21*a*). Por otro lado, los materiales frágiles son más débiles a tensión que a corte. Por ello, cuando se somete a torsión, una probeta de un material frágil tiende a fracturarse a lo largo de superficies perpendiculares a la dirección en que la tensión es máxima, esto es, a lo largo de superficies que forman un ángulo de 45° con el eje del espécimen (figura 3.21*b*).



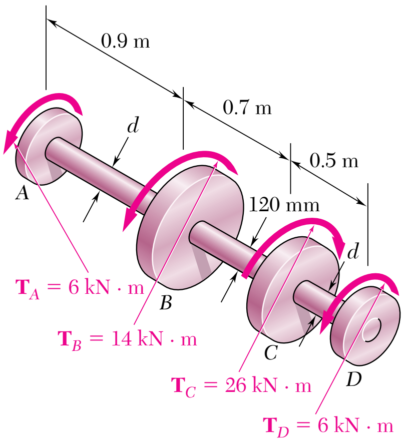
a)

b)

Figura 3.21

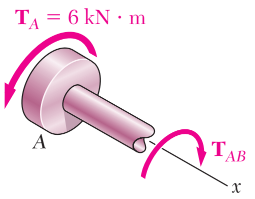
---

† Los esfuerzos en elementos con orientación arbitraria, como el elemento *b* de la figura 3.18, se estudiarán en el capítulo 7.



PROBLEMA MODELO 3.1

El eje *BC* es hueco y tiene diámetros interior y exterior de 90 mm y 120 mm, respectivamente. Los ejes *AB* y *CD* son sólidos y de diámetro *d*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) los esfuerzos cortantes máximo y mínimo en el eje *BC*, *b*) el diámetro *d* requerido en los ejes *AB* y *CD* si los esfuerzos cortantes permisibles en estos ejes son de 65 MPa.



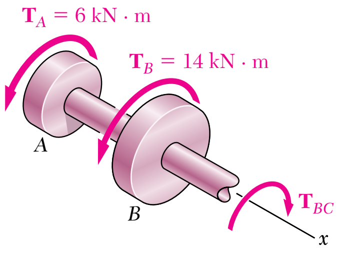
SOLUCIÓN

Ecuaciones de estática. Denotando con $\mathbf{T}_{AB}$ el par de torsión en el eje *AB*, se hace un corte en el eje *AB* y, para el cuerpo libre mostrado, se escribe

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (6\ \text{kN}\cdot\text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Ahora se corta en el eje *BC* y, para el cuerpo libre mostrado en la figura, se tiene

$$\Sigma M_x = 0: \quad (6\ \text{kN}\cdot\text{m}) + (14\ \text{kN}\cdot\text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 20\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

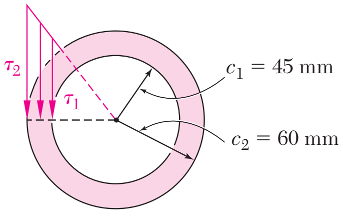


***a*) Eje *BC*.** Para este eje hueco se tiene

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

Esfuerzo cortante máximo. En la superficie externa, se tiene

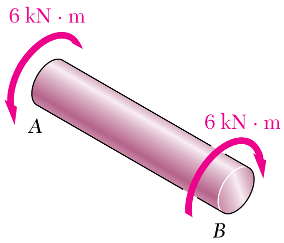
$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{T_{BC}c_2}{J} = \frac{(20\ \text{kN}\cdot\text{m})(0.060\ \text{m})}{13.92 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} \qquad \tau_{\text{máx}} = 86.2\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$



Esfuerzo cortante mínimo. Se sabe que los esfuerzos son proporcionales a la distancia del eje de la flecha.

$$\frac{\tau_{\text{mín}}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \frac{\tau_{\text{mín}}}{86.2\ \text{MPa}} = \frac{45\ \text{mm}}{60\ \text{mm}} \qquad \tau_{\text{mín}} = 64.7\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

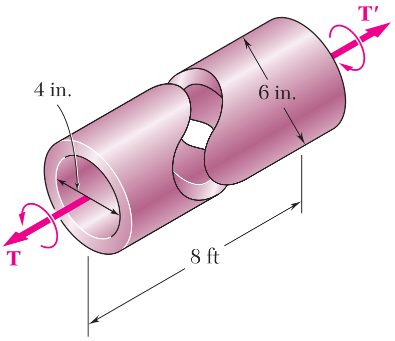
***b*) Ejes *AB* y *CD*.** Se advierte que en ambos ejes la magnitud del par de torsión es $T = 6\ \text{kN}\cdot\text{m}$ y $\tau_{\text{perm}} = 65$ MPa. Denotando con *c* el radio de los ejes, se escribe



$$\tau = \frac{Tc}{J} \qquad 65\ \text{MPa} = \frac{(6\ \text{kN}\cdot\text{m})c}{\frac{\pi}{2}c^4}$$

$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 \qquad c = 38.9 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

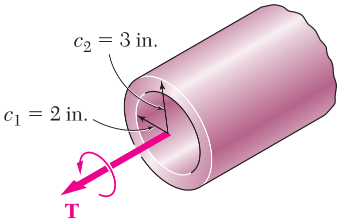
$$d = 2c = 2(38.9\ \text{mm}) \qquad d = 77.8\ \text{mm} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 3.2

El diseño preliminar de un eje grande que conecta a un motor con un generador requiere el uso de un eje hueco con diámetros interior y exterior de 4 in. y 6 in., respectivamente. Sabiendo que el esfuerzo cortante permisible es de 12 ksi, determine el máximo par que puede ser transmitido *a*) por el eje como fue diseñado, *b*) por un eje sólido del mismo peso, *c*) por un eje hueco del mismo peso y de 8 in. de diámetro exterior.

SOLUCIÓN



a) El eje hueco como fue diseñado. Para el eje hueco se tiene que

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(3\text{ in.})^4 - (2\text{ in.})^4] = 102.1\text{ in.}^4$$

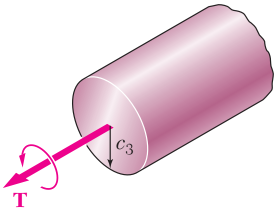
Utilizando la ecuación (3.9) se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} \qquad 12\text{ ksi} = \frac{T(3\text{ in.})}{102.1\text{ in.}^4} \qquad T = 408\text{ kip}\cdot\text{in.} \blacktriangleleft$$

b) Eje sólido de igual peso. Para que el eje como se diseñó y este eje sólido tengan el mismo peso y longitud, las áreas de sus secciones transversales deben ser iguales.

$$A_{(a)} = A_{(b)}$$

$$\pi[(3\text{ in.})^2 - (2\text{ in.})^2] = \pi c_3^2 \qquad c_3 = 2.24\text{ in.}$$



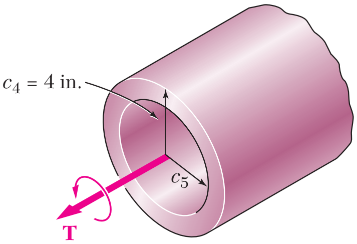
Ya que $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi, se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_3}{J} \qquad 12\text{ ksi} = \frac{T(2.24\text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(2.24\text{ in.})^4} \qquad T = 211\text{ kip}\cdot\text{in.} \blacktriangleleft$$

c) Eje hueco con 8 in. de diámetro. Para un peso igual, nuevamente deben ser iguales las áreas de las secciones transversales. Se determina el diámetro interior del eje a partir de

$$A_{(a)} = A_{(c)}$$

$$\pi[(3\text{ in.})^2 - (2\text{ in.})^2] = \pi[(4\text{ in.})^2 - c_5^2] \qquad c_5 = 3.317\text{ in.}$$



Para $c_5 = 3.317$ in. y $c_4 = 4$ in.,

$$J = \frac{\pi}{2}[(4\text{ in.})^4 - (3.317\text{ in.})^4] = 212\text{ in.}^4$$

Con $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi y $c_4 = 4$ in.,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \qquad 12\text{ ksi} = \frac{T(4\text{ in.})}{212\text{ in.}^4} \qquad T = 636\text{ kip}\cdot\text{in.} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.1 Para el eje cilíndrico que se muestra en la figura, determine el máximo esfuerzo cortante causado por un par de torsión con magnitud $T = 1.5$ kN · m.

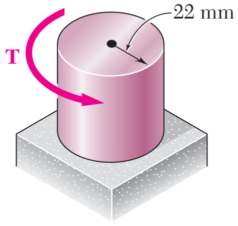


Figura P3.1 y P3.2

3.2 Determine el par de torsión **T** que causa un esfuerzo cortante máximo de 80 MPa en el eje cilíndrico de acero que se muestra en la figura.

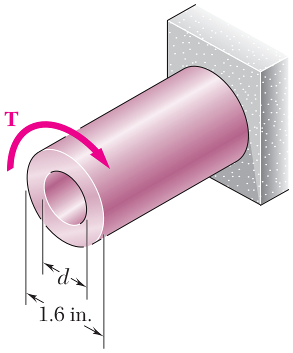


Figura P3.3 y *P3.4*

3.3 Si se sabe que el diámetro interior del eje hueco mostrado es $d = 0.9$ in., determine el esfuerzo cortante máximo causado por un par de torsión de magnitud $T = 9$ kip · in.

3.4 Si se sabe que $d = 1.2$ in., determine el par de torsión **T** que causa un esfuerzo cortante máximo de 7.5 ksi en el eje hueco que se muestra en la figura.

3.5 *a*) Determine el par de torsión que puede aplicarse a un eje sólido de 20 mm de diámetro sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 80 MPa. *b*) Resuelva el inciso *a*) con el supuesto de que al eje sólido se le reemplaza con un eje hueco con la misma área de sección transversal y con un diámetro interior igual a la mitad de su propio diámetro exterior.

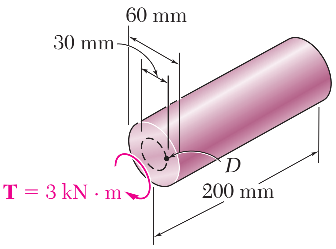


Figura P3.6

3.6 Un par de torsión $T = 3$ kN · m se aplica al cilindro de bronce sólido mostrado en la figura. Determine *a*) el máximo esfuerzo cortante, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *D* que yace sobre un círculo de 15 mm de radio dibujado en el extremo del cilindro, *c*) el porcentaje del par de torsión soportado por la porción del cilindro dentro del radio de 15 mm.

3.7 El vástago sólido *AB* está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine *a*) el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse en *A* si no debe excederse el esfuerzo cortante permisible en la manga *CD*, *b*) el valor requerido correspondiente del diámetro d_s en el vástago *AB*.

3.8 El vástago sólido *AB* tiene un diámetro $d_s = 1.5$ in. y está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse en *A*.

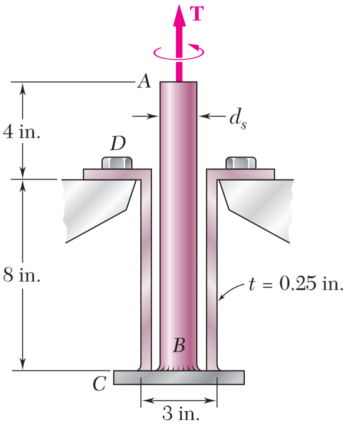


Figura *P3.7* y P3.8

3.9 Los pares de torsión mostrados se ejercen sobre las poleas A y B. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje AB, *b*) en el eje BC.

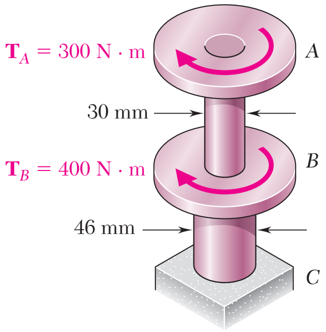

$\mathbf{T}_A = 300$ N · m
A
30 mm
$\mathbf{T}_B = 400$ N · m
B
46 mm
C

Figura P3.9

3.10 Para reducir la masa total del ensamble del problema 3.9, se ha considerado un nuevo diseño en el que el diámetro del eje BC será menor. Determine el mínimo diámetro del eje BC para el que el máximo valor del esfuerzo cortante en el ensamble no aumentará.

3.11 Bajo condiciones normales de operación, el motor eléctrico ejerce un par de torsión de 2.8 kN · m en el eje AB. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el máximo esfuerzo cortante *a*) en el eje AB, *b*) en el eje BC, *c*) en el eje CD.

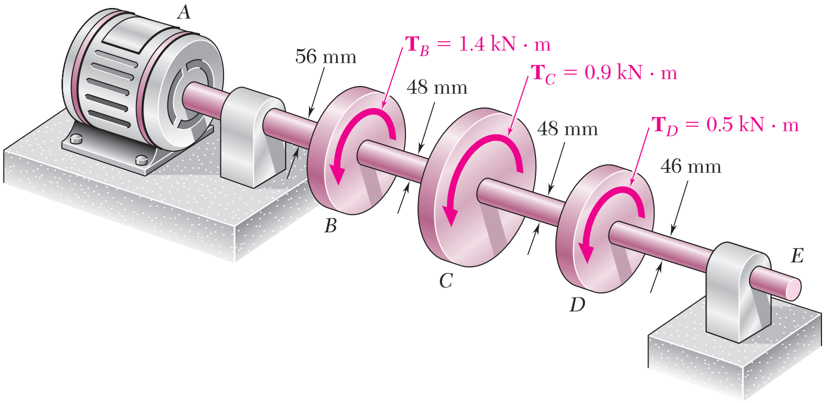

A
56 mm
$\mathbf{T}_B = 1.4$ kN · m
48 mm
$\mathbf{T}_C = 0.9$ kN · m
48 mm
$\mathbf{T}_D = 0.5$ kN · m
46 mm
B
C
D
E

Figura P3.11

3.12 Para reducir la masa total del ensamble del problema 3.11, se ha considerado un nuevo diseño en el que el diámetro del eje BC será menor. Determine el mínimo diámetro del eje BC para el que el máximo valor del esfuerzo cortante en el ensamble no aumentará.

3.13 Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas *A*, *B* y *C*. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *BC*.

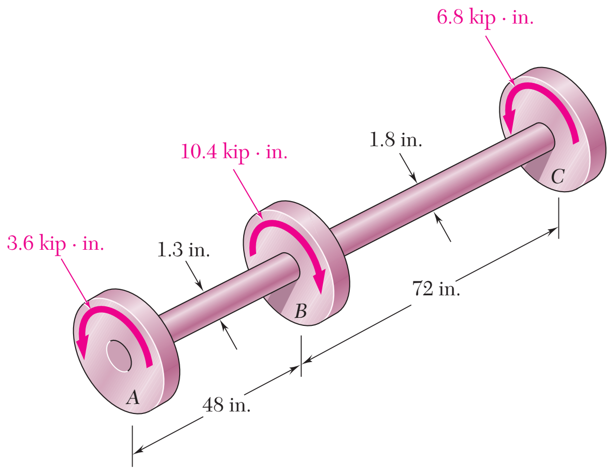


Figura P3.13 y P3.14

3.14 Los ejes del ensamble de poleas que se muestran en la figura serán rediseñados. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada eje es de 8.5 ksi, determine el diámetro mínimo permisible para *a*) el eje *AB*, *b*) el eje *BC*.

3.15 El esfuerzo cortante permisible es de 15 ksi en la varilla de acero *AB* y de 8 ksi en la varilla de latón *BC*. Si se sabe que un par de torsión de magnitud $T = 10$ kip · in. se aplica en *A*, determine el diámetro requerido de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

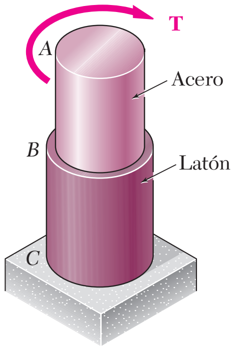


Figura P3.15 y P3.16

3.16 El esfuerzo cortante permisible es de 15 ksi en la varilla de acero *AB* de 1.5 in. de diámetro y de 8 ksi en la varilla de latón *BC* de 1.8 in. de diámetro. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine el máximo par de torsión que puede aplicarse en *A*.

3.17 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un latón para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 55 MPa. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine los diámetros mínimos d_{AB} y d_{BC} con los cuales no se excede el esfuerzo cortante permisible.

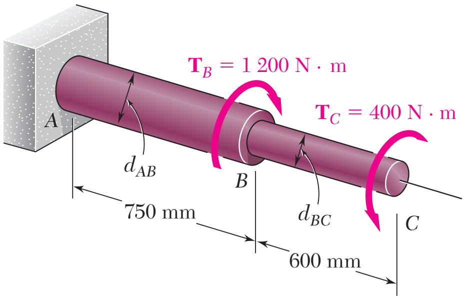


Figura *P3.17*

3.18 Resuelva el problema 3.17, pero suponga que se invierte la dirección de $\mathbf{T}_C$.

3.19 El esfuerzo permisible es de 50 MPa en la varilla de latón *AB* y de 25 MPa en la varilla de aluminio *BC*. Si se sabe que en *A* se aplica un par de torsión con magnitud $T = 125$ N · m, determine el diámetro requerido de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

3.20 La varilla *sólida BC* tiene un diámetro de 30 mm y está hecha de un aluminio para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 25 MPa. La varilla *AB* es *hueca* y tiene un diámetro exterior de 25 mm; está hecha de un latón para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa. Determine *a*) el máximo diámetro interior de la varilla *AB* para el cual el factor de seguridad es el mismo para cada varilla, *b*) el máximo par de torsión que puede aplicarse en *A*.

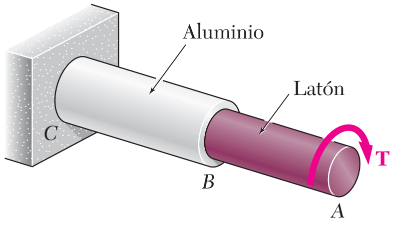


Figura P3.19 y P3.20

3.21 Un par de torsión de magnitud $T = 8$ kip · in. se aplica en D como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 7.5 ksi en cada eje, determine el diámetro requerido *a*) del eje *AB*, *b*) del eje *CD*.

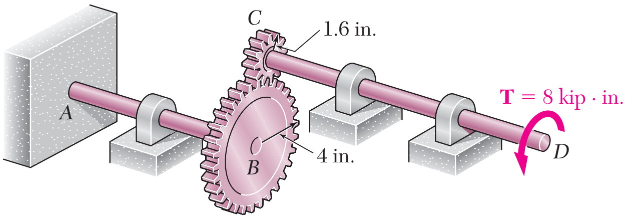


Figura P3.21 y *P3.22*

3.22 Un par de torsión de magnitud $T = 8$ kip · in. se aplica en D como se muestra en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje *AB* es de 2.25 in. y que el diámetro del eje *CD* es de 1.75 in., determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *CD*.

3.23 Dos ejes sólidos de acero están conectados por los engranes que se muestran en la figura. Se aplica un par de torsión de magnitud $T = 900$ N · m al eje *AB*. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa y se consideran sólo los esfuerzos debidos al giro, determine el diámetro requerido para *a*) el eje *AB*, *b*) el eje *CD*.

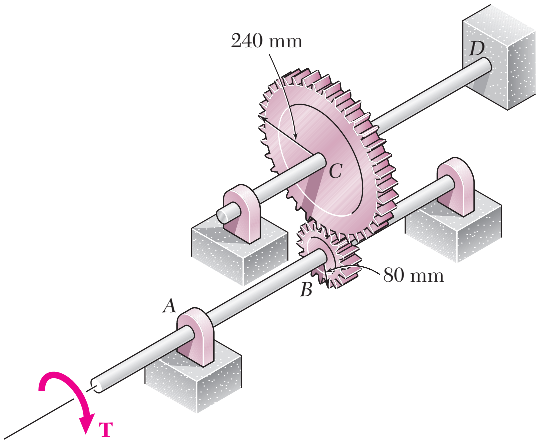


Figura P3.23 y P3.24

3.24 El eje *CD* consiste en una varilla de 66 mm de diámetro y está conectado al eje *AB* de 48 mm de diámetro como se muestra en la figura. Si se consideran sólo los esfuerzos debidos al giro y se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa para cada eje, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse.

3.25 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes, como se muestra en la figura, y están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 7 000 psi. Si se sabe que los diámetros de los dos ejes son, respectivamente, $d_{BC} = 1.6$ in. y $d_{EF} = 1.25$ in. determine el máximo par de torsión $\mathbf{T}_C$ que puede aplicarse en C.

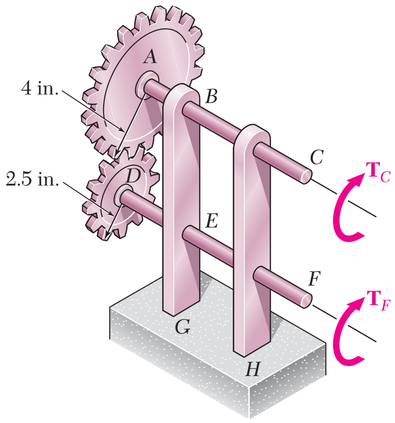


Figura ***P3.25*** **y P3.26**

3.26 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes, como se muestra en la figura, y están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 8 500 psi. Si se sabe que en *C* se aplica un par de torsión de magnitud $T_C = 5$ kip · in. y que el ensamble está en equilibrio, calcule el diámetro requerido de *a*) el eje *BC*, *b*) el eje *EF*.

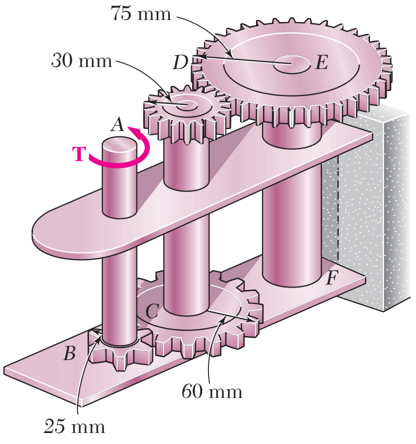
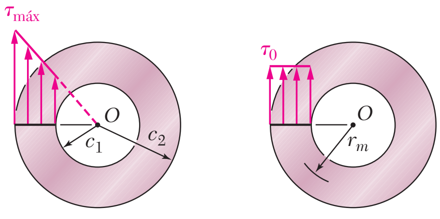


Figura P3.27 y P3.28

3.27 Un par de torsión con magnitud $T = 120$ N · m se aplica al eje *AB* del tren de engranes mostrado. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada uno de los tres ejes sólidos es de 75 MPa, determine el diámetro requerido de *a*) el eje *AB*, *b*) el eje *CD*, *c*) el eje *EF*.

3.28 Un par de torsión con magnitud $T = 100$ N · m se aplica al eje *AB* del tren de engranes mostrado. Si se sabe que los diámetros respectivos de los tres ejes sólidos son $d_{AB} = 21$ mm, $d_{CD} = 30$ mm y $d_{EF} = 40$ mm, determine el esfuerzo cortante máximo en *a*) el eje *AB*, *b*) el eje *CD*, *c*) el eje *EF*.

3.29 En tanto que la distribución exacta de los esfuerzos de corte en un eje cilíndrico hueco es como se muestra en la figura P3.29*a*, un valor aproximado puede obtenerse para $\tau_{\text{máx}}$ si los esfuerzos están distribuidos uniformemente en toda el área *A* de la sección transversal, como se muestra en la figura P3.29*b*, y además si todas las fuerzas elementales de corte actúan a una distancia de *O* igual al radio medio de la sección transversal $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Este valor aproximado es $\tau_0 = T/Ar_m$, donde *T* es el par de torsión aplicado. Determine la razón $\tau_{\text{máx}}/\tau_0$ del valor verdadero de máximo esfuerzo cortante y su valor aproximado τ_0 para valores de c_1/c_2, respectivamente, iguales a 1.00, 0.95, 0.75, 0.50 y 0.



a) *b*)

Figura P3.29

3.30 *a*) Para un esfuerzo permisible dado, encuentre la razón *T*/*w* del máximo par de torsión permisible *T* y del peso por unidad de longitud *w* para el eje hueco mostrado en la figura. *b*) Si se denota con $(T/w)_0$ el valor de esta razón calculada para un eje sólido con el mismo radio c_2, exprese la razón *T*/*w* para el eje hueco en términos de $(T/w)_0$ y de c_1/c_2.

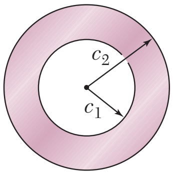


Figura P3.30

3.5 ÁNGULO DE GIRO EN EL RANGO ELÁSTICO

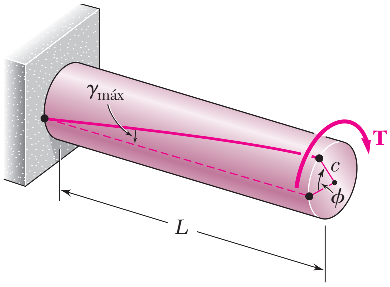


Figura 3.22

En esta sección se deducirá una relación entre el ángulo de giro ϕ de un eje circular y el par de torsión **T** ejercido sobre el eje. Se supondrá que la totalidad del eje permanece elástica. Considerando primero el caso de un eje de longitud L y sección transversal uniforme de radio c sujeto a un par de torsión **T** en su extremo libre (figura 3.22), se sabe de la sección 3.3 que el ángulo de giro ϕ y la deformación máxima a cortante $\gamma_{\text{máx}}$ se relacionan como sigue:

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Pero, en el rango elástico, el esfuerzo de cedencia no se excede en ninguna parte del eje, se aplica la ley de Hooke y se tiene que $\gamma_{\text{máx}} = \tau_{\text{máx}}/G$ o, a partir de la ecuación (3.9),

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G} = \frac{Tc}{JG} \tag{3.15}$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (3.3) y (3.15), y despejando ϕ, se tiene que

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{JG}} \tag{3.16}$$

donde ϕ se expresa en radianes. La relación obtenida muestra que, dentro del rango elástico, el *ángulo de giro ϕ es proporcional al par de torsión T aplicado al eje*. Esto está de acuerdo con la evidencia experimental citada al principio de la sección 3.3.

La ecuación (3.16) suministra un método conveniente para determinar el módulo de rigidez de un material dado. Una probeta del material, en la forma de una varilla cilíndrica de diámetro y longitud conocidos, se coloca en una *máquina de ensayo a torsión* (figura 3.23). Se aplican pares de torsión con magnitud T progresivamente mayor a la probeta, y se registran los valores correspondientes del ángulo de giro ϕ sobre una longitud L. Mientras no se exceda el esfuerzo de cedencia del material, los puntos obtenidos de graficar ϕ contra T caerán en una línea recta. La pendiente de esta línea representa la cantidad JG/L, de la que puede calcularse el módulo de rigidez G.

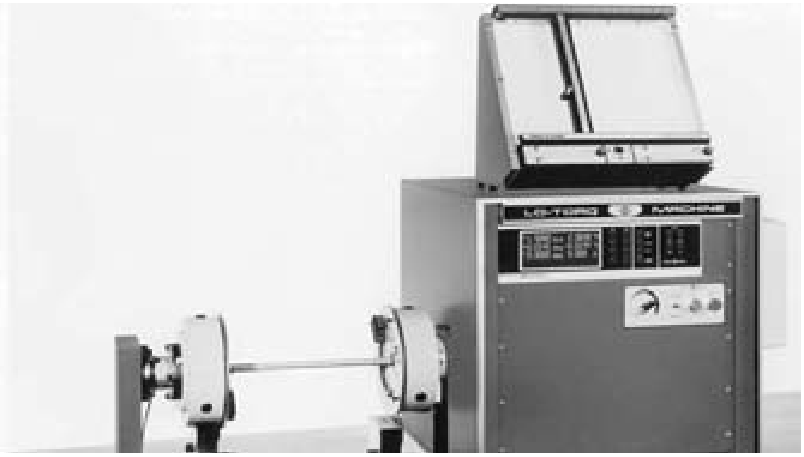


Figura 3.23 Máquina para ensayos de torsión.

EJEMPLO 3.02

¿Qué par de torsión deberá aplicarse al extremo del eje del ejemplo 3.01 para producir un giro de 2°? Utilice el valor $G = 77$ GPa para el módulo de rigidez del acero.

Despejando T de la ecuación (3.16), se escribe

$$T = \frac{JG}{L}\phi$$

Sustituyendo los valores dados

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

y recordando del ejemplo 3.01 que, para una sección transversal dada,

$$J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

se tiene que

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}}(34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.829 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EJEMPLO 3.03

¿Qué ángulo de giro creará un esfuerzo cortante de 70 MPa en la superficie interior del eje hueco de acero de los ejemplos 3.01 y 3.02?

El método que primero viene a la mente para resolver este problema es utilizar la ecuación (3.10) para encontrar el par de torsión T correspondiente al valor dado de τ, y la ecuación (3.16) para determinar el ángulo de giro ϕ correspondiente al valor de T recién encontrado.

Sin embargo, puede utilizarse una solución más directa. De la ley de Hooke, primero se calcula la deformación a cortante en la superficie interna del eje:

$$\gamma_{\text{mín}} = \frac{\tau_{\text{mín}}}{G} = \frac{70 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 909 \times 10^{-6}$$

Usando la ecuación (3.2), que fue obtenida expresando la longitud del arco AA' en la figura 3.14*c* en términos tanto de γ y ϕ, se tiene que:

$$\phi = \frac{L\gamma_{\text{mín}}}{c_1} = \frac{1\,500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}}(909 \times 10^{-6}) = 68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para obtener el ángulo de giro en grados, se escribe

$$\phi = (68.2 \times 10^{-3} \text{ rad})\left(\frac{360°}{2\pi \text{ rad}}\right) = 3.91°$$

La fórmula (3.16) para el ángulo de giro únicamente puede utilizarse si el eje es homogéneo (G constante), si tiene una sección transversal uniforme y sólo si está cargado en sus extremos. Si el eje es sometido a par de torsión en lugares distintos de los extremos, o si consta de varias porciones con secciones transversales distintas y posiblemente distintos materiales, debe dividirse en partes componentes que satisfagan individualmente las condiciones requeridas para la aplicación de la fórmula (3.16). En el caso del eje AB de la figura 3.24, por ejemplo, deben considerarse cuatro partes diferentes: AC, CD, DE y EB. El ángulo total de giro del eje, esto es, el ángulo que gira el extremo A con respecto al extremo B, se obtiene sumando *algebraicamente* los ángulos de giro de cada parte componente. Denotando respectivamente con T_i, L_i, J_i y G_i el par de torsión interno, longitud, momento polar de inercia de la sección transversal y módulo de rigidez correspondiente a la i-ésima parte, el ángulo total de giro del eje se expresa como

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.17}$$

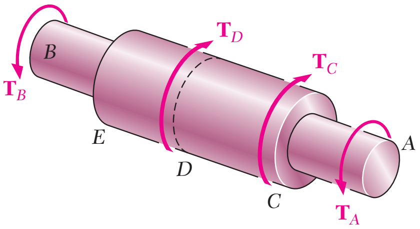


Figura 3.24

El par de torsión interno T_i en cualquier parte dada del eje se obtiene haciendo un corte a través de esa parte y dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción del eje situada a un lado de la sección. Este procedimiento, que ya se explicó en la sección 3.4 y se ilustró en la figura 3.17, se aplica en el problema modelo 3.3.

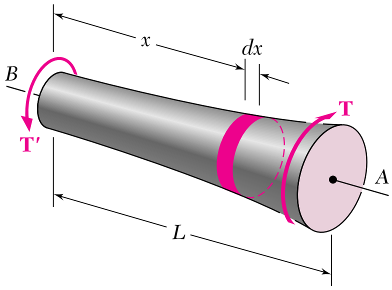


Figura 3.25

En el caso de un eje con sección transversal circular variable, como se muestra en la figura 3.25, la fórmula (3.16) puede aplicarse a un disco con grosor *dx*. El ángulo por el que una cara del disco gira con respecto a la otra es, por lo tanto,

$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

donde *J* es una función de *x* que puede determinarse. Integrando en *x* de 0 a *L*, se obtiene el ángulo total de giro del eje:

$$\boxed{\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG}} \tag{3.18}$$

Tanto el eje de la figura 3.22, que fue empleado para deducir la fórmula (3.16), como el eje de la figura 3.16, que fue analizado en los ejemplos 3.02 y 3.03, tenían un extremo unido a un soporte fijo. En cada caso, por lo tanto, el ángulo de giro ϕ del eje fue igual al ángulo de rotación de su extremo libre. Cuando ambos extremos de un eje giran, sin embargo, el ángulo de giro del eje es igual al ángulo a través del que un extremo del eje gira *con respecto al otro*. Considere, por ejemplo, el ensamble de la figura 3.26*a*, compuesto por dos ejes elásticos *AD* y *BE*, cada uno de longitud *L*, radio *c* y módulo de rigidez *G*, unidos a engranes que se juntan en *C*. Si un par de torsión **T** se aplica en *E* (figura 3.26*b*), ambos ejes se torcerán. Puesto que el extremo *D* del eje *AD* es fijo, el ángulo de giro *AD* se mide por el ángulo de rotación ϕ_A del extremo *A*. Por otra parte, ya que ambos extremos del eje *BE* giran, el ángulo de giro de *BE* es igual a la diferencia entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E, es decir, el ángulo de giro es igual al ángulo a través del cual el extremo *E* gira con respecto al extremo *B*. Denotando este ángulo relativo de rotación $\phi_{E/B}$, se escribe

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

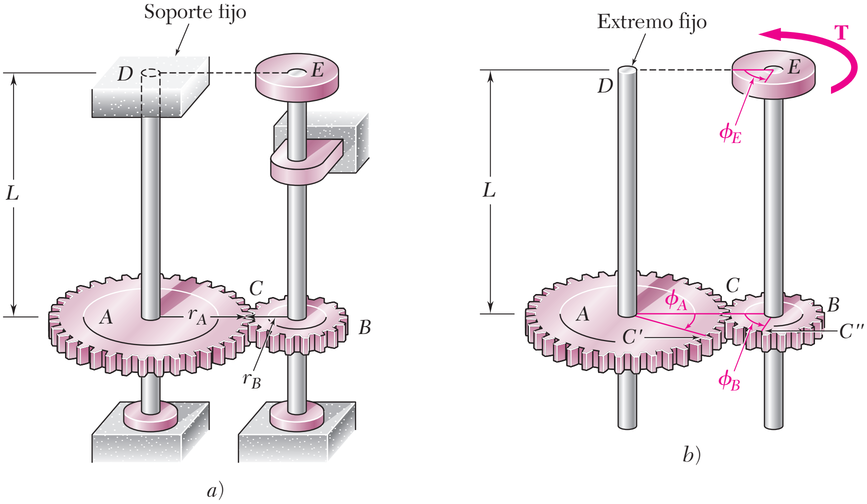


Figura 3.26

EJEMPLO 3.04

Para el ensamble de la figura 3.26, sabiendo que $r_A = 2r_B$, determine el ángulo de rotación del extremo E del eje BE cuando el par **T** se aplica a E.

Primero se determina el par $\mathbf{T}_{AD}$ ejercido sobre el eje AD. Observando que se aplican fuerzas iguales y opuestas **F** y **F′** sobre los dos engranes en C (figura 3.27), y recordando que $r_A = 2r_B$, se concluye que el par ejercido sobre el eje AD es el doble del ejercido en el eje BE; por lo tanto, $T_{AD} = 2T$.

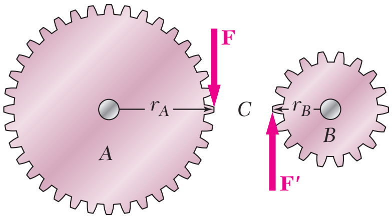


Figura 3.27

Como el extremo D del eje AD está fijo, el ángulo de rotación ϕ_A del engrane A es igual al ángulo de giro del eje y se obtiene de

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{2TL}{JG}$$

Observando que los arcos CC' y CC'' de la figura 3.26*b* deben ser iguales, se escribe $r_A\phi_A = r_B\phi_B$ y se obtiene

$$\phi_B = (r_A/r_B)\phi_A = 2\phi_A$$

Se tiene, por lo tanto

$$\phi_B = 2\phi_A = \frac{4TL}{JG}$$

Considerando ahora el eje BE, recuerde que el ángulo de giro del eje es igual al ángulo $\phi_{E/B}$ a través del que el extremo E gira con respecto al extremo B. Se tiene que

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE}L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

El ángulo de rotación del extremo E se obtiene de

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B}$$

$$= \frac{4TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5TL}{JG}$$

3.6 EJES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

En la sección 3.4 se vio que para determinar los esfuerzos en un eje era necesario calcular primero los pares de torsión internos en las distintas partes del eje. Estos pares se obtuvieron por medio de estática dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción del eje localizada a un lado de un corte dado y escribiendo que la suma de los pares ejercidos en esa porción era cero.

Hay situaciones, sin embargo, donde los pares internos no pueden determinarse únicamente por medio de la estática. De hecho, en tales casos los pares externos mismos, es decir, los pares ejercidos sobre el eje por los apoyos y conexiones, no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del eje completo. Las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con relaciones que involucren las deformaciones del eje y que se obtengan considerando la geometría del problema. Debido a que la estática no es suficiente para determinar los pares internos y externos, se dice que los ejes son *estáticamente indeterminados*. El siguiente ejemplo, así como el problema modelo 3.5, mostrará cómo analizar ejes estáticamente indeterminados.

EJEMPLO 3.05

Un eje circular *AB* consiste en un cilindro de acero de 10 in. de largo y $\frac{7}{8}$ in. de diámetro, en el que se ha perforado una cavidad de 5 in. de largo y $\frac{5}{8}$ in. de diámetro desde el extremo *B*. El eje está unido a soportes fijos en ambos extremos, y un par de 90 lb · ft se aplica a la mitad (figura 3.28). Determine el par ejercido sobre el eje por cada uno de los soportes.

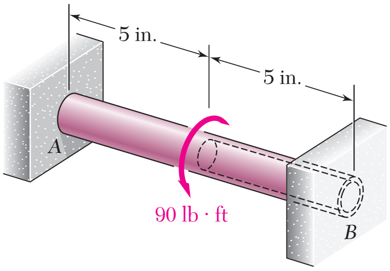


Figura 3.28

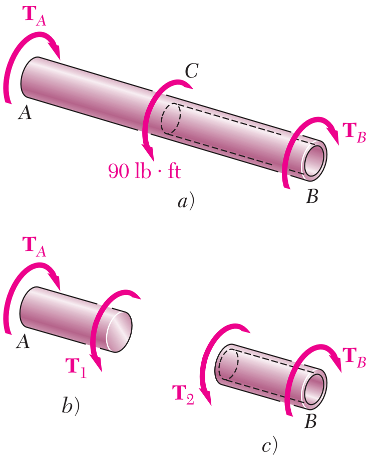


Figura 3.29

Dibujando el diagrama de cuerpo libre del eje y denotando con $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ los pares ejercidos por los soportes (figura 3.29*a*), se obtiene la ecuación de equilibrio

$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Como esta ecuación no es suficiente para determinar los dos pares desconocidos $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$, el eje es estáticamente indeterminado.

Sin embargo, $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ pueden determinarse si se observa que el ángulo total de giro del eje *AB* debe ser cero, ya que ambos extremos se encuentran empotrados. Denotando con ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, los ángulos de giro de las porciones *AC* y *CB*, se escribe

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre de una pequeña porción del eje que incluya al extremo *A* (figura 3.29*b*), se advierte que el par interno T_1 en *AC* es igual a T_A, y del diagrama de cuerpo libre de una pequeña porción del eje que incluye al extremo *B* (figura 3.29*c*) puede notarse que el par interno T_2 en *CB* es igual a T_B. Aplicando la ecuación (3.16) y observando que las porciones *AC* y *CB* del eje están torcidas en sentidos opuestos, se escribe

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

Despejando T_B, se tiene que

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

Sustituyendo datos numéricos

$$L_1 = L_2 = 5 \text{ in.}$$

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{7}{16} \text{ in.})^4 = 57.6 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\pi[(\tfrac{7}{16} \text{ in.})^4 - (\tfrac{5}{16} \text{ in.})^4] = 42.6 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$

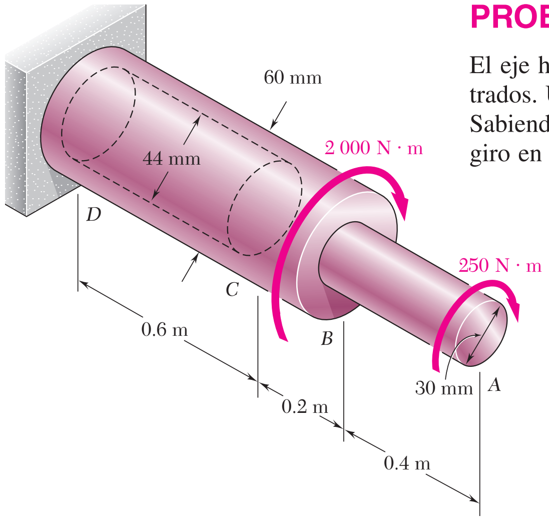
se obtiene

$$T_B = 0.740\ T_A$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de equilibrio original, se tiene que

$$1.740\ T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$T_A = 51.7 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad T_B = 38.3 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

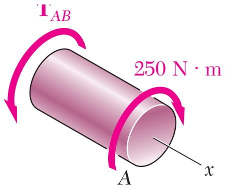


PROBLEMA MODELO 3.3

El eje horizontal *AD* está sujeto a una base fija en *D* y se le aplican los pares mostrados. Un agujero de 44 mm de diámetro se ha perforado en la porción *CD* del eje. Sabiendo que el eje es de un acero para el que $G = 77$ GPa, determine el ángulo de giro en el extremo *A*.

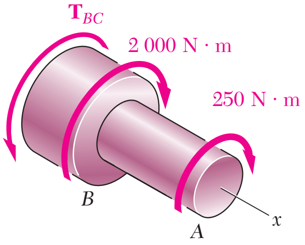
SOLUCIÓN

Debido a que el eje consta de tres porciones *AB*, *BC* y *CD*, cada una con sección transversal uniforme y con un par interno constante, puede utilizarse la ecuación (3.17).



Estática. Efectuando un corte en el eje entre *A* y *B* y utilizando el cuerpo libre mostrado en la figura, se encuentra

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad\qquad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

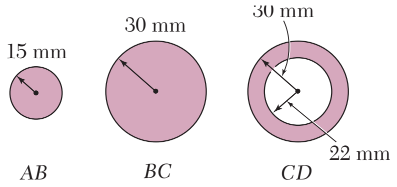


Haciendo un corte entre *B* y *C*, se tiene

$$\Sigma M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2\,000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como ningún par se aplica en *C*,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

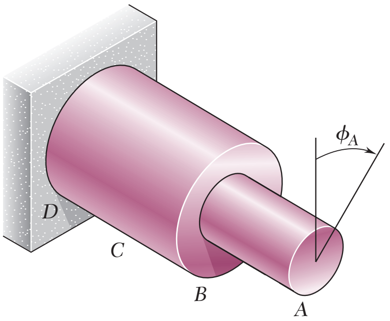


Momentos polares de inercia

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2}(0.015 \text{ m})^4 = 0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2}(0.030 \text{ m})^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.030 \text{ m})^4 - (0.022 \text{ m})^4] = 0.904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Ángulo de giro. Usando la ecuación (3.17) y recordando que $G = 77$ GPa para todo el eje, se tiene que

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G}\left(\frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}}\right)$$

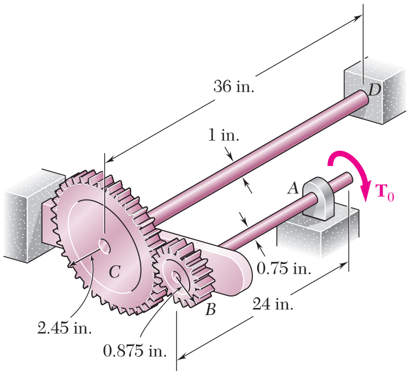
$$\phi_A = \frac{1}{77 \text{ GPa}}\left[\frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0.4 \text{ m})}{0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2\,250)(0.2)}{1.272 \times 10^{-6}} + \frac{(2\,250)(0.6)}{0.904 \times 10^{-6}}\right]$$

$$= 0.01634 + 0.00459 + 0.01939 = 0.0403 \text{ rad}$$

$$\phi_A = (0.0403 \text{ rad})\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \qquad\qquad \phi_A = 2.31^\circ \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 3.4

Dos ejes sólidos de acero están conectados por los engranes mostrados en la figura. Sabiendo que para cada eje $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine *a*) el máximo par $\mathbf{T}_0$ que puede aplicarse al extremo *A* del eje *AB*, *b*) el ángulo correspondiente que rota el extremo *A* del eje *AB*.


36 in.
D
1 in.
A
$\mathbf{T}_0$
0.75 in.
24 in.
C
B
2.45 in.
0.875 in.

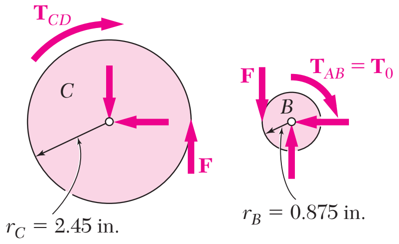
SOLUCIÓN

Estática. Denotando con *F* la magnitud de la fuerza tangencial entre los dientes de los engranes, se tiene

Engrane B. $\Sigma M_B = 0$: $F(0.875 \text{ in.}) - T_0 = 0$

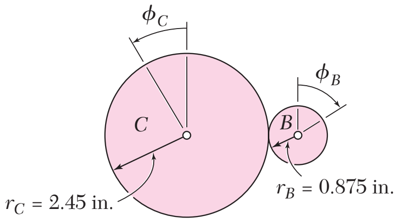
Engrane C. $\Sigma M_C = 0$: $F(2.45 \text{ in.}) - T_{CD} = 0$

$$T_{CD} = 2.8T_0 \qquad (1)$$


$\mathbf{T}_{CD}$
C
F
$r_C = 2.45$ in.
F
$\mathbf{T}_{AB} = \mathbf{T}_0$
B
$r_B = 0.875$ in.

Cinemática. Notando que los movimientos perimetrales de los engranes son iguales, se escribe

$$r_B\phi_B = r_C\phi_C \qquad \phi_B = \phi_C\frac{r_C}{r_B} = \phi_C\frac{2.45 \text{ in.}}{0.875 \text{ in.}} = 2.8\phi_C \qquad (2)$$


ϕ_C
ϕ_B
C
B
$r_C = 2.45$ in.
$r_B = 0.875$ in.

***a*) Par T_0**

Eje AB. Con $T_{AB} = T_0$ y $c = 0.375$ in., junto con el esfuerzo cortante máximo permisible de 8 000 psi, se escribe

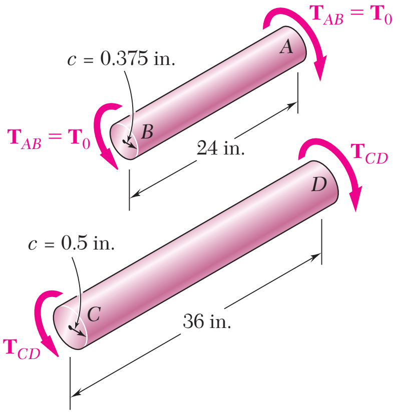
$$\tau = \frac{T_{AB}c}{J} \qquad 8\,000 \text{ psi} = \frac{T_0(0.375 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi\,(0.375 \text{ in.})^4} \qquad T_0 = 663 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad \triangleleft$$

Eje CD. De (1) se tiene que $T_{CD} = 2.8T_0$. Con $c = 0.5$ in. y $\tau_{\text{perm}} = 8\,000$ psi, se escribe

$$\tau = \frac{T_{CD}c}{J} \qquad 8\,000 \text{ psi} = \frac{2.8T_0(0.5 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi\,(0.5 \text{ in.})^4} \qquad T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad \triangleleft$$

Par máximo permisible. Se elige el mínimo valor obtenido para T_0

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad \blacktriangleleft$$


$\mathbf{T}_{AB} = \mathbf{T}_0$
A
$c = 0.375$ in.
$\mathbf{T}_{AB} = \mathbf{T}_0$
B
24 in.
$\mathbf{T}_{CD}$
D
$c = 0.5$ in.
C
36 in.
$\mathbf{T}_{CD}$

***b*) Ángulo de rotación en el extremo *A*.** Primero se calcula el ángulo de giro para cada eje.

Eje AB. Para $T_{AB} = T_0 = 561$ lb · in., se tiene que

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{JG} = \frac{(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi(0.375 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.0387 \text{ rad} = 2.22°$$

Eje CD. $T_{CD} = 2.8T_0 = 2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})$

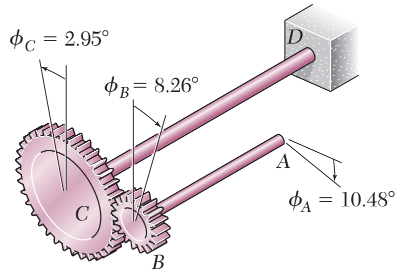
$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{JG} = \frac{2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(36 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi(0.5 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.514 \text{ rad} = 2.95°$$

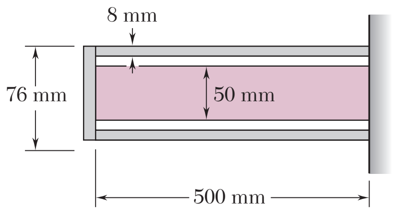
Ya que el extremo *D* del eje *CD* está fijo, se tiene que $\phi_C = \phi_{C/D} = 2.95°$. Usando la ecuación (2), se encuentra que el ángulo de rotación del engrane *B* es

$$\phi_B = 2.8\phi_C = 2.8(2.95°) = 8.26°$$

Para el extremo *A* del eje *AB*, se tiene

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.26° + 2.22° \qquad \phi_A = 10.48° \quad \blacktriangleleft$$

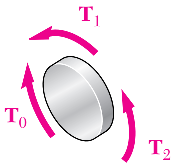

$\phi_C = 2.95°$
$\phi_B = 8.26°$
D
A
$\phi_A = 10.48°$
C
B



PROBLEMA MODELO 3.5

Un eje de acero y un tubo de aluminio están conectados a un soporte fijo y a un disco rígido en la sección transversal como se observa en la figura. Sabiendo que los esfuerzos iniciales son cero, determine el máximo par $\mathbf{T}_0$ que puede aplicarse al disco si los esfuerzos permisibles son 120 MPa en el eje de acero y 70 MPa en el tubo de aluminio. Use $G = 77$ GPa para el acero y $G = 27$ GPa para el aluminio.

SOLUCIÓN



Estática. ***Cuerpo libre del disco.*** Denotando con $\mathbf{T}_1$ el par ejercido por el tubo sobre el disco y por $\mathbf{T}_2$ el par ejercido por el eje, se encuentra que

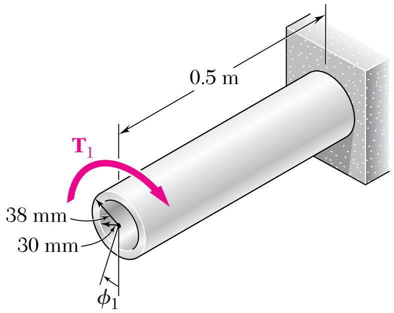
$$T_0 = T_1 + T_2 \tag{1}$$

Deformaciones. Como el tubo y el eje están conectados al disco rígido, se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2: \qquad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1(0.5\ \text{m})}{(2.003 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(27\ \text{GPa})} = \frac{T_2(0.5\ \text{m})}{(0.614 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(77\ \text{GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1 \tag{2}$$



Aluminio
$G_1 = 27$ GPa
$J_1 = \frac{\pi}{2}[(38\ \text{mm})^4 - (30\ \text{mm})^4]$
$= 2.003 \times 10^{-6}\text{m}^4$

Esfuerzos cortantes. Se *supondrá* que el requerimiento $\tau_{\text{alum}} \leq 70$ MPa es crítico. Para el tubo de aluminio, se tiene

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} J_1}{c_1} = \frac{(70\ \text{MPa})(2.003 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)}{0.038\ \text{m}} = 3\,690\ \text{N} \cdot \text{m}$$

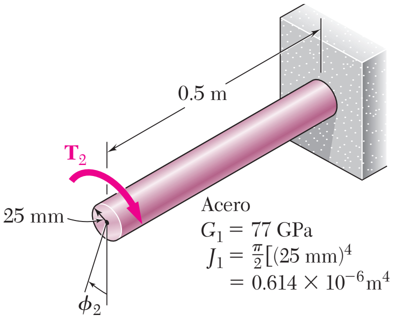
Usando la ecuación (2), se calcula el valor correspondiente T_2 y entonces se encuentra el esfuerzo cortante máximo en el eje de acero.

$$T_2 = 0.874 T_1 = 0.874(3\,690) = 3\,225\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\text{acero}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3\,225\ \text{N} \cdot \text{m})(0.025\ \text{m})}{0.614 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} = 131.3\ \text{MPa}$$

Se observa que el esfuerzo permisible de 120 MPa para el acero es excedido; la suposición hecha fue *errónea*. Por lo tanto, el par máximo $\mathbf{T}_0$ se obtendrá haciendo $\tau_{\text{acero}} = 120$ MPa. Primero se determina el par $\mathbf{T}_2$.

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{acero}} J_2}{c_2} = \frac{(120\ \text{MPa})(0.614 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)}{0.025\ \text{m}} = 2\,950\ \text{N} \cdot \text{m}$$



Acero
$G_1 = 77$ GPa
$J_1 = \frac{\pi}{2}[(25\ \text{mm})^4$
$= 0.614 \times 10^{-6}\text{m}^4$

De la ecuación (2), se tiene que

$$2\,950\ \text{N} \cdot \text{m} = 0.874 T_1 \qquad T_1 = 3\,375\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Utilizando la ecuación (1) se obtiene el par máximo permisible

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3\,375\ \text{N} \cdot \text{m} + 2\,950\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6.325\ \text{kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.31 *a*) Para el tubo de aluminio que se muestra en la figura ($G = 27$ GPa), determine el par de torsión $\mathbf{T}_0$ que causa un ángulo de giro de 2°. *b*) Determine el ángulo de giro si se aplica el mismo par de torsión $\mathbf{T}_0$ a un eje cilíndrico sólido con igual longitud y área de sección transversal.

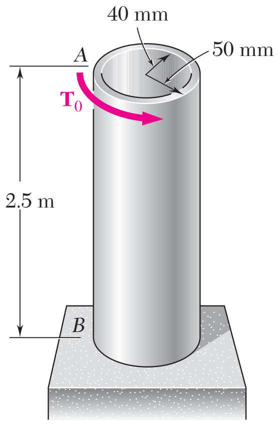


Figura P3.31

3.32 *a*) Para el eje sólido de acero que se muestra en la figura ($G = 77$ GPa), determine el ángulo de giro en *A*. *b*) Resuelva el inciso *a*) con el supuesto de que el eje de acero es hueco con un diámetro exterior de 30 mm y un diámetro interior de 20 mm.

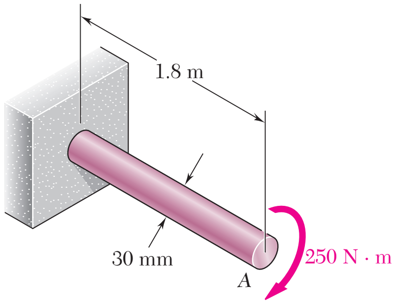


Figura *P3.32*

3.33 El barco en *A* ha comenzado a perforar un pozo petrolero en el suelo oceánico a una profundidad de 5 000 ft. Si se sabe que la parte superior de la tubería de acero para perforación de 8 in. de diámetro ($G = 11.2 \times 10^6$ psi) gira dos revoluciones completas antes de que el barreno en *B* empiece a operar, determine el esfuerzo cortante máximo causado en la tubería por la torsión.

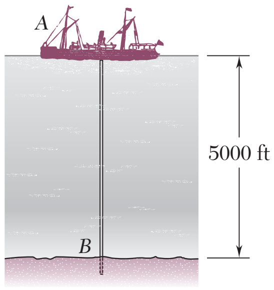


Figura P3.33

3.34 Determine el diámetro máximo permisible de una varilla de acero de 10 ft de largo ($G = 11.2 \times 10^6$ psi) si la varilla debe torcerse 30° sin exceder un esfuerzo cortante de 12 ksi.

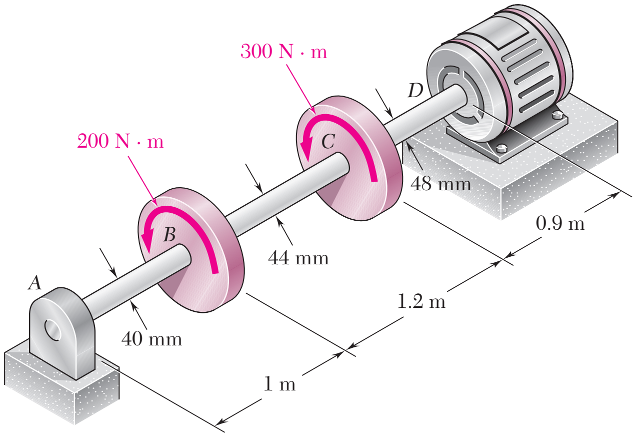


Figura *P3.35*

3.35 El motor eléctrico ejerce un par de torsión de 500 N · m sobre el eje de aluminio *ABCD*, mientras gira a una velocidad constante. Si se sabe que $G = 27$ GPa y que los pares de torsión ejercidos en las poleas *B* y *C* son como se muestran en la figura, determine el ángulo de giro entre *a*) *B* y *C*, *b*) *B* y *D*.

3.36 Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas *A*, *B* y *C*. Si se sabe que ambos ejes son sólidos y están hechos de latón ($G = 39$ GPa), determine el ángulo de giro entre *a*) *A* y *B*, *b*) *A* y *C*.

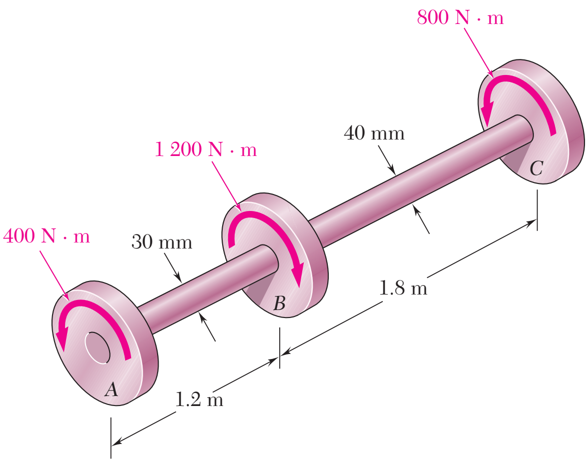

800 N · m
1 200 N · m
40 mm
C
400 N · m
30 mm
B
1.8 m
A
1.2 m

Figura P3.36

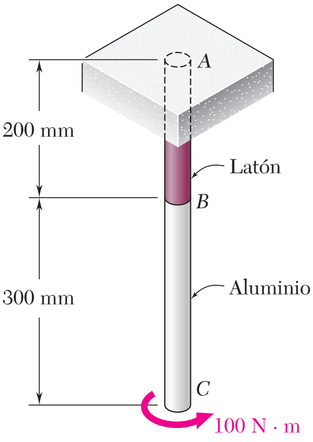

A
200 mm
Latón
B
300 mm
Aluminio
C
100 N · m

Figura P3.37

3.37 La varilla de aluminio *BC* ($G = 26$ GPa) está unida a la varilla de latón *AB* ($G = 39$ GPa). Si se sabe que cada varilla es sólida y tiene un diámetro de 12 mm, determine el ángulo de giro *a*) en *B*, *b*) en *C*.

3.38 La varilla de aluminio *AB* ($G = 27$ GPa) está unida a la varilla de latón *BD* ($G = 39$ GPa). Si se sabe que la porción *CD* de la varilla de latón es hueca y tiene un diámetro interior de 40 mm, determine el ángulo de giro en *A*.

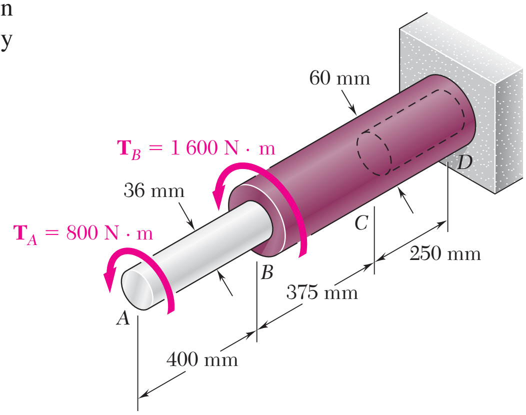

60 mm
$\mathbf{T}_B = 1\,600$ N · m
D
36 mm
$\mathbf{T}_A = 800$ N · m
C
250 mm
B
375 mm
A
400 mm

Figura P3.38

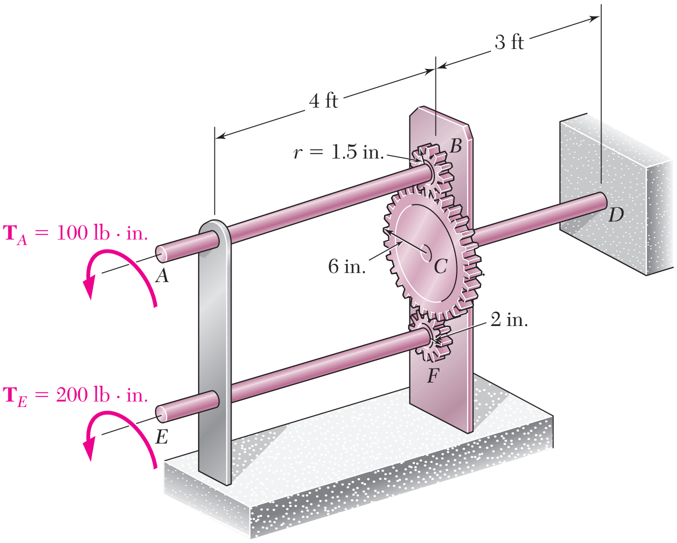

3 ft
4 ft
$r = 1.5$ in.
B
$\mathbf{T}_A = 100$ lb · in.
A
6 in.
C
D
2 in.
F
$\mathbf{T}_E = 200$ lb · in.
E

Figura ***P3.39***

3.39 Tres ejes sólidos, cada uno con $\frac{3}{4}$ in. de diámetro, se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el ángulo a través del cual gira el extremo *A* del eje *AB*, *b*) el ángulo que gira el extremo *E* del eje *EF*.

3.40 Dos ejes, cada uno de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro, se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el eje en F está fijo, determine el ángulo que gira el extremo A cuando se aplica un par de torsión de 1.2 kip · in. sobre A.

3.41 Dos ejes sólidos de acero se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa para cada uno de los ejes, determine el ángulo que gira el extremo A cuando $T_A = 1\,200$ N · m.

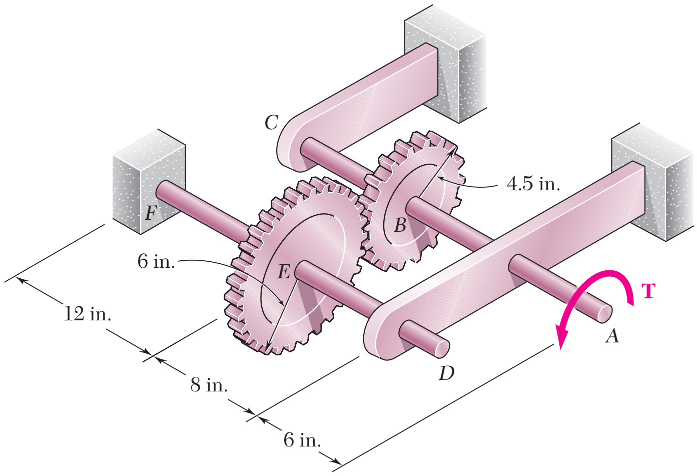


Figura P3.40

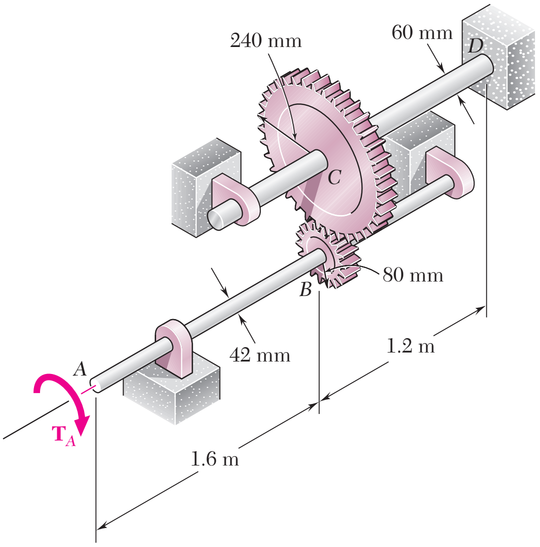


Figura P3.41

3.42 Retome el problema 3.41, y ahora suponga que cada eje tiene un diámetro de 54 mm.

3.43 Un codificador F, utilizado para el registro en forma digital de la rotación del eje A, está conectado al eje por medio del tren de engranes que se muestra en la figura, el cual consta de cuatro engranes y de tres ejes sólidos de acero, cada uno con diámetro d. Dos de los engranes tienen un radio r y los otros dos un radio nr. Si se evita la rotación del codificador F, determine en términos de T, l, G, J y n el ángulo que de rotación del extremo A.

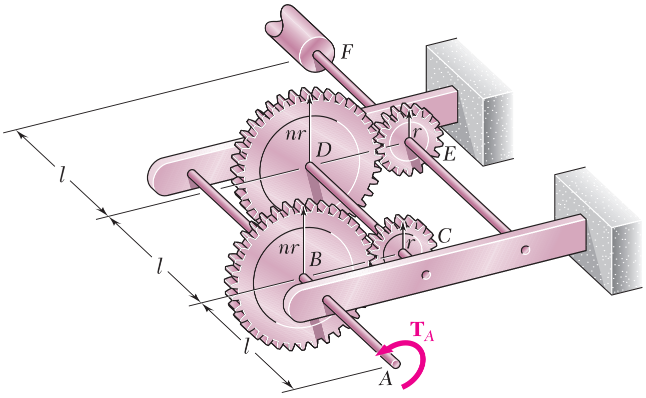


Figura ***P3.43***

3.44 Para el tren de engranes descrito en el problema 3.43, determine el ángulo que gira el extremo A cuando $T = 5$ lb · in., $l = 2.4$ in., $d = \frac{1}{16}$ in., $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $n = 2$.

3.45 Las especificaciones de diseño de un eje sólido de transmisión con 1.2 m de longitud requieren que el ángulo de giro del eje no exceda 4° cuando se aplica un par de torsión de 750 N · m. Determine el diámetro requerido del eje, si está hecho de un acero que tiene un esfuerzo cortante permisible de 90 MPa y un módulo de rigidez de 77.2 GPa.

3.46 Un agujero se perfora en *A* sobre una hoja plástica aplicando una fuerza **P** de 600 N al extremo *D* de la palanca *CD*, la cual está rígidamente adherida al eje cilíndrico sólido *BC*. Las especificaciones de diseño requieren que el desplazamiento de *D* no exceda de 15 mm desde el momento en que la perforadora toca inicialmente la hoja plástica hasta el momento en que realmente la penetra. Determine el diámetro requerido del eje *BC* si éste es de un acero con $G = 77$ GPa y $\tau_{\text{perm}} = 80$ MPa.

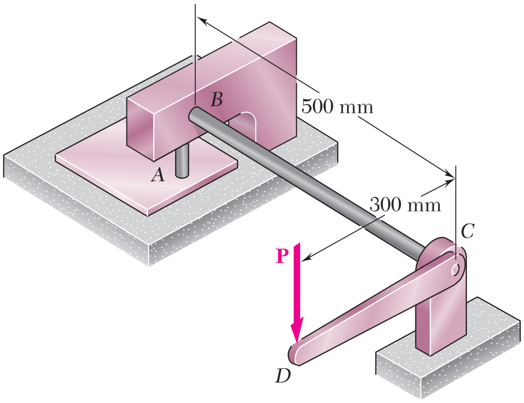


Figura P3.46

3.47 Las especificaciones de diseño para el sistema de engranes y ejes, que se muestra en la figura, requieren que se use el mismo diámetro para ambos ejes y que el ángulo a través del cual gire la polea *A* no exceda 7.5° cuando está sujeta a un par de torsión $\mathbf{T}_A$ de 2 kip · in. mientras la polea *D* se mantiene fija. Determine el diámetro requerido de los ejes si ambos están hechos de un acero con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi.

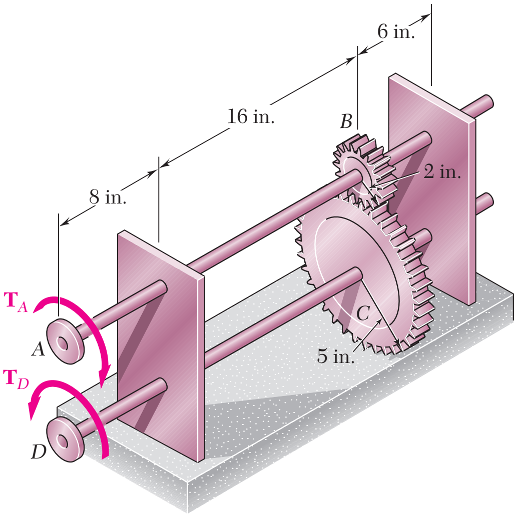


Figura P3.47

3.48 Retome el problema 3.47, y ahora suponga que ambos ejes están hechos de un latón con $G = 5.6 \times 10^6$ psi y $\tau_{\text{perm}} = 8$ ksi.

3.49 El diseño del sistema de engranes y ejes, que se muestra en la figura, requiere que se empleen ejes de acero del mismo diámetro tanto para *AB* como para *CD*. Se requiere además que $\tau_{\text{máx}} \leq 60$ MPa y que el ángulo ϕ_D en el cual gira el extremo *D* del eje *CD* no exceda 1.5°. Si se sabe que $G = 77$ GPa, determine el diámetro requerido de los ejes.

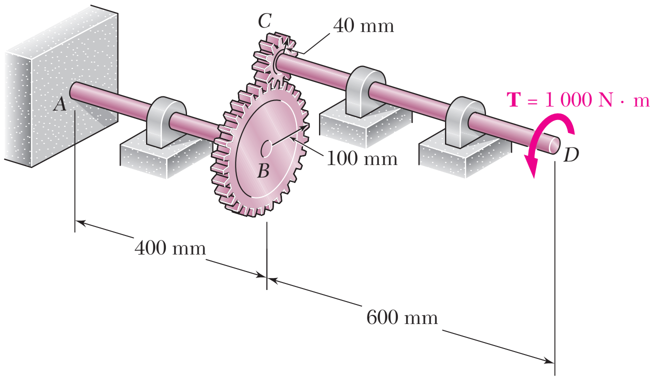


Figura P3.49

3.50 El motor eléctrico ejerce un par de torsión de 800 N · m sobre el eje de acero *ABCD* cuando gira a una velocidad constante. Las especificaciones de diseño requieren que el diámetro del eje sea uniforme desde *A* hasta *D* y que el ángulo de giro entre *A* y *D* no exceda 1.5°. Si se sabe que $\tau_{\text{máx}} \leq 60$ MPa y que $G = 77$ GPa, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para el eje.

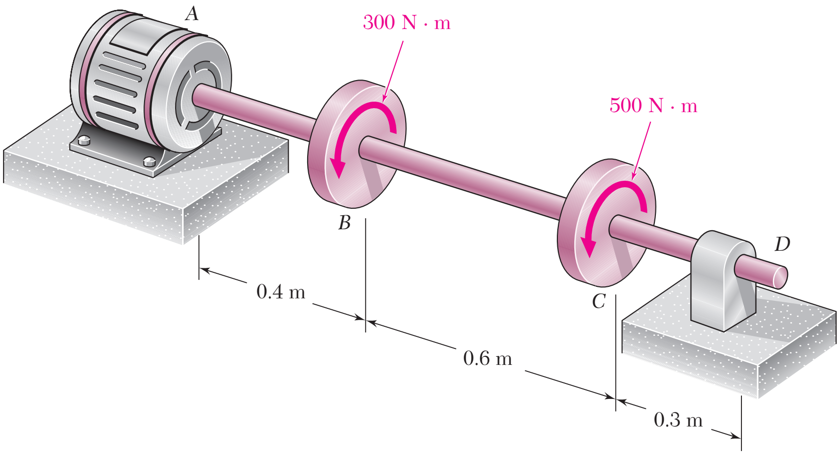


Figura P3.50

3.51 Los cilindros sólidos *AB* y *BC* están unidos en *B* y se encuentran adheridos a soportes fijos en *A* y *C*. Si se sabe que el módulo de rigidez es 3.7×10^6 psi para el aluminio y 5.6×10^6 psi para el latón, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el cilindro *AB*, *b*) en el cilindro *BC*.

3.52 Retome el problema 3.51, y ahora suponga que el cilindro *AB* está hecho de acero, para el cual $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

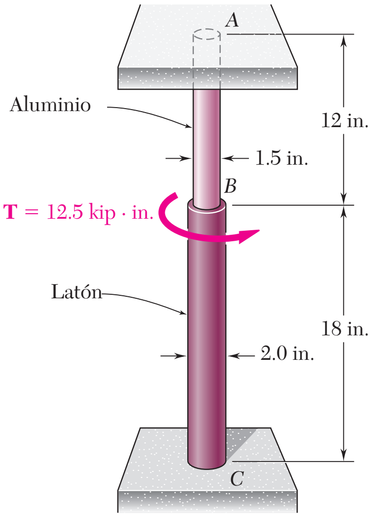


Figura *P3.51*

3.53 El eje compuesto que muestra la figura consiste en una camisa de latón con 5 mm de grosor ($G_{\text{latón}} = 39$ GPa) unida a un núcleo de acero con 40 mm de diámetro ($G_{\text{acero}} = 77.2$ GPa). Si se sabe que el eje está sometido a un par de torsión de 600 N · m, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en la camisa de latón, *b*) el máximo esfuerzo cortante en el núcleo de acero, *c*) el ángulo de giro del extremo *B* con respecto al extremo *A*.

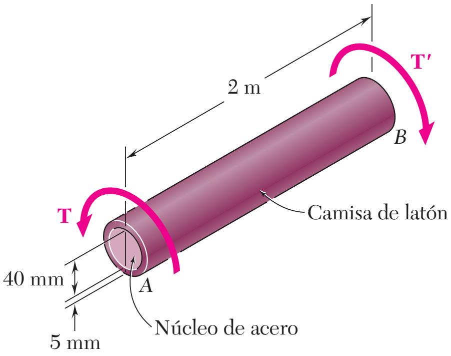


Figura P3.53 y P3.54

3.54 Para el eje compuesto del problema 3.53, el esfuerzo cortante permisible en la camisa de latón es de 20 MPa y 45 MPa en el núcleo de acero. Determine *a*) el par de torsión máximo que puede aplicarse al eje, *b*) el ángulo de giro correspondiente de *B* respecto a *A*.

3.55 En un momento en que se impide la rotación en el extremo inferior de cada eje, un par de 50 N · m es aplicado al extremo *A* del eje *AB*. Si se sabe que *G* = 77.2 GPa para ambos ejes, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el eje *CD*, *b*) el ángulo de rotación de *A*.

3.56 Retome el problema 3.55, y ahora suponga que el par de torsión de 80 N · m se aplica al extremo *C* del eje *CD*.

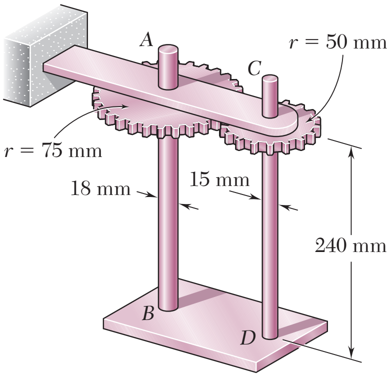


Figura *P3.55*

3.57 y 3.58 Dos ejes sólidos de acero están provistos de bridas que se conectan por pernos como se observa en la figura. Los pernos están ligeramente holgados y permiten una rotación de 1.5° de una brida respecto a la otra antes de que las bridas empiecen a girar como una sola unidad. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el esfuerzo cortante máximo en cada eje cuando un par **T** con magnitud 420 kip · ft se aplica a la brida que se indica.

3.57 El par de torsión **T** se aplica a la brida *B*.

3.58 El par de torsión **T** se aplica a la brida *C*.

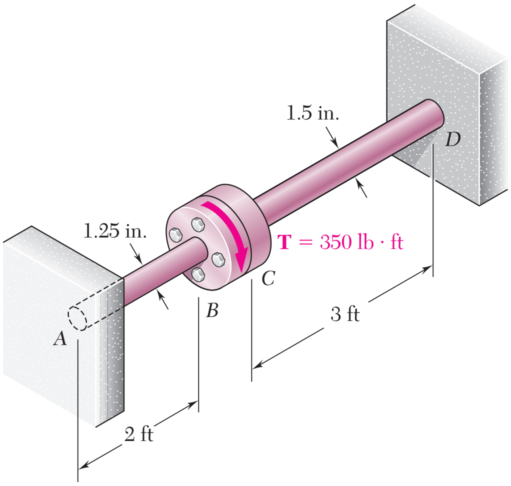


Figura P3.57 y P3.58

3.59 La camisa de acero *CD* ha sido unida al eje de acero de 40 mm de diámetro *AE* por medio de bridas *rígidas* soldadas a la camisa y al eje. El diámetro exterior de la camisa es de 80 mm y su espesor de pared de 4 mm. Si se aplican pares de torsión de 500 N · m, como se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo en la camisa.

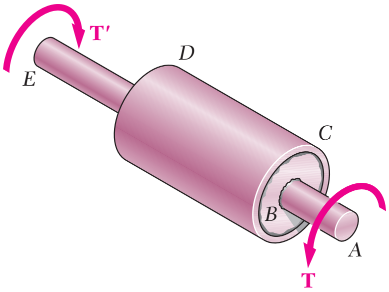


Figura P3.59

3.60 El momento de inercia de masa de un engrane se determinará experimentalmente utilizando un péndulo de torsión que consiste en un alambre de acero de 6 ft. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el diámetro del alambre para el que la constante torsional de resorte será de 4.27 lb · ft/rad.

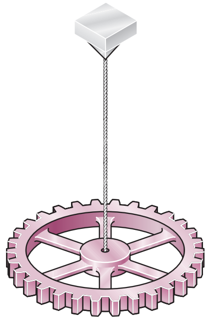


Figura P3.60

3.61 Una placa anular de espesor t y módulo de rigidez G se usa para conectar el eje AB de radio r_1 al tubo CD con radio r_2. Si se sabe que un par de torsión **T** se aplica al extremo A del eje AB y que el extremo D del tubo CD se encuentra fijo, *a*) determine la magnitud y localización del esfuerzo cortante máximo en la placa anular, *b*) muestre que el ángulo en que gira el extremo B del eje respecto al extremo C del tubo es

$$\phi_{BC} = \frac{T}{4\pi G t}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

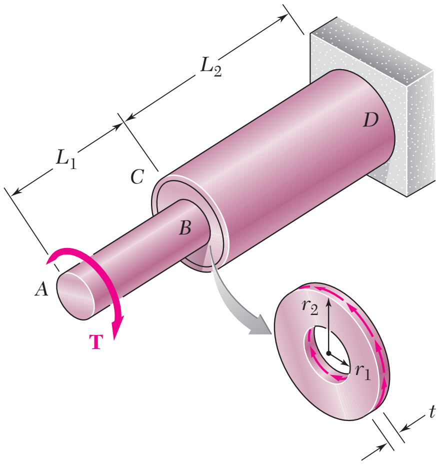


Figura P3.61 y P3.62

3.62 Una placa anular de latón ($G = 39$ GPa), de espesor $t = 6$ mm, se usa para conectar el eje de latón AB, de longitud $L_1 = 50$ mm y radio $r_1 = 30$ mm al tubo de latón CD, de longitud $L_2 = 125$ mm, radio interior $r_2 = 75$ mm y espesor $t = 3$ mm. Si se sabe que un par de torsión **T** de 2.8 kN · m se aplica en el extremo A del eje AB y que el extremo D del tubo CD está fijo, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el sistema de eje, placa y tubo, *b*) el ángulo en que gira el extremo A. (*Sugerencia*: Utilice la fórmula deducida en el problema 3.61 para resolver el inciso *b*.)

3.63 Un eje sólido y un eje hueco son del mismo material y tienen el mismo peso y longitud. Denote con n la razón c_1/c_2, y demuestre que la razón T_s/T_h del par de torsión T_s en el eje sólido al par T_h en el eje hueco es *a*) $\sqrt{(1 - n^2)/(1 + n^2)}$ si el esfuerzo cortante máximo es el mismo en cada eje, *b*) $(1 - n)/(1 + n^2)$ si el ángulo de giro es el mismo para cada eje.

3.7 DISEÑO DE EJES DE TRANSMISIÓN

Las especificaciones principales que deben cumplirse en el diseño de un eje de transmisión son la *potencia* que debe transmitirse y la *velocidad de rotación* del eje. La función del diseñador es seleccionar el material y las dimensiones de la sección transversal del eje, para que el esfuerzo cortante máximo permisible del material no sea excedido cuando el eje transmite la potencia requerida a la velocidad especificada.

Para determinar el par de torsión ejercido sobre el eje, recuerde, de la dinámica elemental, que la potencia P asociada con la rotación de un cuerpo rígido sujeto a un par **T** es

$$P = T\omega \tag{3.19}$$

donde ω es la velocidad angular del cuerpo expresada en radianes por segundo. Pero $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de rotación, es decir, el número de revoluciones por segundo. La unidad de frecuencia es, entonces, 1 s^{-1} y se llama *hertz* (Hz). Sustituyendo ω en la ecuación (3.19) se obtiene

$$P = 2\pi fT \tag{3.20}$$

Si se emplean unidades SI se verifica que, si la frecuencia se expresa en Hz y T en N · m, la potencia se expresará en N · m/s, esto es, en *watts* (W). Despejando T de la ecuación (3.20), se obtiene el par ejercido sobre un eje que transmite una potencia P a una frecuencia de rotación f.

$$T = \frac{P}{2\pi f} \tag{3.21}$$

donde P, f y T se expresan en las unidades indicadas antes.

Después de haber determinado el par **T** que se aplicará al eje y habiendo seleccionado el material que será utilizado, el diseñador lleva los valores de T y del esfuerzo máximo permisible a la fórmula de torsión elástica (3.9). Despejando J/c, se tiene

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} \tag{3.22}$$

y se obtiene de esta manera el valor mínimo permisible para el parámetro J/c. Se verifica que, si se emplean unidades SI, T estará expresado en N · m, $\tau_{\text{máx}}$ en Pa (o N/m^2) y J/c se obtendrá en m^3. En el caso de un eje circular sólido, $J = \frac{1}{2}\pi c^4$, y $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$; sustituyendo este valor para J/c en la ecuación (3.22) y despejando c, esto da como resultado el mínimo valor permisible para el radio del eje. En el caso de un eje circular hueco, el parámetro crítico es J/c_2, donde c_2 es el radio exterior del eje; el valor de este parámetro puede calcularse de la ecuación (3.11) de la sección 3.4 para determinar si una sección transversal dada será aceptable.

Cuando se emplean las unidades usuales en Estados Unidos, la frecuencia, por lo general, se expresa en rpm y la potencia en caballos de potencia (hp). Es entonces necesario, antes de aplicar la fórmula (3.21), convertir la frecuencia a revoluciones por segundo (es decir, hertz) y la potencia a ft · lb/s o in · lb/s mediante el uso de las siguientes relaciones:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} \text{s}^{-1} = \frac{1}{60} \text{Hz}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

Si se expresa la potencia en in. · lb/s, la fórmula (3.21) dará el valor del par T en lb · in. Al llevar este valor de T a la ecuación (3.22), y expresando $\tau_{\text{máx}}$ en psi, se obtiene el valor del parámetro J/c en in^3.

EJEMPLO 3.06

¿Qué tamaño de eje debe usarse para el rotor de un motor de 5 hp que opera a 3 600 rpm si el esfuerzo cortante no debe exceder 8 500 psi en el eje?

Primero se expresa la potencia del motor en in. · lb/s y su frecuencia en ciclos por segundo (o hertz).

$$P = (5 \text{ hp})\left(\frac{6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}}{1 \text{ hp}}\right) = 33\,000 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

$$f = (3\,600 \text{ rpm})\frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 \text{ s}^{-1}$$

El par ejercido sobre el eje es dado por la ecuación (3.21):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{33\,000 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}}{2\pi\,(60 \text{ s}^{-1})} = 87.54 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Sustituyendo T y $\tau_{\text{máx}}$ en la ecuación (3.22), se tiene

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{87.54 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{8\,500 \text{ psi}} = 10.30 \times 10^{-3} \text{ in.}^3$$

Pero $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ para un eje sólido. Se tiene por lo tanto

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\pi c^3 &= 10.30 \times 10^{-3} \text{ in.}^3 \\ c &= 0.1872 \text{ in.} \\ d &= 2c = 0.374 \text{ in.} \end{aligned}$$

y debe usarse un eje de $\frac{3}{8}$ in.

EJEMPLO 3.07

Un eje que consta de un tubo de acero de 50 mm de diámetro exterior debe transmitir 100 kW de potencia mientras gira a una frecuencia de 20 Hz. Determine el espesor del tubo que deberá utilizarse si el esfuerzo cortante no debe exceder 60 MPa.

El par de giro ejercido en el eje es dado por la ecuación (3.21):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi\,(20 \text{ Hz})} = 795.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De la ecuación (3.22) se concluye que el parámetro J/c_2 debe ser por lo menos igual a

$$\frac{J}{c_2} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{795.8 \text{ N} \cdot \text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13.26 \times 10^{-6} \text{m}^3 \qquad (3.23)$$

Pero, de la ecuación (3.10), se tiene que

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{0.050}\left[(0.025)^4 - c_1^4\right] \qquad (3.24)$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (3.23) y (3.24):

$$(0.025)^4 - c_1^4 = \frac{0.050}{\pi}(13.26 \times 10^{-6})$$

$$\begin{aligned} c_1^4 &= 390.6 \times 10^{-9} - 211.0 \times 10^{-9} = 179.6 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \\ c_1 &= 20.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20.6 \text{ mm} \end{aligned}$$

El espesor correspondiente del tubo es

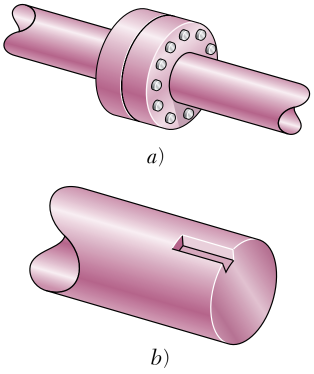
$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20.6 \text{ mm} = 4.4 \text{ mm}$$

Debe utilizarse un tubo de espesor de 5 mm.

3.8 CONCENTRACIONES DE ESFUERZO EN EJES CIRCULARES

La fórmula de torsión $\tau_{\text{máx}} = Tc/J$ se dedujo en la sección 3.4 para un eje circular con sección transversal uniforme. Además, se había supuesto en la sección 3.3 que el eje estaba cargado en sus extremos a través de placas rígidas sólidamente unidas a él. En la práctica, sin embargo, los pares de torsión comúnmente se aplican al eje mediante acoplamientos de brida (figura 3.30*a*) o por medio de engranes conectados al eje por cuñas que caben dentro de cuñeros (figura 3.30*b*). En ambos casos se esperaría que la distribución de esfuerzos, en la sección donde se aplican los pares, o cerca de ella sea diferente de la que es dada por la fórmula de torsión. Ocurrirán, por ejemplo, altas concentraciones de esfuerzos en la cercanía del cuñero mostrado en la figura 3.30*b*. La determinación de estos esfuerzos localizados puede llevarse a cabo por métodos de análisis experimental de esfuerzos o, en algunos casos, gracias al uso de la teoría matemática de la elasticidad.

Como se indicó en la sección 3.4, también es posible emplear la fórmula de torsión en un eje de sección transversal circular variable. Sin embargo, en el caso de un eje con un cambio abrupto en el diámetro de su sección transversal, las concentraciones de esfuerzo ocurrirán cerca de la discontinuidad, y los esfuerzos más altos ocurrirán en *A* (figura 3.31). Estos esfuerzos pueden reducirse utilizando un filete, y el valor del esfuerzo cortante máximo en el filete puede expresarse como


a)

b)

Figura 3.30

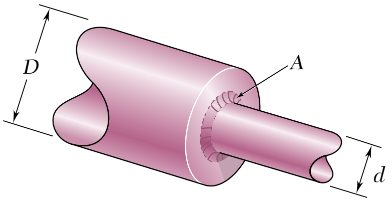


Figura 3.31

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

donde el esfuerzo Tc/J es el esfuerzo calculado para el eje de menor diámetro, y donde K es un factor de concentración de esfuerzos. Como el factor K depende sólo de la razón de los dos diámetros y de la razón del radio del filete al diámetro del eje más pequeño, puede calcularse de una vez por todas y registrarse en forma de tabla o de gráfica, como se muestra en la figura 3.32. Debe observarse, sin embargo, que este procedimiento para determinar esfuerzos cortantes localizados es válido sólo si el valor de $\tau_{\text{máx}}$ dado por la ecuación (3.25) no excede el límite de proporcionalidad del material, ya que los valores de K graficados en la figura 3.32 se obtuvieron bajo la suposición de una relación lineal entre los esfuerzos cortantes y la deformación a cortante. Si ocurren deformaciones plásticas, resultarán en valores del esfuerzo máximo más bajas que las indicadas por la ecuación (3.25).

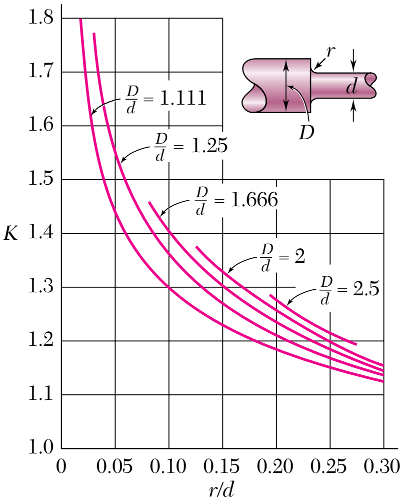
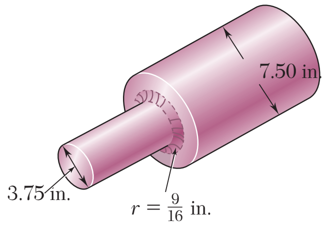


Figura 3.32 Factores de concentración de esfuerzos para filetes en ejes circulares.†

---

† W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.



PROBLEMA MODELO 3.6

El eje escalonado que se ilustra en la figura debe girar a 900 rpm para transmitir potencia de una turbina a un generador. El grado de acero especificado en el diseño tiene un esfuerzo cortante permisible de 8 ksi. *a*) Para el diseño preliminar mostrado, determine la potencia máxima que puede transmitirse. *b*) Si en el diseño final se aumenta el radio del filete de tal manera que $r = \frac{15}{16}$ in., ¿cuál será el cambio porcentual, en relación con el diseño preliminar, en la potencia que puede transmitirse?

SOLUCIÓN

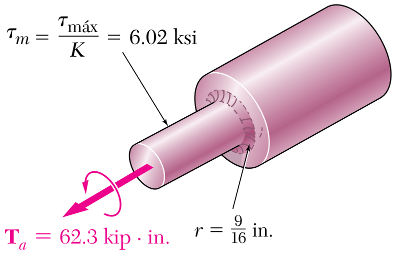
***a*) Diseño preliminar.** Usando la notación de la figura 3.32, se tiene $D = 7.50$ in., $d = 3.75$ in., $r = \frac{9}{16}$ in. $= 0.5625$ in.

$$\frac{D}{d} = \frac{7.50 \text{ in.}}{3.75 \text{ in.}} = 2 \qquad\qquad \frac{r}{d} = \frac{0.5625 \text{ in.}}{3.75 \text{ in.}} = 0.15$$

Se encuentra un factor de concentración de esfuerzos $K = 1.33$ de la figura 3.32.

Par de torsión. De la ecuación (3.25), se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \qquad\qquad T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} \tag{1}$$


$\tau_m = \frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = 6.02$ ksi
$\mathbf{T}_a = 62.3$ kip · in.
$r = \frac{9}{16}$ in.

donde J/c se refiere al eje de menor diámetro:

$$J/c = \tfrac{1}{2}\pi c^3 = \tfrac{1}{2}\pi\,(1.875 \text{ in.})^3 = 10.35 \text{ in.}^3$$

y donde
$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{8 \text{ ksi}}{1.33} = 6.02 \text{ ksi}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se encuentra que $T = (10.35 \text{ in.}^3)(6.02 \text{ ksi}) = 62.3$ kip · in.

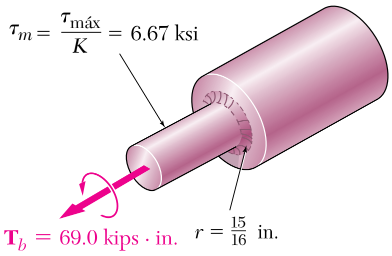
Potencia. Puesto que $f = (900 \text{ rpm})\dfrac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz} = 15 \text{ s}^{-1}$, se escribe

$$P_a = 2\pi f T = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(62.3 \text{ kip} \cdot \text{in.}) = 5.87 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

$$P_a = (5.87 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s})(1 \text{ hp}/6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}) \qquad P_a = 890 \text{ hp} \blacktriangleleft$$

***b*) Diseño final.** Para $r = \frac{15}{16}$ in. $= 0.9375$ in.,

$$\frac{D}{d} = 2 \qquad\qquad \frac{r}{d} = \frac{0.9375 \text{ in.}}{3.75 \text{ in.}} = 0.250 \qquad\qquad K = 1.20$$


$\tau_m = \frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = 6.67$ ksi
$\mathbf{T}_b = 69.0$ kips · in.
$r = \frac{15}{16}$ in.

Siguiendo el procedimiento utilizado antes, se escribe

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{8 \text{ ksi}}{1.20} = 6.67 \text{ ksi}$$

$$T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = (10.35 \text{ in.}^3)(6.67 \text{ ksi}) = 69.0 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

$$P_b = 2\pi f T = 2\pi\,(15 \text{ s}^{-1})(69.0 \text{ kip} \cdot \text{in.}) = 6.50 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

$$P_b = (6.50 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s})(1 \text{ hp}/6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}) = 985 \text{ hp}$$

Cambio porcentual en potencia

$$\text{Cambio porcentual} = 100\,\frac{P_b - P_a}{P_a} = 100\,\frac{985 - 890}{890} = \qquad +11\% \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.64 Determine el esfuerzo cortante máximo en un eje sólido con 1.5 in. de diámetro cuando transmite 75 hp a una velocidad de *a*) 750 rpm, *b*) 1 500 rpm.

3.65 Determine el esfuerzo cortante máximo en un eje sólido con 12 mm de diámetro cuando transmite 2.5 kW a una frecuencia de *a*) 25 Hz, *b*) 50 Hz.

3.66 Con un esfuerzo cortante permisible de 50 MPa, diseñe un eje sólido de acero para transmitir 15 kW a una frecuencia de *a*) 30 Hz, *b*) 60 Hz.

3.67 Con un esfuerzo cortante permisible de 4.5 ksi, diseñe un eje sólido de acero para transmitir 12 hp a una velocidad de *a*) 1 200 rpm, *b*) 2 400 rpm.

3.68 Cuando el eje hueco de acero que se muestra en la figura gira a 180 rpm, una medición estroboscópica indica que el ángulo de giro del eje es 3°. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, determine *a*) la potencia transmitida, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el eje.

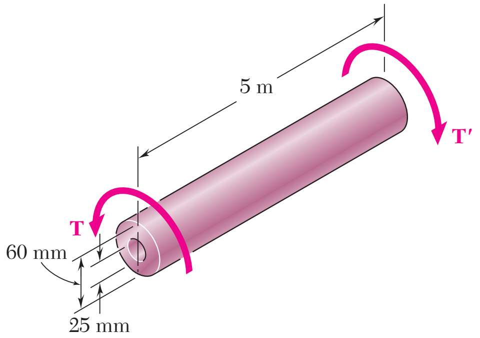


Figura P3.68 y P3.69

3.69 El eje hueco de acero que se muestra en la figura ($G = 77.2$ GPa, $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa) gira a 240 rpm. Determine *a*) la potencia máxima que puede transmitirse, *b*) el ángulo de giro correspondiente para el eje.

3.70 Uno de dos ejes huecos de transmisión de un trasatlántico tiene 125 ft de largo, y sus diámetros exterior e interior son de 16 in. y de 8 in., respectivamente. El eje está hecho de un acero para el que $\tau_{\text{perm}} = 8\,500$ psi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Si se sabe que la máxima velocidad de rotación del eje es de 165 rpm, determine *a*) la máxima potencia que puede transmitirse por un eje a su hélice, *b*) el ángulo de giro correspondiente para el eje.

3.71 Un eje de transmisión hueco, hecho de acero ($G = 11.2 \times 10^6$ psi), tiene 8 ft de longitud y sus diámetros exterior e interior son, respectivamente, 2.50 in. y 1.25 in. Si se sabe que el eje transmite 200 hp mientras gira a 1 500 rpm, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo, *b*) el ángulo de giro del eje.

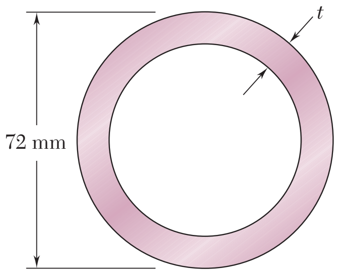


Figura P3.72

3.72 Un tubo de acero de 72 mm de diámetro exterior será empleado para transmitir un par de torsión de 2 500 N · m sin exceder un esfuerzo permisible máximo de 55 MPa. Una serie de tubos de 72 mm de diámetro exterior se encuentra disponible para su uso. Si se sabe que el espesor de pared de los tubos varía desde 4 hasta 10 mm en incrementos de 2 mm, elija el tubo más ligero que puede usarse.

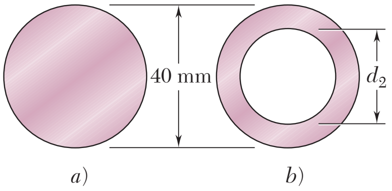


Figura *P3.73*

3.73 El diseño de un elemento de máquina requiere que un eje de 40 mm de diámetro exterior transmita 45 kW. *a*) Si la velocidad de rotación es de 720 rpm, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje *a*. *b*) Si la velocidad de rotación puede incrementarse en 50% a 1 080 rpm, determine el máximo diámetro interior del eje *b* para el que el esfuerzo cortante máximo sea el mismo en cada eje.

3.74 Un eje de acero sólido con 1.5 m de longitud y 22 mm de diámetro debe transmitir 12 kW. Determine la frecuencia mínima a la que debe girar el eje, si sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 30 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 3.5°.

3.75 Un eje de acero sólido con 2.5 m de longitud debe transmitir 10 kW a una frecuencia de 25 Hz. Determine el diámetro requerido del eje, si sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 30 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 4°.

3.76 Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor *A* hasta la máquina herramienta en *D*, a una velocidad de 1 260 rpm. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine el diámetro requerido *a*) del eje *AB*, *b*) del eje *CD*.

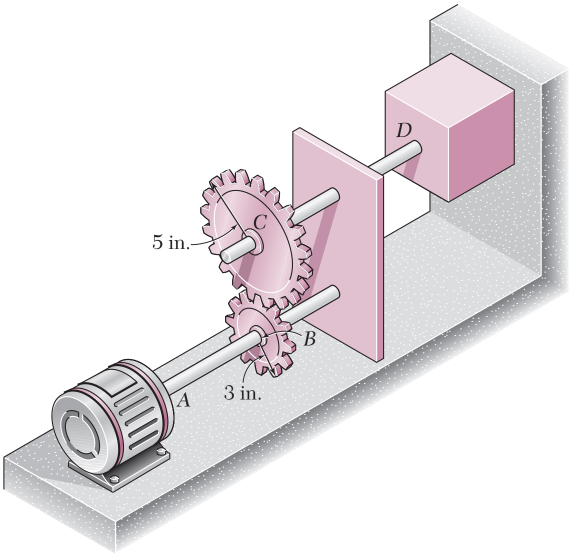


Figura P3.76 y P3.77

3.77 Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor *A* hasta la máquina herramienta en *D*, a una velocidad de 1 260 rpm. Si se sabe que cada eje tiene un diámetro de 1 in., determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *CD*.

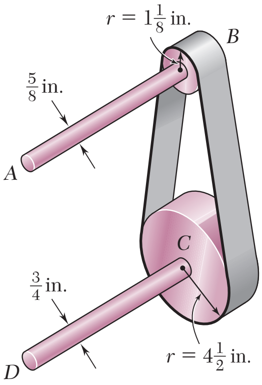


Figura P3.78

3.78 El arreglo de eje, disco y banda, que se muestra en la figura se emplea para transmitir 3 hp desde el punto *A* hasta el punto *D*. *a*) Con un esfuerzo cortante permisible de 9 500 psi, determine la velocidad requerida del eje *AB*. *b*) Resuelva el inciso *a*), con el supuesto de que los diámetros de los ejes *AB* y *CD* son, respectivamente, 0.75 in. y 0.625 in.

3.79 Un eje de acero de 5 ft de longitud y 0.875 in. de diámetro debe transmitir 18 hp. Determine la velocidad mínima a la que puede girar el eje, si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, que el esfuerzo cortante permisible es de 4.5 ksi y que el ángulo de giro no debe exceder 3.5°.

3.80 Un eje de acero de 2.5 m de longitud y 30 mm de diámetro gira a una frecuencia de 30 Hz. Determine la potencia máxima que puede transmitir el eje, si se sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 7.5°.

3.81 Un eje de acero debe transmitir 150 kW a una velocidad de 360 rpm. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, diseñe un eje sólido tal que el esfuerzo cortante máximo no exceda 50 MPa y el ángulo de giro en una longitud de 2.5 m no exceda 3°.

3.82 Un eje tubular de acero de 1.5 m de longitud, 38 mm de diámetro exterior d_1 y 30 mm de diámetro interior d_2 debe transmitir 100 kW entre una turbina y un generador. Determine la frecuencia mínima a la que puede girar el eje, si se sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 3°.

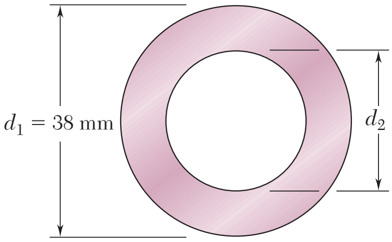


Figura *P3.82* y P3.83

3.83 Un eje tubular de acero de 1.5 m de longitud y 38 mm de diámetro exterior d_1 será hecho con un acero para el que $\tau_{\text{perm}} = 65$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Si se sabe que el ángulo de giro no debe exceder 4° cuando el eje es sometido a un par de torsión de 600 N · m, determine el máximo diámetro interior d_2 que puede especificarse en el diseño.

3.84 El eje escalonado que se muestra en la figura gira a 450 rpm. Si se sabe que $r = 0.2$ in., determine la máxima potencia que puede transmitirse sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 7 500 psi.

3.85 El eje escalonado que se muestra en la figura gira a 450 rpm. Si se sabe que $r = 0.5$ in., determine la máxima potencia que puede transmitirse sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 7 500 psi.

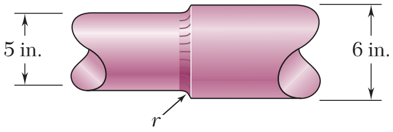


Figura *P3.84* y *P3.85*

3.86 El eje escalonado que se muestra en la figura debe girar a una frecuencia de 50 Hz. Si se sabe que el radio del filete es $r = 8$ mm y que el esfuerzo cortante permisible es de 45 MPa, determine la máxima potencia que puede transmitirse.

3.87 Si se sabe que el eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 45 kW a una velocidad de 2 100 rpm, determine el radio r mínimo para el filete si no debe excederse un esfuerzo cortante permisible de 50 MPa.

3.88 El eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 45 kW. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en el eje es de 40 MPa y que el radio del filete es $r = 6$ mm, determine la mínima velocidad permisible en el eje.

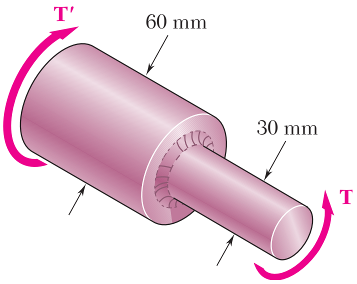
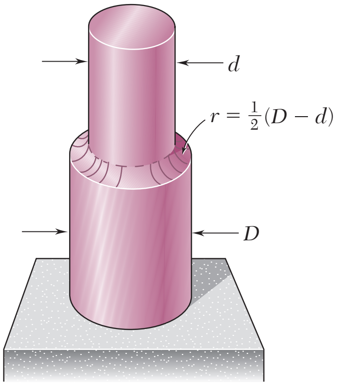


Figura P3.86, P3.87, y P3.88



El filete completo de cuarto de caña se extiende hasta el borde del eje más grande.

Figura P3.89, P3.90 y P3.91

3.89 En el eje escalonado que se muestra en la figura, el cual tiene un filete completo de cuarto de caña, el esfuerzo cortante permisible es de 80 MPa. Si se sabe que $D = 30$ mm, determine el par de torsión máximo permisible que puede aplicarse al eje si *a*) $d = 26$ mm, *b*) $d = 24$ mm.

3.90 En el eje escalonado que se muestra en la figura, el cual tiene un filete completo de cuarto de caña, $D = 1.25$ in. y $d = 1$ in. Si se sabe que la velocidad del eje es de 2 400 rpm y que el esfuerzo cortante permisible es de 7 500 psi, determine la máxima potencia que puede transmitirse mediante este eje.

3.91 Un par de torsión con magnitud $T = 2000$ lb · in. se aplica al eje escalonado que tiene un filete completo de cuarto de caña. Si se sabe que $D = 1$ in., determine el esfuerzo cortante máximo en el eje cuando *a*) $d = 0.8$ in., *b*) $d = 0.9$ in.

*3.9 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN EJES CIRCULARES

Cuando se dedujeron las ecuaciones (3.10) y (3.16), que definen, respectivamente, la distribución de esfuerzos y el ángulo de giro para un eje circular sometido a un par de torsión **T**, se supuso que la ley de Hooke se aplicaba en todo el eje. Si la resistencia a la fluencia se excede en alguna porción del eje, o si el material involucrado es frágil con un diagrama no lineal de esfuerzo-deformación a cortante, estas relaciones dejan de ser válidas. El propósito de esta sección es desarrollar un método más general, que pueda utilizarse cuando no se aplique la ley de Hooke, para determinar la distribución de esfuerzos en un eje sólido circular, y para calcular el par de torsión requerido para producir un ángulo de giro dado.

Tenga en cuenta que no se supuso ninguna relación específica de esfuerzo-deformación en la sección 3.3, cuando se probó que la deformación a corte γ varía linealmente con la distancia ρ desde el eje de la flecha (figura 3.33). Así, esta propiedad aún puede utilizarse en el análisis y escribirse

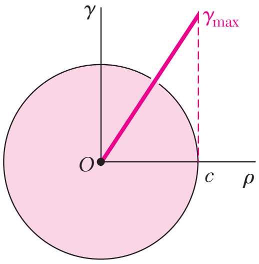


Figura 3.33

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.4}$$

donde c es el radio del eje.

Suponiendo que el valor máximo $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante τ se ha especificado, la gráfica de τ contra ρ puede obtenerse como sigue. Primero se determina el valor de $\gamma_{\text{máx}}$ del diagrama esfuerzo-deformación a corte, que corresponde a $\tau_{\text{máx}}$ (figura 3.34), y se introduce en la ecuación (3.4).

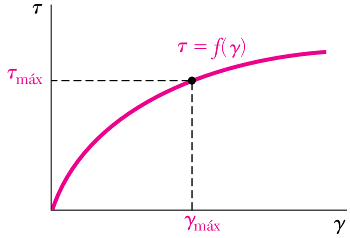


Figura 3.34

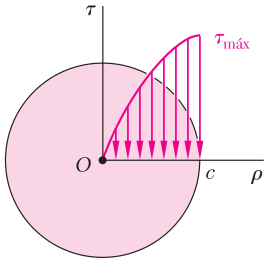


Figura 3.35

Entonces, para cada valor de ρ, se determina el valor correspondiente de γ de la ecuación (3.4) o de la figura 3.33 y se obtiene el esfuerzo cortante τ que corresponde a este valor de γ del diagrama esfuerzo-deformación de la figura 3.34. Graficando τ contra ρ se encuentra la distribución deseada de esfuerzo (figura 3.35).

Recuerde ahora que, cuando se dedujo la ecuación (3.1) en la sección 3.2, no se supuso ninguna relación particular entre el esfuerzo y la deformación a corte. Puede, por lo tanto, utilizarse la ecuación (3.1) para determinar el par **T** que corresponde a la distribución de esfuerzos cortantes obtenida en la figura 3.35. Considerando un elemento anular con radio ρ y espesor $d\rho$, se expresa el elemento de área en la ecuación (3.1) como $dA = 2\pi\rho\, d\rho$ y se escribe

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho)$$

o

$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2 \tau\, d\rho \tag{3.26}$$

donde τ es la función de ρ graficada en la figura 3.35.

Si τ es una función analítica conocida de γ, la ecuación (3.4) puede utilizarse para expresar τ como función de ρ, y la integral de la ecuación (3.26) puede obtenerse analíticamente. De otra manera, el par **T** puede obtenerse mediante integración numérica. Este cálculo se vuelve más significativo si se advierte que la integral en la ecuación (3.26) representa el segundo momento, o momento de inercia, con respecto al eje vertical del área de la figura 3.35 localizada por encima del eje horizontal y limitada por la curva de distribución de esfuerzos.

Un valor importante del par de torsión es el par último T_U que causa la falla del eje. Este valor puede determinarse a partir del esfuerzo cortante último τ_U del material eligiendo $\tau_{\text{máx}} = \tau_U$ y realizando los cálculos indicados antes. Sin embargo, en la práctica es más conveniente determinar T_U experimentalmente torciendo una probeta de un material dado hasta romperlo. Suponiendo una distribución de esfuerzos lineal ficticia, la ecuación (3.9) se emplea entonces para determinar el esfuerzo cortante máximo correspondiente R_T:

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \tag{3.27}$$

El esfuerzo ficticio R_T se denomina *módulo de ruptura a torsión* del material dado. Puede utilizarse para determinar el par último T_U de un eje hecho del mismo material pero de diferentes dimensiones, a partir de despejar T_U de la ecuación (3.27). Ya que las distribuciones de esfuerzos real y lineal ficticias mostradas en la figura 3.36 deben dar el mismo valor de T_U para el par último, las áreas que definen deben tener el mismo momento de inercia con respecto al eje vertical. Por lo tanto, es claro que el módulo de ruptura R_T siempre será mayor que el valor real del esfuerzo cortante último τ_U.

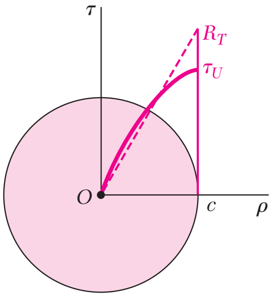


Figura 3.36

En algunos casos, puede desearse determinar la distribución de esfuerzos y el par **T** correspondientes a un ángulo de giro dado ϕ. Esto puede hacerse recordando la expresión obtenida en la sección 3.3 para la deformación cortante γ en términos de ϕ, ρ y la longitud L del eje:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

Con ϕ y L dados, a partir de la ecuación (3.2) puede determinarse el valor de γ correspondiente a cualquier valor dado de ρ. Utilizando el diagrama esfuerzo-deformación del material, es posible entonces obtener el valor correspondiente del esfuerzo cortante τ y graficar τ contra ρ. Una vez obtenida la distribución del esfuerzo cortante, el par **T** puede determinarse analítica o numéricamente, como se explicó antes.

*3.10 EJES CIRCULARES HECHOS DE UN MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

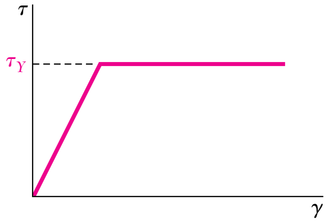


Figura 3.37

Se obtiene un panorama más amplio del comportamiento plástico de un eje sometido a torsión si se considera el caso idealizado de un *eje circular sólido hecho de un material elastoplástico*. El diagrama esfuerzo-deformación a cortante de tal material se muestra en la figura 3.37. Utilizando este diagrama, puede procederse como se indicó anteriormente y encontrarse la distribución de esfuerzos en una sección del eje para cualquier valor del par **T**.

Mientras el esfuerzo cortante τ no exceda la resistencia de cedencia τ_Y, se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos a través de la sección es lineal (figura 3.38*a*), y $\tau_{\text{máx}}$ es dado por la ecuación (3.9):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Al aumentar el par, $\tau_{\text{máx}}$ finalmente alcanza el valor τ_Y (figura 3.38*b*). Sustituyendo este valor en la ecuación (3.9) y despejando el valor correspondiente de T, se obtiene el valor T_Y del par al inicio de la cedencia:

$$T_Y = \frac{J}{c}\tau_Y \tag{3.28}$$

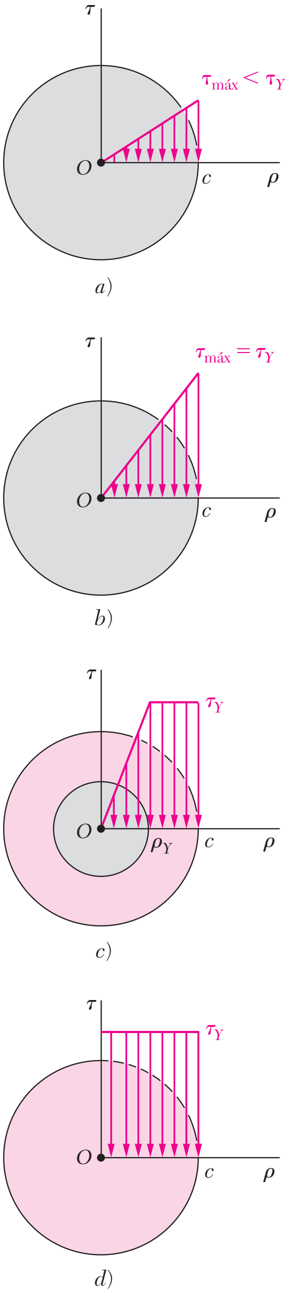
El valor obtenido se conoce como el *par de torsión máximo elástico*, ya que es el máximo par para el que la deformación permanece completamente elástica. Recordando que para un eje circular sólido $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$, se tiene que

$$T_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \tag{3.29}$$

Al incrementarse el par aún más, se desarrolla una región plástica en el eje, alrededor de un núcleo elástico de radio ρ_Y (figura 3.38*c*). En la región plástica el esfuerzo es uniformemente igual a τ_Y, mientras que en el núcleo elástico el esfuerzo varía linealmente con ρ y puede expresarse como

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y}\rho \tag{3.30}$$

Al aumentar T, la región plástica se expande hasta que, en el límite, la deformación es completamente plástica (figura 3.38*d*).



a) *b*) *c*) *d*)

Figura 3.38

La ecuación (3.26) será utilizada para determinar el valor del par T correspondiente a un radio dado ρ_Y del núcleo elástico. Recordando que τ está dado por la ecuación (3.30) para $0 \leq \rho \leq \rho_Y$, y es igual a τ_Y para $\rho_Y \leq \rho \leq c$, se escribe

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_Y} \rho^2 \left(\frac{\tau_Y}{\rho_Y}\rho\right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_Y}^{c} \rho^2\, \tau_Y\, d\rho \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho_Y^3\tau_Y + \frac{2}{3}\pi c^3\tau_Y - \frac{2}{3}\pi\rho_Y^3\tau_Y \\ T &= \frac{2}{3}\pi c^3\tau_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

o, según la ecuación (3.29),

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.32}$$

donde T_Y es el par de torsión máximo elástico. Se advierte que, al acercarse ρ_Y a cero, el par se aproxima al valor limitante

$$T_p = \frac{4}{3}T_Y \tag{3.33}$$

Este valor del par, que corresponde a la deformación completamente plástica (figura 3.38*d*), se llama el *par de torsión plástico* del eje considerado. Note que la ecuación (3.33) es válida sólo para un *eje circular sólido hecho de un material elastoplástico*.

Como la distribución de la *deformación* a través de la sección permanece lineal después del inicio de la cedencia, la ecuación (3.2) sigue siendo válida y puede utilizarse para expresar el radio ρ_Y del núcleo elástico en términos del ángulo de giro ϕ. Si ϕ es suficientemente grande para causar una deformación plástica, el radio ρ_Y del núcleo elástico se obtiene igualando γ

igual a la deformación de cedencia γ_Y en la ecuación (3.2) y despejando para el valor correspondiente ρ_Y de la distancia ρ. Se tiene que

$$\rho_Y = \frac{L\gamma_Y}{\phi} \tag{3.34}$$

Sea ϕ_Y el ángulo de giro al inicio de la cedencia, es decir, cuando $\rho_Y = c$. Haciendo a $\phi = \phi_Y$ y a $\rho_Y = c$ en la ecuación (3.34), se tiene que

$$c = \frac{L\gamma_Y}{\phi_Y} \tag{3.35}$$

Dividiendo la ecuación (3.34) entre la (3.35), miembro a miembro, se obtiene la siguiente relación:†

$$\frac{\rho_Y}{c} = \frac{\phi_Y}{\phi} \tag{3.36}$$

Si se introduce la ecuación (3.32) la expresión obtenida para ρ_Y/c, el par T se expresa como función del ángulo de giro ϕ,

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \tag{3.37}$$

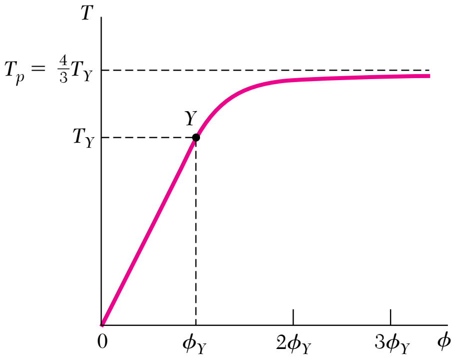


Figura 3.39

donde T_Y y ϕ_Y representan, respectivamente, el par y el ángulo de giro al inicio de la cedencia. Observe que la ecuación (3.37) sólo puede emplearse para valores de ϕ mayores que ϕ_Y. Para $\phi < \phi_Y$, la relación entre T y ϕ es lineal y está dada por la ecuación 3.16. Combinando ambas ecuaciones, se obtiene la gráfica de T contra ϕ representada en la figura 3.39. Se verifica que al aumentar ϕ indefinidamente, T se aproxima al valor límite $T_p = \frac{4}{3}T_Y$ correspondiente al caso de una zona plástica completamente desarrollada (figura 3.38*d*). A pesar de que el valor T_p no puede alcanzarse en realidad, se aproxima rápidamente cuando aumenta ϕ. Para $\phi = 2\phi_Y$, T está cerca de 3% de T_p, y para $\phi = 3\phi_Y$, cerca de 1%.

Puesto que la gráfica de T contra ϕ obtenida para un material elastoplástico idealizado (figura 3.39) difiere en gran medida del diagrama esfuerzo-deformación a cortante de dicho material (figura 3.37), está claro que el diagrama esfuerzo-deformación a cortante de un material real no puede obtenerse directamente de un ensayo de tensión llevado a cabo en una varilla sólida circular hecha de dicho material. Sin embargo, un diagrama bastante exacto puede obtenerse de un ensayo de torsión si la probeta utilizada incorpora una porción que consista de un tubo circular delgado.‡ De hecho, puede suponerse que el esfuerzo cortante tendrá un valor constante τ en esa porción. La ecuación (3.1) se reduce por lo tanto a

$$T = \rho A \tau$$

donde ρ es el radio promedio del tubo y A el área de su sección transversal. El esfuerzo cortante es, entonces, proporcional al par de torsión, y valores sucesivos de τ pueden calcularse con facilidad de los valores correspondientes de T. Por otra parte, los valores de la deformación a cortante γ pueden obtenerse de la ecuación (3.2) y de los valores de ϕ y L medidos en la porción tubular del espécimen.

---

† La ecuación (3.36) se aplica a cualquier material dúctil con un punto de cedencia bien definido, ya que su deducción es independiente de la forma del diagrama de esfuerzo-deformación más allá del punto de cedencia.

‡ Para minimizar la posibilidad de falla por pandeo, la probeta deberá ser hecha de tal manera que la longitud de la porción tubular no sea más larga que su diámetro.

EJEMPLO 3.08

Un eje circular sólido de 1.2 m de longitud y 50 mm de diámetro, se sujeta a un par de torsión de 4.60 kN · m en cada extremo (figura 3.40). Suponiendo que el eje es de un material elastoplástico con una resistencia de cedencia al corte de 150 MPa y un módulo de rigidez de 77 GPa, determine *a*) el radio del núcleo elástico, *b*) el ángulo de giro del eje.

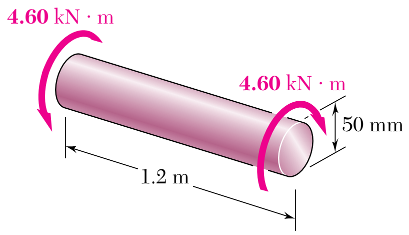


Figura 3.40

a) Radio del núcleo elástico. Primero se determina el par T_Y al inicio de la cedencia. Utilizando la ecuación (3.28) con $\tau_Y = 150$ MPa, $c = 25$ mm y

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(25 \times 10^{-3}\text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

se escribe

$$T_Y = \frac{J\tau_Y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(150 \times 10^6\text{ Pa})}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 3.68\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Despejando de la ecuación (3.32) el término $(\rho_Y/c)^3$ y sustituyendo los valores de T y de T_Y, se tiene

$$\left(\frac{\rho_Y}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_Y} = 4 - \frac{3(4.60\text{ kN} \cdot \text{m})}{3.68\text{ kN} \cdot \text{m}} = 0.250$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = 0.630 \qquad \rho_Y = 0.630(25\text{ mm}) = 15.8\text{ mm}$$

b) Ángulo de giro. Primero se determina el ángulo de giro ϕ_Y al inicio de la cedencia de la ecuación (3.16):

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{(3.68 \times 10^3\text{ N} \cdot \text{m})(1.2\text{ m})}{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(77 \times 10^9\text{ Pa})} = 93.4 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

Despejando ϕ de la ecuación (3.36) y sustituyendo los valores obtenidos para ϕ_Y y para ρ_Y/c, se escribe

$$\phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c} = \frac{93.4 \times 10^{-3}\text{ rad}}{0.630} = 148.3 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

o

$$\phi = (148.3 \times 10^{-3}\text{ rad})\left(\frac{360°}{2\pi\text{ rad}}\right) = 8.50°$$

*3.11 ESFUERZOS RESIDUALES EN EJES CIRCULARES

En las dos secciones precedentes se estudió que una región plástica se desarrollará en un eje sometido a un par de torsión suficientemente grande, y que el esfuerzo cortante τ en cualquier punto dado de la región plástica puede obtenerse del diagrama de esfuerzo-deformación a cortante de la figura 3.34. Si se retira el par, la reducción de esfuerzo y de deformación unitaria en el punto considerado tendrá lugar a lo largo de una línea recta (figura 3.41). Como se verá posteriormente en esta sección, el valor final del esfuerzo no será, en general, cero, ya que habrá un esfuerzo residual en la mayoría de los puntos, que podrá ser positivo o negativo. Note que, como en el caso del esfuerzo normal, el esfuerzo cortante continuará decreciendo hasta que haya alcanzado un valor igual a su valor máximo en C menos el doble de la resistencia de cedencia del material.

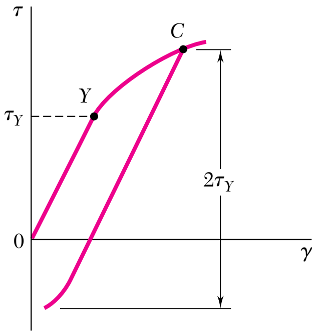


Figura 3.41

Considere otra vez el caso idealizado de un material elastoplástico caracterizado por el diagrama esfuerzo-deformación a cortante de la figura 3.37. Suponiendo que la relación entre τ y γ en cualquier punto del eje permanece lineal mientras el esfuerzo no decrezca por más de $2\tau_Y$, puede utilizarse la ecuación (3.16) para obtener el ángulo en el cual el eje se destuerce al disminuir el par a cero. Como resultado, la descarga del eje será representada por una línea recta en el diagrama T-ϕ (figura 3.42). Observe que el ángulo de giro no regresa a cero después de que se ha retirado el par. De hecho, la carga y descarga del eje resultan en una deformación permanente caracterizada por el ángulo

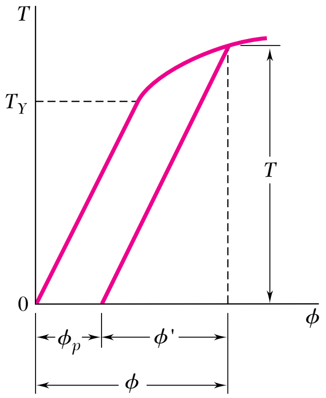


Figura 3.42

$$\phi_p = \phi - \phi' \tag{3.38}$$

donde ϕ corresponde a la fase de carga y puede obtenerse de T al despejar la ecuación (3.38), y donde ϕ' corresponde a la fase de descarga y puede obtenerse de la ecuación (3.16).

Los esfuerzos residuales en un material elastoplástico se obtienen al aplicar el principio de superposición de una manera similar a la descrita en la sección 2.20 para la carga axial. Considere, por una parte, los esfuerzos debidos a la aplicación del par dado **T** y, por otra, los esfuerzos debidos al par igual y opuesto que se aplica para descargar el eje. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento elastoplástico del material durante la fase de carga (figura 3.43*a*), y el segundo grupo el comportamiento lineal del mismo material durante la fase de descarga (figura 3.43*b*). Sumando los dos grupos de esfuerzos, se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el eje (figura 3.43*c*).

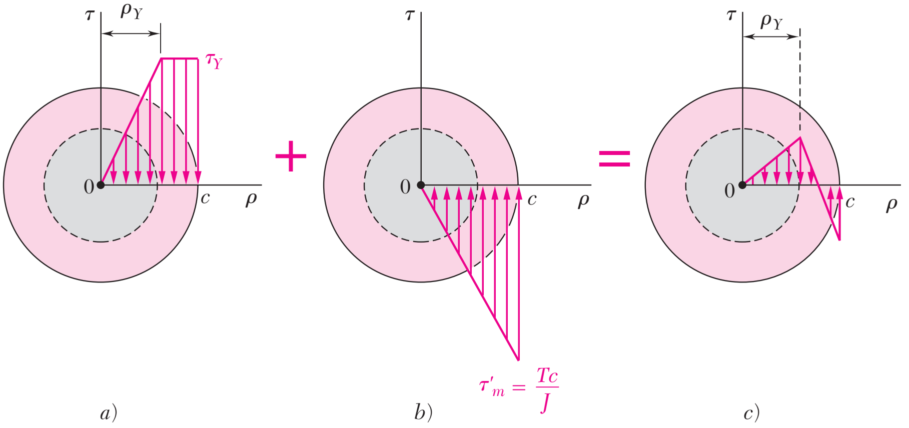


Figura 3.43

En la figura 3.43*c* se observa que algunos de los esfuerzos residuales tienen el mismo sentido que los esfuerzos originales, mientras que otros tienen el sentido opuesto. Esto era de esperarse ya que, de acuerdo con la ecuación (3.1), la relación

$$\int \rho(\tau\, dA) = 0 \tag{3.39}$$

debe verificarse después de que se retira el par.

EJEMPLO 3.09

Para el eje del ejemplo 3.08 determine *a*) el ángulo de torsión permanente, *b*) la distribución de los esfuerzos residuales después de que se ha retirado un par de 4.60 kN · m.

a) Ángulo de torsión permanente. Del ejemplo 3.08, recuerde que el ángulo de giro correspondiente al par dado es $\phi = 8.50°$. El ángulo ϕ' a través del que se destuerce el eje al retirarse el par se obtiene de la ecuación (3.16). Sustituyendo los datos recibidos,

$$T = 4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$L = 1.2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

y el valor de $J = 614 \times 10^{-9}$ m^4 obtenido en la solución del ejemplo 3.08, se tiene que

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}$$
$$= 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

o

$$\phi' = (116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 6.69°$$

El ángulo de torsión permanente es, por lo tanto,

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8.50° - 6.69° = 1.81°$$

b) Esfuerzos residuales. Recuerde, del ejemplo 3.08, que la resistencia a la cedencia es $\tau_Y = 150$ MPa y que el radio del núcleo elástico que corresponde al torque dado es $\rho_Y = 15.8$ mm. La distribución de esfuerzos en este eje es, por lo tanto, mostrada en la figura 3.44*a*.

La distribución de esfuerzos debida al par opuesto de 4.60 kN · m requerido para descargar el eje es lineal, como se observa en la figura 3.44*b*. El máximo esfuerzo en la distribución de los esfuerzos inversos se determina de la ecuación (3.9):

$$\tau'_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= 187.3 \text{ MPa}$$

Superponiendo las dos distribuciones de esfuerzos, se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la figura 3.44*c*. Se verifica que, aun cuando los esfuerzos inversos excedan la resistencia a la cedencia τ_Y, la suposición de una distribución lineal para estos esfuerzos es válida, ya que no exceden $2\tau_Y$.

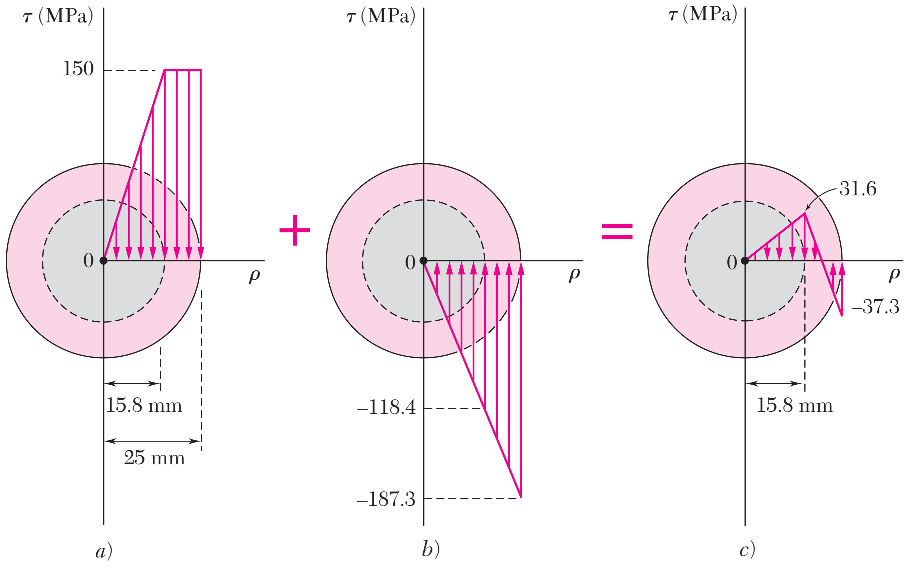
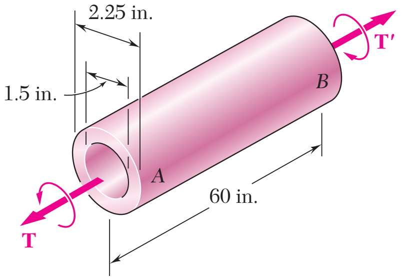


Figura 3.44

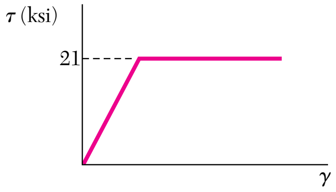


PROBLEMA MODELO 3.7

El eje AB es de un acero dulce del que se supone tiene comportamiento elastoplástico con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_Y = 21$ ksi. Un par **T** se aplica y su magnitud se incrementa gradualmente. Determine la magnitud de **T** y el ángulo de giro correspondiente *a*) cuando ocurre la cedencia, *b*) cuando la deformación es completamente plástica.

SOLUCIÓN

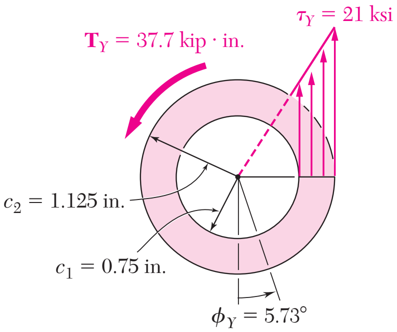
Propiedades geométricas



Las propiedades geométricas de la sección transversal son

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(1.5 \text{ in.}) = 0.75 \text{ in.} \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}(2.25 \text{ in.}) = 1.125 \text{ in.}$$

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi[(1.125 \text{ in.})^4 - (0.75 \text{ in.})^4] = 2.02 \text{ in.}^4$$



***a*) Inicio de la cedencia.** Para $\tau_{\text{máx}} = \tau_Y = 21$ ksi, se encuentra

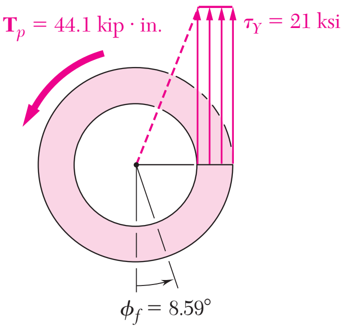
$$T_Y = \frac{\tau_Y J}{c_2} = \frac{(21 \text{ ksi})(2.02 \text{ in.}^4)}{1.125 \text{ in.}}$$

$$T_Y = 37.7 \text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

Haciendo $\rho = c_2$ y $\gamma = \gamma_Y$ en la ecuación (3.2) y despejando ϕ, se obtiene el valor de ϕ_Y:

$$\phi_Y = \frac{\gamma_Y L}{c_2} = \frac{\tau_Y L}{c_2 G} = \frac{(21 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in.})}{(1.125 \text{ in.})(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.100 \text{ rad}$$

$$\phi_Y = 5.73° \blacktriangleleft$$



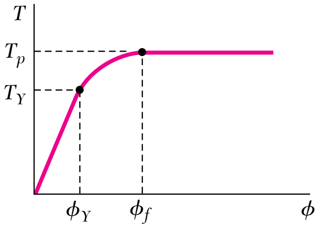
***b*) Deformación completamente plástica.** Cuando la zona plástica alcanza la superficie interna, los esfuerzos están distribuidos uniformemente como se muestra en la figura. Utilizando la ecuación (3.16), se escribe

$$T_p = 2\pi\tau_Y \int_{c_1}^{c_2} \rho^2 \, d\rho = \tfrac{2}{3}\pi\tau_Y(c_2^3 - c_1^3)$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi(21 \text{ ksi})[(1.125 \text{ in.})^3 - (0.75 \text{ in.})^3]$$

$$T_p = 44.1 \text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

Cuando se inicia la cedencia en la superficie interna, la deformación es completamente plástica; se tiene de la ecuación (3.2):



$$\phi_f = \frac{\gamma_Y L}{c_1} = \frac{\tau_Y L}{c_1 G} = \frac{(21 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in.})}{(0.75 \text{ in.})(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.150 \text{ rad}$$

$$\phi_f = 8.59° \blacktriangleleft$$

Para ángulos mayores de giro el par de torsión permanece constante; el diagrama T-ϕ del eje es como se muestra en la figura.

PROBLEMA MODELO 3.8

Para el eje del problema modelo 3.7, determine los esfuerzos residuales y el ángulo de giro permanente después de que el par $T_P = 44.1$ kip · in. ha sido retirado.

SOLUCIÓN

Al abordar el problema modelo 3.7, recuerde que se observa que cuando la zona plástica alcanzó la superficie interna, el par aplicado era $T_P = 44.1$ kip · in. y el ángulo de giro correspondiente era $\phi_f = 8.59°$. Estos valores se muestran en la figura 1.

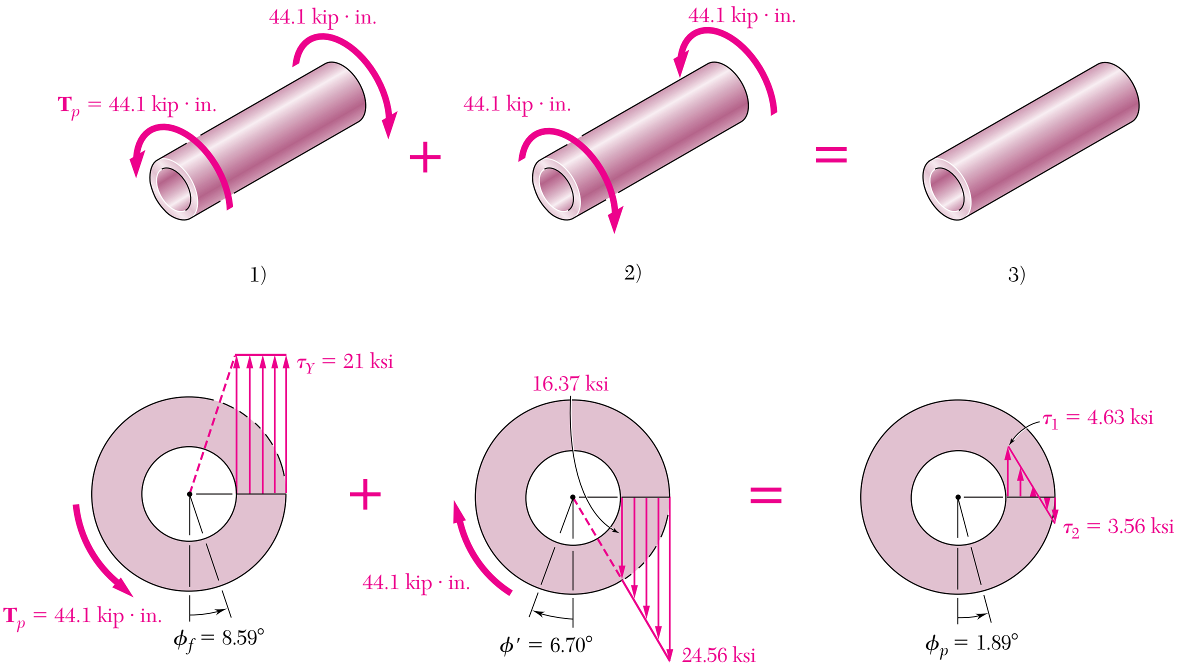
Descarga elástica. El eje se descarga aplicando un par de 44.1 kip · in. en el sentido mostrado en la figura 2. Durante esta descarga, el comportamiento del material es lineal. Recordando del problema modelo 3.7 los valores encontrados para c_1, c_2 y J, se obtienen los siguientes esfuerzos y ángulo de giro:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} = \frac{(44.1 \text{ kip} \cdot \text{in.})(1.125 \text{ in.})}{2.02 \text{ in.}^4} = 24.56 \text{ ksi}$$

$$\tau_{\text{mín}} = \tau_{\text{máx}}\frac{c_1}{c_2} = (24.56 \text{ ksi})\frac{0.75 \text{ in.}}{1.125 \text{ in.}} = 16.37 \text{ ksi}$$

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(44.1 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in.})}{(2.02 \text{ in.}^4)(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.1170 \text{ rad} = 6.70°$$

Esfuerzos residuales y ángulo de torsión permanente. Los resultados de la carga (figura 1) y de la descarga (figura 2) se superponen (figura 3) para obtener los esfuerzos residuales y el ángulo de torsión permanente ϕ_p.


44.1 kip · in.
T_p = 44.1 kip · in.
+
44.1 kip · in.
44.1 kip · in.
=
τ_Y = 21 ksi
T_p = 44.1 kip · in.
ϕ_f = 8.59°
+
16.37 ksi
44.1 kip · in.
ϕ' = 6.70°
24.56 ksi
=
τ_1 = 4.63 ksi
τ_2 = 3.56 ksi
ϕ_p = 1.89°

1) 2) 3)

PROBLEMAS

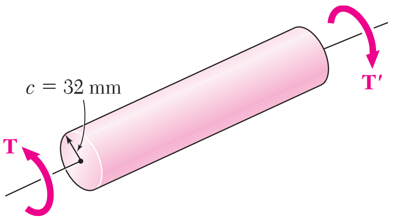


Figura P3.92

3.92 El eje circular sólido que se muestra en la figura es de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa. Determine la magnitud T del par de torsión aplicado cuando la zona plástica tiene una profundidad de *a*) 16 mm, *b*) 24 mm.

3.93 Una varilla sólida de 1.25 in. de diámetro es de un material elastoplástico con $\tau_y = 5$ ksi. Si se sabe que el núcleo elástico de la varilla tiene un diámetro de 1 in., determine la magnitud del par de torsión aplicado a la varilla.

3.94 Un eje sólido de 2 in. de diámetro está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_y = 20$ ksi. Determine el esfuerzo cortante máximo y el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión de magnitud *a*) 30 kip · in., *b*) 40 kip · in.

3.95 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $G = 77.2$ GPa y $\tau_y = 145$ MPa. Determine el esfuerzo cortante máximo y el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 600$ N · m, *b*) $T = 1\,000$ N · m.

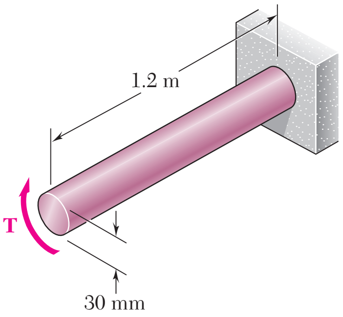


Figura *P3.95* y P3.96

3.96 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_\gamma = 145$ MPa. Determine el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión igual a 1.1 T_y donde T_y es la magnitud del par de torsión en el punto de cedencia.

3.97 Se observa que un prensapapeles (clip) enderezado puede torcerse varias revoluciones con un par de torsión de aproximadamente 60 mN · m. Si se sabe que el diámetro del alambre del prensapapeles es de 0.9 mm, determine el valor aproximado del esfuerzo de cedencia del acero.

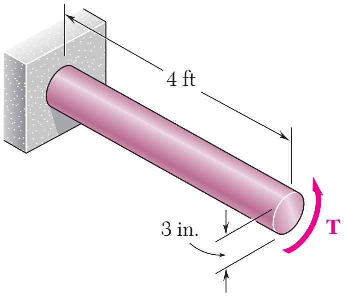


Figura P3.98

3.98 El eje circular sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Determine el ángulo de giro causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 80$ kip · in., *b*) $T = 130$ kip · in.

3.99 Para el eje circular sólido del problema 3.95, determine el ángulo de giro causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 600$ N · m, *b*) $T = 1\,000$ N · m.

3.100 El eje *AB* está hecho de un material que es elastoplástico con $\tau_y = 90$ MPa y $G = 30$ GPa. Para la carga mostrada, determine *a*) el radio del núcleo elástico del eje, *b*) el ángulo de giro en el extremo *B*.

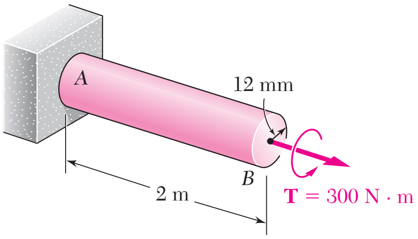


Figura P3.100

3.101 Un eje circular sólido de 1.25 in. de diámetro está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_y = 18$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Para un tramo del eje de 8 ft de longitud, determine el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de giro causados por un par de torsión de 7.5 kip · in.

3.102 Un eje circular sólido de 0.75 in. de diámetro está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_y = 20$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Para un tramo del eje de 4 ft de longitud, encuentre el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de giro causado por un par de torsión de 1 800 lb · in.

3.103 Una varilla circular sólida está hecha de un material que se supone elastoplástico. Si T_y y ϕ_y son, respectivamente, el par de torsión y el ángulo de giro al inicio de la cedencia, determine el ángulo de giro si el par de torsión se incrementa a *a*) $T = 1.1\ T_y$, *b*) $T = 1.25\ T_y$, *c*) $T = 1.3\ T_y$.

3.104 Un eje sólido de 3 ft de largo tiene un diámetro de 2.5 in. y está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Determine el par de torsión requerido para girar el eje a través de un ángulo de *a*) 2.5°, *b*) 5°.

3.105 Para el eje sólido del problema 3.95, determine *a*) la magnitud del par de torsión **T** requerido para girar el eje a través de un ángulo de 15°, *b*) el radio del núcleo elástico correspondiente.

3.106 Un eje hueco de acero tiene 0.9 m de longitud y tiene la sección transversal que se muestra en la figura. El acero se supone elastoplástico con $\tau_y = 180$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Determine el par de torsión aplicado y el correspondiente ángulo de giro *a*) al inicio de la cedencia, *b*) cuando la zona plástica tiene 10 mm de profundidad.

3.107 Un eje hueco de acero tiene 0.9 m de longitud y la sección transversal que muestra la figura. El acero se supone elastoplástico con $\tau_y = 180$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Determine *a*) el ángulo de giro para el que la sección se convierte completamente en plástica, *b*) la magnitud correspondiente del par de torsión aplicado.

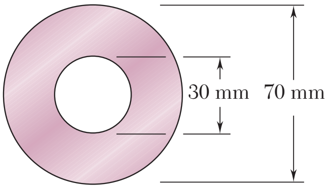


Figura P3.106 y P3.107

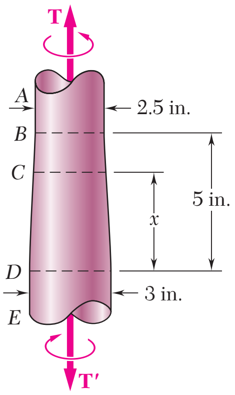


Figura P3.108

3.108 Una varilla de acero se maquina en la forma que se muestra en la figura para formar un eje sólido ahusado, al cual se le aplican pares de torsión con magnitud $T = 75$ kip · in. Se supone que el acero es elástico con $\tau_y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el radio del núcleo plástico en la porción *AB* del eje, *b*) la longitud de la porción *CD* que permanece completamente elástica.

3.109 Si la magnitud de los pares de torsión aplicados al eje ahusado del problema 3.108 se incrementa lentamente, determine *a*) la magnitud *T* de los pares máximos que pueden aplicarse al eje, *b*) la longitud de la porción *CD* que permanece completamente elástica.

3.110 Con el diagrama esfuerzo-deformación que se muestra en la figura, calcule *a*) el par de torsión que causa un momento cortante máximo de 15 ksi en una varilla sólida de 0.8 in. de diámetro, *b*) el ángulo de giro correspondiente en un tramo de 20 in. de la varilla.

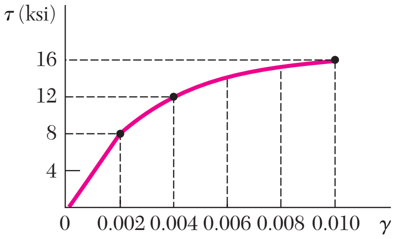


Figura *P3.110* y *P3.111*

3.111 Un eje hueco con diámetros exterior e interior iguales a 0.6 in. y 0.2 in., respectivamente, se fabrica de una aleación de aluminio cuyo diagrama esfuerzo-deformación se indica en el esquema. Determine el par de torsión requerido para torcer un tramo de 9 in. del eje un ángulo de 10°.

3.112 Una varilla sólida de aluminio con 40 mm de diámetro se somete a un par de torsión que produce en la varilla una deformación cortante máxima de 0.008. Con el diagrama τ-γ que se muestra en la figura para la aleación de aluminio empleada, determine *a*) la magnitud del par de torsión aplicado a la varilla, *b*) el ángulo de giro en un tramo de la varilla de 750 mm de longitud.

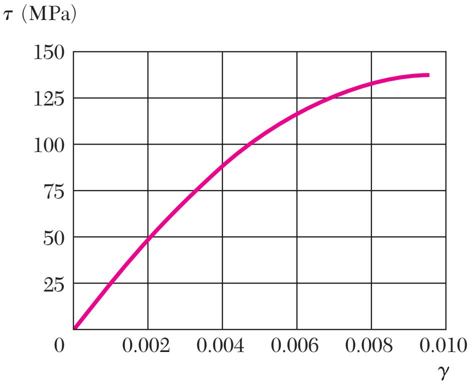


Figura P3.112

3.113 La curva que se muestra en la figura P3.112 puede aproximarse mediante la relación

$$\tau = 27.8 \times 10^9\gamma - 1.390 \times 10^{12}\gamma^2$$

Utilizando esta relación y las ecuaciones (3.2) y (3.26), resuelva el problema 3.112.

3.114 La varilla perforadora circular *AB* está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 22$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Si se sabe que a la varilla se le aplica un par de torsión con $T = 75$ kip · in. y después se retira, determine el esfuerzo cortante residual máximo en la varilla.

3.115 En el problema 3.114, determine el ángulo de giro permanente de la varilla.

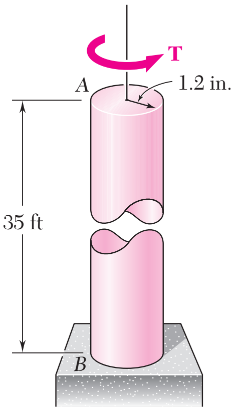


Figura P3.114

3.116 El eje hueco que se muestra en la figura está hecho de acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. La magnitud T de los pares de torsión se incrementa lentamente hasta el momento en que la zona plástica alcanza la superficie interna del eje, entonces los pares de torsión se retiran. Determine la magnitud y ubicación del esfuerzo cortante residual máximo en la varilla.

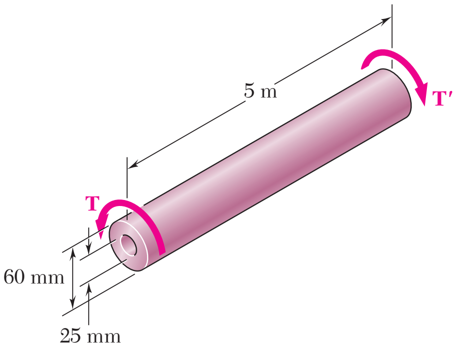


Figura *P3.116*

3.117 En el problema 3.116, determine el ángulo de giro permanente de la varilla.

3.118 El eje sólido que se muestra en la figura es de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. El par de torsión se incrementa en magnitud hasta que el eje ha sido torcido a 6°; después se retira el par de torsión. Determine *a*) la magnitud y localización del esfuerzo cortante residual máximo, *b*) el ángulo de giro permanente.

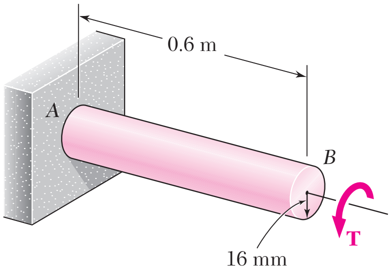


Figura P3.118

3.119 Un par de torsión **T** aplicado a una varilla sólida, hecha de un material elastoplástico, se incrementa hasta que la varilla se vuelve completamente plástica, y entonces se retira. *a*) Muestre que la distribución de esfuerzos residuales es como se representa en la figura. *b*) Determine la magnitud del par de torsión debida a los esfuerzos que actúan en la porción de la varilla localizada dentro de un círculo de radio c_0.

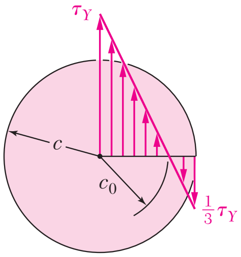


Figura P3.119

3.120 Después de que el eje sólido del problema 3.118 se ha cargado y descargado como se describe en dicho problema, se aplica un par de torsión $\mathbf{T}_1$ con sentido opuesto al par de torsión original **T** que se aplicó al eje. Suponga que no hay cambio en el valor de ϕ_Y y determine el ángulo de giro ϕ_1 para el que se inicia la cedencia en esta segunda carga y compárela con el ángulo ϕ_Y en el que el eje comenzó a ceder en la carga original.

*3.12 TORSIÓN DE ELEMENTOS NO CIRCULARES

Las fórmulas obtenidas en las secciones 3.3 y 3.4 para las distribuciones de deformación y de esfuerzo bajo una carga torsional se aplican sólo a elementos con sección transversal circular. De hecho, su deducción se basó en la suposición de que la sección transversal del elemento permaneció plana y sin distorsionar, y se vio en la sección 3.3 que la validez de esta suposición depende de la *simetría axial* del elemento, es decir, sobre el hecho de que su apariencia permanece constante cuando se ve desde una posición fija y se gira alrededor de su eje un ángulo arbitrario.

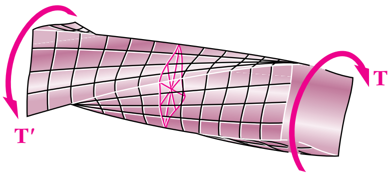
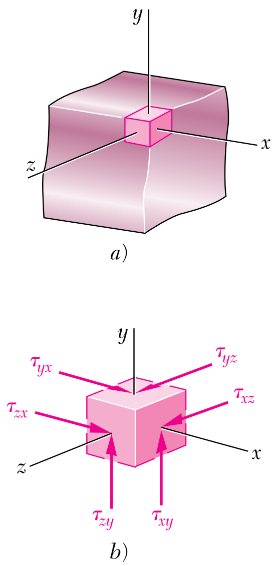


Figura 3.45

Una barra cuadrada, por el contrario, retiene la misma apariencia sólo si se gira 90° o 180°. Siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la sección 3.3, podría mostrarse que las diagonales de la sección transversal cuadrada de la barra y las líneas que unen los puntos medios de los lados de dicha sección permanecen rectas (figura 3.45). Sin embargo, debido a la falta de simetría axial de la barra, cualquier otra línea dibujada en su sección transversal se deformará cuando la barra se tuerza, y la sección transversal misma se torcerá fuera de su plano original.

Se deduce que las ecuaciones (3.4) y (3.6), que definen respectivamente las distribuciones de deformación y de esfuerzo en un eje circular elástico no pueden utilizarse para elementos no circulares. Por ejemplo, sería erróneo suponer que el esfuerzo cortante en la sección transversal de una barra cuadrada varía linealmente con la distancia desde el eje de la barra y que es, por lo tanto, mayor en las esquinas de la sección transversal. Como se verá en seguida, el esfuerzo cortante en realidad es cero en estos puntos.



a)

b)

Figura 3.46

Considere un pequeño elemento cúbico ubicado en una esquina de la sección transversal de una barra cuadrada en torsión y seleccione los ejes coordenados paralelos a los bordes del elemento (figura 3.46*a*). Como la cara del elemento perpendicular al eje *y* es parte de la superficie libre de la barra, todos los esfuerzos en esta cara deben ser cero. Con referencia a la figura 3.46*b*, se escribe

$$\tau_{yx} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0 \tag{3.40}$$

Por la misma razón, todos los esfuerzos en la cara del elemento perpendicular al eje z deben ser cero, y se escribe

$$\tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{zy} = 0 \tag{3.41}$$

De la primera de las ecuaciones (3.40) y de la primera de las ecuaciones (3.41), sigue que

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \tag{3.42}$$

Por lo tanto, ambas componentes del esfuerzo cortante en la cara del elemento perpendicular al eje de la barra son cero. Se concluye que no hay esfuerzo cortante en las esquinas de la sección transversal de la barra.

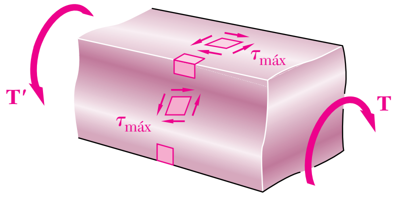


Figura 3.47

Torciendo un modelo de caucho de una barra cuadrada, se verifica fácilmente que no ocurren deformaciones —y, por lo tanto, tampoco esfuerzos— a lo largo de los bordes de la barra, mientras que las deformaciones máximas —y, por lo tanto, los esfuerzos máximos— ocurren a lo largo de la línea central de cada una de las caras de la barra (figura 3.47).

La determinación de los esfuerzos en elementos no circulares sujetos a carga torsional está más allá del alcance de este libro. No obstante, los resultados obtenidos de la teoría matemática de la elasticidad para barras rectas con *sección transversal rectangular uniforme* se indicará aquí por conveniencia.†

---

† Véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1969, sección 109.

Denotando con L la longitud de la barra, con a y b, respectivamente, el lado más ancho y el más angosto de su sección transversal y con T la magnitud de los pares de torsión aplicados a la barra (figura 3.48), se encuentra que el máximo esfuerzo cortante ocurre a lo largo de la línea central de la cara *más ancha* de la barra y es igual a

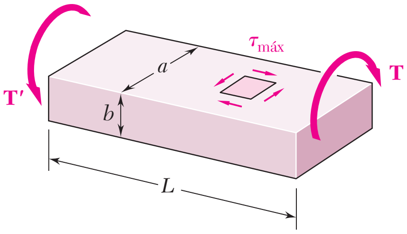


Figura 3.48

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{c_1 a b^2} \tag{3.43}$$

El ángulo de giro, por otro lado, puede expresarse por

$$\phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G} \tag{3.44}$$

Los coeficientes c_1 y c_2 dependen sólo de la razón a/b y se dan en la tabla 3.1 para una cantidad de valores de dicha razón. Note que las ecuaciones (3.43) y (3.44) son válidas sólo dentro del rango elástico.

TABLA 3.1 Coeficientes para barras rectangulares en torsión

a/b	c_1	c_2
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

Se observa de la tabla 3.1 que para $a/b \geq 5$, los coeficientes c_1 y c_2 son iguales. Puede demostrarse que para tales valores de a/b, se tiene que

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630b/a) \qquad \textbf{\textit{(para a/b} \geq \textbf{\textit{5 solamente)}} \tag{3.45}$$

La distribución de esfuerzos cortantes en un elemento no circular puede visualizarse con mayor facilidad utilizando la *analogía de la membrana*. Una membrana elástica homogénea unida a un marco fijo y sometida a una presión uniforme en uno de sus lados constituye un *análogo* de una barra en torsión, esto es, la determinación de la deformación de la membrana depende de la solución de la misma ecuación diferencial parcial que la determinación de los esfuerzos cortantes en la barra.† Más específicamente, si Q es un punto de la sección transversal de la barra y Q' el punto correspondiente de la membrana (figura 3.49), el esfuerzo cortante τ en Q tendrá la misma dirección que la tangente horizontal a la membrana en Q' y su magnitud será proporcional al máximo de pendiente de la membrana Q'.‡ Además, el par de torsión aplicado será proporcional al volumen entre la membrana y el plano del marco fijo. En el caso de la membrana de la figura 3.49, que está unida a un marco rectangular, la pendiente más pronunciada ocurre en el punto medio N' del lado mayor del marco. Por lo tanto, se verifica que el máximo esfuerzo cortante en una barra de sección transversal rectangular ocurrirá en el punto medio N del lado mayor de la sección.

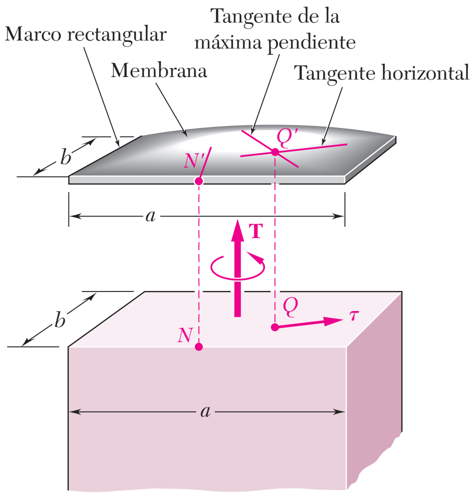


Figura 3.49

La analogía de la membrana también puede usarse con eficacia para visualizar los esfuerzos cortantes en cualquier barra de sección transversal uniforme no circular. En particular, considere varios elementos de pared delgada con las secciones transversales que se muestran en la figura 3.50, que están sujetos al mismo par de torsión. Utilizando la analogía de la membrana como ayuda para visualizar los esfuerzos cortantes, se advierte que, ya que el mismo par se aplica a cada elemento, el mismo volumen estará localizado bajo cada membrana, y la máxima pendiente será casi la misma en cada caso. Así, para un elemento de pared delgada de espesor uniforme y forma arbitraria, el máximo esfuerzo cortante es el mismo que para una barra rectangular con un valor muy grande de a/b y puede ser determinado de la ecuación (3.43) con $c_1 = 0.333$.§

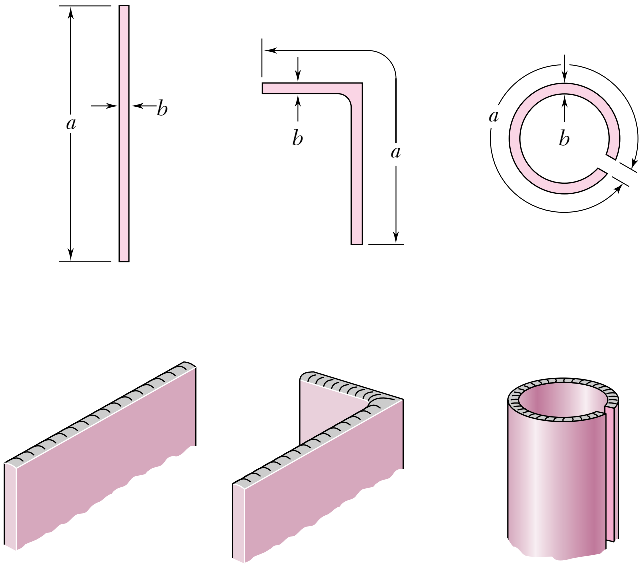


Figura 3.50

---

† *Ibid.* Véase sección 107.

‡ Ésta es la pendiente medida en una dirección perpendicular a la tangente horizontal en Q'.

§ También pudo haberse mostrado que el ángulo de giro puede determinarse con la ecuación (3.44) con $c_2 = 0.333$.

*3.13 EJES HUECOS DE PARED DELGADA

En la sección anterior se vio que la determinación de esfuerzos en elementos no circulares generalmente requiere del uso de métodos matemáticos avanzados. En el caso de ejes huecos no circulares de pared delgada, sin embargo, puede obtenerse una buena aproximación de la distribución de esfuerzos en el eje por medio de un cálculo sencillo.

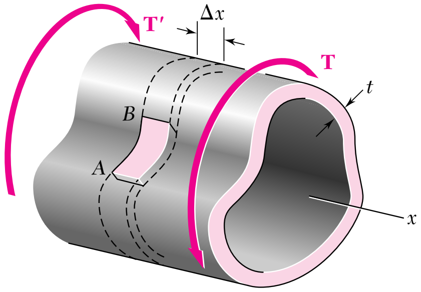


Figura 3.51

Considere un elemento cilíndrico hueco con sección *no circular* sujeto a una carga torsional (figura 3.51).† A pesar de que el espesor t de la pared puede variar dentro de una sección transversal, se supondrá que permanece pequeño en comparación con las demás dimensiones del elemento. Ahora se desprende del elemento la porción coloreada de pared AB limitada por los dos planos a una distancia mutua Δx, y por dos planos longitudinales perpendiculares a la pared. Como la porción AB está en equilibrio, la suma de las fuerzas ejercidas sobre ella en la dirección longitudinal x debe ser cero (figura 3.52). Pero las únicas fuerzas involucradas son las fuerzas cortantes $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ ejercidas sobre los extremos de la porción AB. Se tiene por lo tanto

$$\Sigma F_x = 0: \qquad F_A - F_B = 0 \tag{3.46}$$

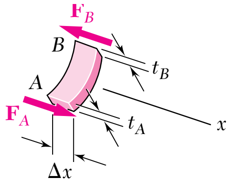


Figura 3.52

Ahora se expresa F_A como el producto de esfuerzo cortante longitudinal τ_A sobre la cara pequeña en A y del área $t_A\,\Delta x$ de dicha cara:

$$F_A = \tau_A(t_A\,\Delta x)$$

Note que, a pesar de que el esfuerzo cortante es independiente de la coordenada x del punto considerado, puede variar a través de la pared; por lo tanto, τ_A representa el valor promedio del esfuerzo calculado a través de la pared. Expresando F_B de manera similar y sustituyendo F_A y F_B en la ecuación (3.46), se escribe

$$\tau_A(t_A\,\Delta x) - \tau_B(t_B\,\Delta x) = 0$$

o

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B \tag{3.47}$$

Ya que A y B se escogieron en forma arbitraria, la ecuación (3.47) expresa que el producto τt del esfuerzo cortante longitudinal τ y del espesor de la pared es una constante t a través del elemento. Denotando este producto con q, se tiene que

$$q = \tau t = \text{constante} \tag{3.48}$$

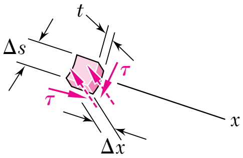


Figura 3.53

Ahora se desprende un pequeño elemento de la porción AB de la pared (figura 3.53). Como las caras superior e inferior de este elemento son parte de la superficie libre del miembro hueco, los esfuerzos en estas caras son iguales a cero. De las ecuaciones (1.21) y (1.22) de la sección 1.12, se tiene que las componentes de esfuerzo indicadas en las otras caras por flechas punteadas son también cero, en tanto que las representadas por flechas sólidas son iguales. Así, el esfuerzo cortante en cualquier punto de un corte transversal del miembro hueco es paralelo a la superficie de la pared (figura 3.54) y su valor promedio calculado a través de la pared satisface la ecuación (3.48).

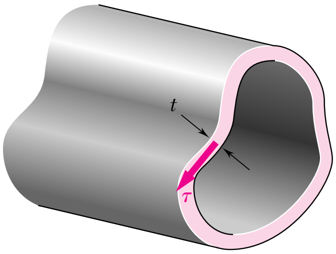


Figura 3.54

---

† La pared del elemento debe encerrar una sola cavidad y no debe estar ranurada. En otras palabras, el elemento deberá ser topológicamente equivalente a un eje circular hueco.

En este punto puede advertirse una analogía entre la distribución de los esfuerzos cortantes τ en el corte transversal de un eje hueco de pared delgada y la distribución de las velocidades v en agua que fluye en un canal cerrado de profundidad unitaria y de ancho variable. A pesar de que la velocidad v del agua varía de un punto a otro dependiendo de la variación del ancho t del canal, la tasa de flujo, $q = vt$, permanece constante en el canal, del mismo modo que τt en la ecuación (3.48). Debido a esta analogía, el producto $q = \tau t$ se conoce como el *flujo de corte* en la pared del eje hueco.

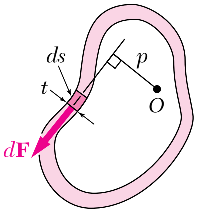


Figura 3.55

Ahora se deducirá una relación entre el par de torsión T aplicado a un miembro hueco y el flujo de corte q en su pared. Considere un pequeño elemento de la sección de la pared, de longitud ds (figura 3.55). El área del elemento es $dA = t\,ds$, y la magnitud de la fuerza cortante $d\mathbf{F}$ ejercida sobre el elemento es

$$dF = \tau\,dA = \tau(t\,ds) = (\tau t)\,ds = q\,ds \tag{3.49}$$

El momento dM_O de esta fuerza alrededor de un punto arbitrario O dentro de la cavidad del miembro puede obtenerse al multiplicar dF por la distancia perpendicular p desde O hasta la línea de acción de $d\mathbf{F}$. Se tiene

$$dM_O = p\,dF = p(q\,ds) = q(p\,ds) \tag{3.50}$$

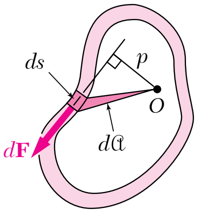


Figura 3.56

Pero el producto $p\,ds$ es igual al doble del área $d\mathcal{A}$ del triángulo sombreado de la figura 3.56. Se tiene, pues, que

$$dM_O = q(2d\mathcal{A}) \tag{3.51}$$

Como la integral alrededor de la sección de la pared del miembro izquierdo de la ecuación (3.51) representa la suma de los momentos de todas las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la sección de pared, y ya que esta suma es igual al par T aplicado al miembro hueco, se tiene que

$$T = \oint dM_O = \oint q(2d\mathcal{A})$$

Puesto que el flujo de corte q es una constante, se escribe

$$T = 2q\mathcal{A} \tag{3.52}$$

donde $\mathcal{A}$ es el área bordeada por la línea central de la sección transversal de la pared (figura 3.57).

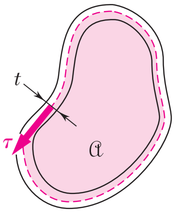


Figura 3.57

El esfuerzo cortante τ en cualquier punto dado de la pared puede expresarse en términos del par T si se sustituye q de la ecuación (3.48) en la ecuación (3.52) y se despeja τ de la ecuación obtenida. Se tiene que

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \tag{3.53}$$

donde t es el espesor de la pared en el punto considerado y $\mathcal{A}$ es el área bordeada por la línea central. Recuerde que τ representa el valor promedio del esfuerzo cortante a través de la pared. Sin embargo, para deformaciones elásticas la distribución de esfuerzos a través de la pared puede considerarse uniforme y la ecuación (3.53) dará el valor real del esfuerzo cortante en un punto dado de la pared.

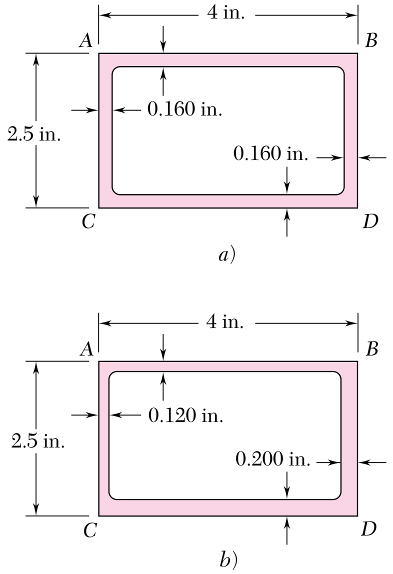
El ángulo de giro de un eje hueco de pared delgada puede obtenerse utilizando el método de energía (véase capítulo 11). Suponiendo una deformación elástica, puede mostrarse† que el ángulo de giro de un eje de pared delgada de longitud L y módulo de rigidez G es

$$\phi = \frac{TL}{4\mathcal{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t} \qquad (3.54)$$

donde la integral se calcula a lo largo de la línea central de la sección de la pared.

EJEMPLO 3.10

Se fabricó por extrusión un tubo cuadrado de aluminio estructural con una sección transversal de 2.5 × 4 in. Determine el esfuerzo cortante en cada una de las cuatro paredes de una porción de dicho tubo cuando se somete a un par de torsión de 24 kip · in., suponiendo *a*) un espesor uniforme de la pared de 0.160 in. (figura 3.58*a*), *b*) que, como resultado de una fabricación defectuosa, las paredes *AB* y *AC* son de 0.120 in. de espesor y las paredes *BD* y *CD* son de 0.200 in. de espesor (figura 3.58*b*).



a)

b)

Figura 3.58

a) Tubo de espesor uniforme de pared. El área bordeada por la línea central (figura 3.59) es

$$\mathcal{A} = (3.84 \text{ in.})(2.34 \text{ in.}) = 8.986 \text{ in.}^2$$

Ya que el espesor de cada una de las cuatro paredes es $t = 0.160$ in., se encuentra de la ecuación (3.53) que el esfuerzo cortante en cada pared es

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{2(0.160 \text{ in.})(8.986 \text{ in}^2)} = 8.35 \text{ ksi}$$

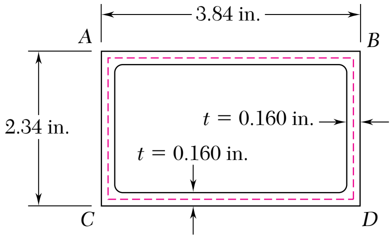


Figura 3.59

b) Tubo con espesor variable de pared. Observando que el área $\mathcal{A}$ bordeada por la línea central es la misma que en la parte *a*, y sustituyendo sucesivamente $t = 0.120$ in. y $t = 0.200$ in. en la ecuación (3.53), se tiene

$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{2(0.120 \text{ in.})(8.986 \text{ in}^2)} = 11.13 \text{ ksi}$$

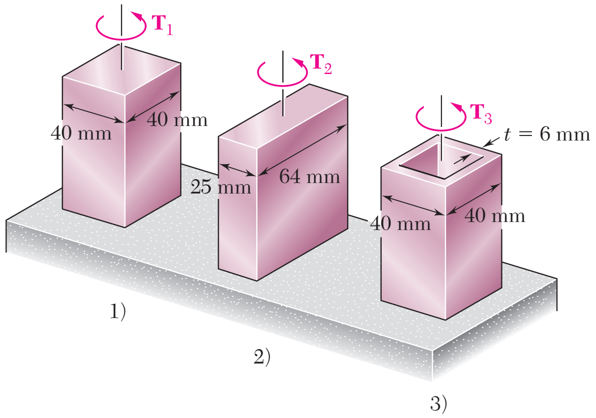
y

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{2(0.200 \text{ in.})(8.986 \text{ in}^2)} = 6.68 \text{ ksi}$$

Se advierte que el esfuerzo en una pared dada depende sólo de su espesor.

---

† Vea el problema 11.70.



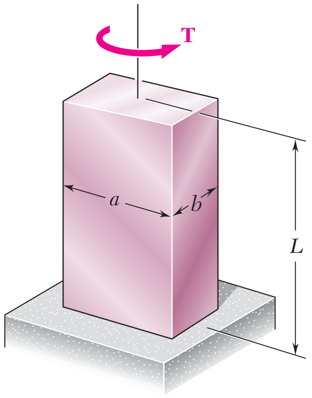
PROBLEMA MODELO 3.9

Utilizando $\tau_{\text{perm}} = 40$ MPa, determine el par máximo de torsión que puede aplicarse a cada una de las barras de latón y al tubo de latón que se muestran en la figura. Note que las dos barras sólidas tienen la misma área de sección transversal, y que la barra cuadrada y el tubo cuadrado tienen las mismas dimensiones externas.

SOLUCIÓN

1. Barra con sección transversal cuadrada. Para una barra sólida de sección transversal rectangular el máximo esfuerzo cortante está dado por la ecuación (3.43)

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{c_1 a b^2}$$



donde el coeficiente c_1 se obtiene de la tabla 3.1 en la sección 3.12. Se tiene

$$a = b = 0.040 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 1.00 \qquad c_1 = 0.208$$

Para $\tau_{\text{máx}} = \tau_{\text{perm}} = 40$ MPa, se tiene

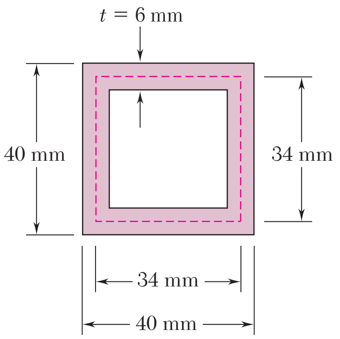
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_1}{c_1 a b^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_1}{0.208(0.040 \text{ m})^3} \qquad T_1 = 532 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

2. Barra con sección transversal rectangular. Ahora se tiene

$$a = 0.064 \text{ m} \qquad b = 0.025 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 2.56$$

Interpolando en la tabla 3.1: $c_1 = 0.259$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_2}{c_1 a b^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_2}{0.259(0.064 \text{ m})(0.025 \text{ m})^2} \qquad T_2 = 414 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



3. Tubo cuadrado. Para un tubo de espesor t, el esfuerzo cortante está dado por la ecuación (3.53)

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}}$$

donde $\mathcal{A}$ es el área bordeada por la línea central de la sección transversal. Se tiene

$$\mathcal{A} = (0.034 \text{ m})(0.034 \text{ m}) = 1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Se sustituye $\tau = \tau_{\text{perm}} = 40$ MPa y $t = 0.006$ m y se despeja el par de torsión permisible:

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_3}{2(0.006 \text{ m})(1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} \qquad T_3 = 555 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.121 Considerando $\tau_{\text{perm}} = 70$ MPa y $G = 27$ GPa, para cada una de las barras de aluminio que se muestran en la figura, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse y el ángulo de giro correspondiente en el extremo *B*.

3.122 Si se sabe que la magnitud del par de torsión **T** es de 200 N · m y que $G = 27$ GPa, determine para cada una de las barras de aluminio mostradas en la figura, el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de giro en el extremo *B*.

3.123 Con $\tau_{\text{perm}} = 7.5$ ksi y si se sabe que $G = 5.6 \times 10^6$ psi, para cada una de las barras de latón amarillo laminado en frío, determine el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse y el ángulo de giro correspondiente en el extremo *B*.

3.124 Si se sabe que $T = 7$ kip · in. y que $G = 5.6 \times 10^6$ psi, para cada una de las barras de latón amarillo laminado en frío que se muestran en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de giro en el extremo *B*.

3.125 El par de torsión **T** causa una rotación de 2° en el extremo *B* de la barra de acero inoxidable que se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 20$ mm y $G = 75$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

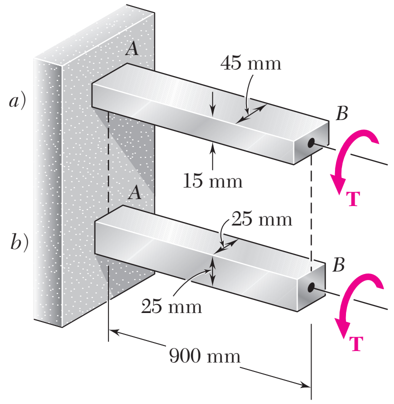


Figura P3.121 y P3.122

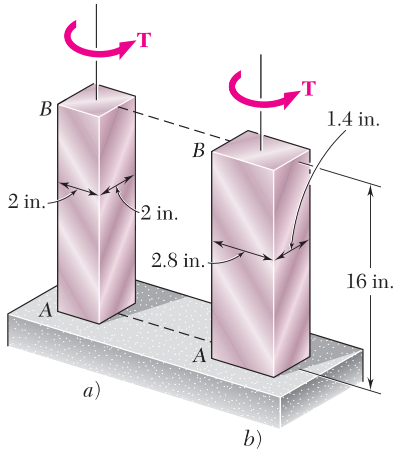


Figura P3.123 y P3.124

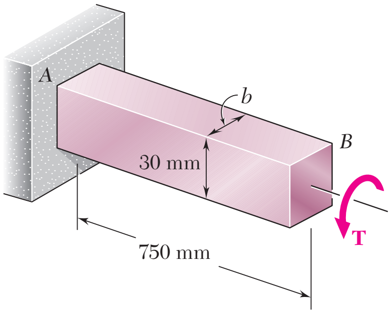


Figura P3.125 y P3.126

3.126 El par de torsión **T** causa una rotación de 0.6° en el extremo *B* de la barra de acero inoxidable que se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 15$ mm y $G = 26$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

3.127 Determine la máxima sección transversal cuadrada permisible para un eje de acero con 20 ft de longitud si el esfuerzo cortante máximo no debe exceder de 10 ksi cuando el eje se tuerce una revolución completa. Use $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.128 Determine la máxima longitud permisible para un eje de acero inoxidable con sección transversal de $\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$ in. si el esfuerzo cortante máximo no debe exceder de 15 ksi cuando el eje se tuerce a través de un ángulo de 15°. Use $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.129 Cada una de las tres barras de acero que se muestran en la figura están sometidas a un par de torsión con magnitud $T = 275$ N · m. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa, determine la dimensión b requerida para cada barra.

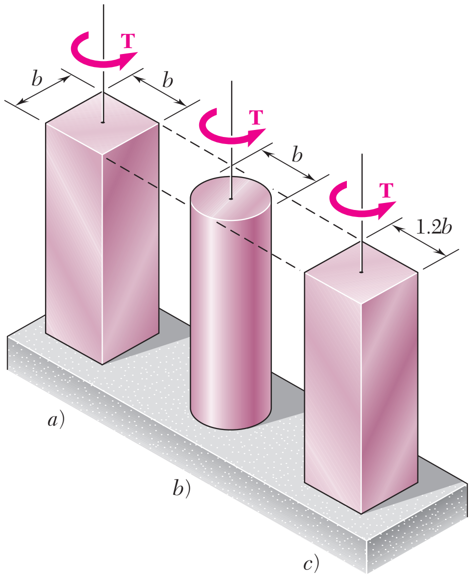


Figura P3.129, P3.130, P3.131 y P3.132

3.130 Cada una de las tres barras de aluminio que se muestran en la figura se tuercen a través de un ángulo de 2°. Si se sabe que $b = 30$ mm, $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa y $G = 27$ GPa, determine la longitud mínima permisible de cada barra.

3.131 Cada una de las tres barras de acero están sometidas a un par de torsión como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi y que $b = 1.4$ in., determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse en cada barra.

3.132 Cada una de las tres barras de aluminio que se muestran en la figura se tuercen a través de un ángulo de 1.25°. Si se sabe que $b = 1.5$ in., $\tau = 7.5$ ksi y $G = 3.7 \times 10^6$ psi, determine la longitud mínima permisible para cada barra.

3.133 Los ejes A y B están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B tiene una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los pares máximos T_A y T_B que pueden aplicarse con seguridad en A y B, respectivamente.

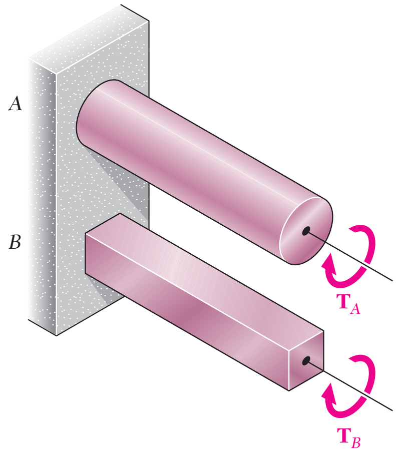


Figura *P3.133 y P3.134*

3.134 Los ejes A y B son del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los máximos valores de los ángulos ϕ_A y ϕ_B a través de los cuales pueden torcerse A y B, respectivamente.

3.135 Un par de torsión de 3 000 lb · in. se aplica a un ángulo de acero de 6 ft de longitud con una sección transversal de L4 × 4 × $\frac{3}{8}$. En el apéndice C aparece que el espesor de la sección es de $\frac{3}{8}$ in. y que su área es de 2.86 in.^{2} Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *a-a*, *b*) el ángulo de giro.

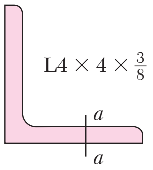


Figura P3.135

3.136 Un ángulo de acero de 3 m de longitud tiene una sección transversal de L203 × 152 × 12.7. En el apéndice C se encuentra que el espesor de la sección es de 12.7 mm con un área de 4 350 mm^2. Si se sabe que $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa y que $G = 77.2$ GPa, e ignorando el efecto de las concentraciones de esfuerzos, determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse, *b*) el ángulo de giro correspondiente.

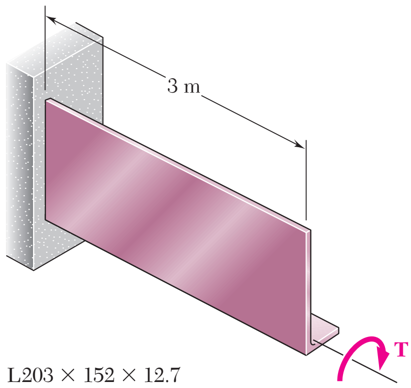


Figura P3.136

3.137 Un elemento de acero de 8 ft de largo con una sección transversal W8 × 31 es sometido a un par de torsión de 5 kip · in. En el apéndice C se encuentran las propiedades del acero laminado. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *a-a*, *b*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *b-b*, *c*) el ángulo de giro. (*Sugerencia*: Considere el alma y las aletas del perfil por separado y obtenga una relación entre los pares de torsión ejercidos sobre el alma y sobre una aleta, respectivamente, expresando que los ángulos de giro resultantes son iguales.)

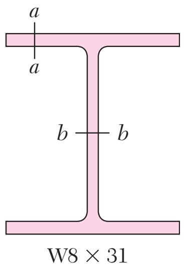


Figura P3.137

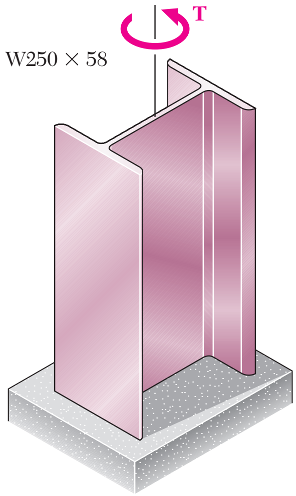


Figura P3.138

3.138 Un elemento de acero de 3 m de largo tiene una sección transversal W250 × 58. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa y que el esfuerzo cortante permisible es de 35 MPa, determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse, *b*) el ángulo de giro correspondiente. Consulte el apéndice C para obtener las dimensiones de la sección transversal y desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos. (Vea la sugerencia del problema 3.137.)

3.139 Un par de torsión $T = 5$ kN · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos, y determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

3.140 Un par de torsión $T = 750$ kN · m se aplica al eje hueco mostrado, que tiene un espesor de pared uniforme de 8 mm. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

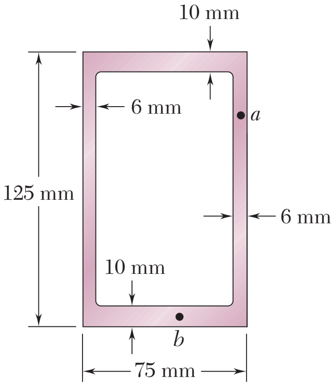


Figura *P3.139*

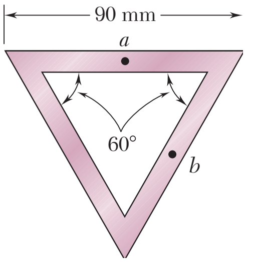


Figura *P3.140*

3.141 Un par de torsión de 750 N · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura y un espesor de pared uniforme de 6 mm. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y encuentre el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

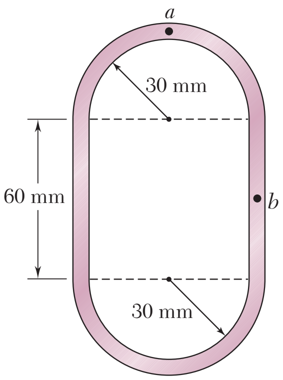


Figura P3.141

3.142 Un par de torsión de 90 N · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos *a* y *b*.

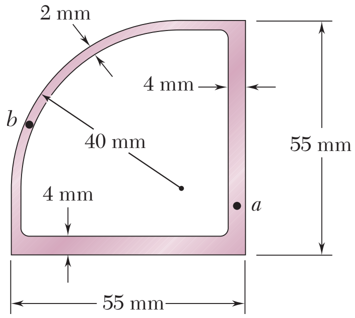


Figura P3.142

3.143 Un eje hueco de latón tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 12 ksi y se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine el par de torsión máximo que puede aplicarse al eje.

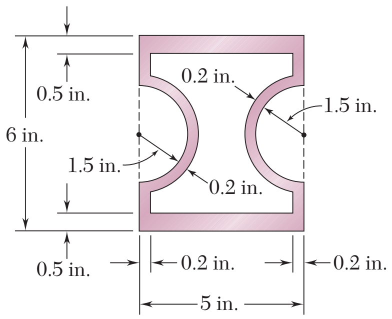


Figura P3.143

3.144 Un elemento hueco con una sección transversal como la que se muestra en la figura está elaborado con lámina metálica de 2 mm de espesor. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 3 MPa, determine el par par de torsión máximo que puede aplicarse al elemento.

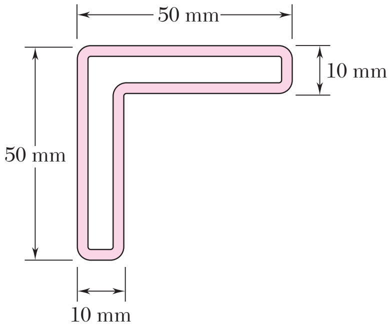


Figura P3.144

3.145 y *3.146* Un elemento hueco con una sección transversal como la que se muestra en la figura está elaborado con lámina metálica de 0.06 in. de grosor. Si se sabe que un par de torsión de 1 250 lb · in. se aplicará al elemento, determine la mínima dimensión d que puede utilizarse si el esfuerzo cortante no debe exceder 750 psi.

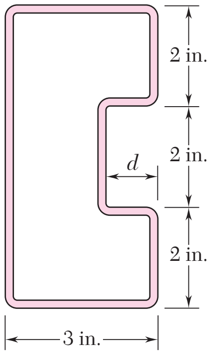


Figura P3.145

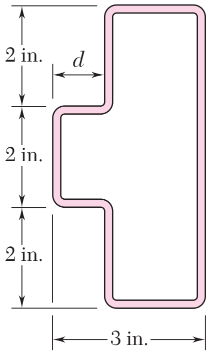
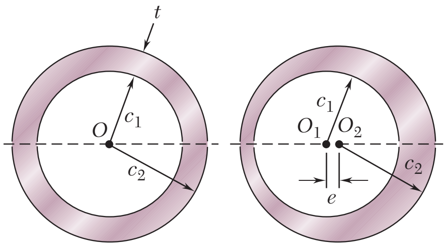


Figura *P3.146*

3.147 Un eje cilíndrico hueco se diseñó con la sección transversal que se muestra en la figura *1*) para someterlo a un par de torsión máximo T_0. Sin embargo, un defecto de fabricación produjo una pequeña excentricidad e entre las superficies cilíndricas interior y exterior del eje, como lo muestra la figura *2*). Exprese el par de torsión máximo T que puede aplicarse con seguridad al eje defectuoso en términos de T_0, e y t. *b*) Calcule la disminución porcentual en el par de torsión permisible para valores de la razón e/t iguales a 0.1, 0.5 y 0.9.



1) *2*)

Figura P3.147

3.148 Un tubo de enfriamiento que tiene una sección transversal como la que se muestra en la figura, es de una lámina de acero inoxidable de 3 mm de espesor. Los radios $c_1 = 150$ mm y $c_2 = 100$ mm se miden desde la línea central de la hoja de metal. Si se sabe que se aplica un par de torsión de magnitud $T = 3$ kN · m al tubo, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el tubo, *b*) la magnitud del par de torsión que soporta la coraza circular externa. Desprecie la dimensión de la pequeña apertura donde se conectan las corazas exterior e interior.

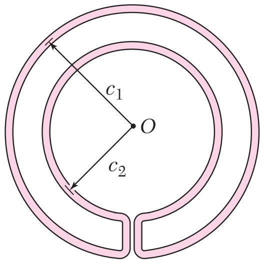
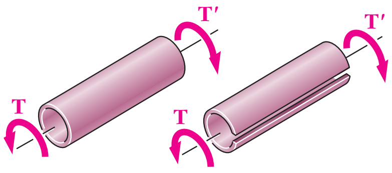


Figura P3.148

3.149 Se aplican pares de torsión iguales a tubos de pared delgada que tienen igual longitud L, mismo espesor t y radio c. Se ha ranurado longitudinalmente uno de los tubos, como se indica en la figura. Determine *a*) la relación τ_b/τ_a de los esfuerzos cortantes máximos en los tubos, *b*) la relación ϕ_b/ϕ_a de los ángulos de giro de los ejes.



a) *b*)

Figura *P3.149*

3.150 Un eje cilíndrico hueco de longitud L, radio medio c_m y espesor uniforme t se somete a pares de torsión de magnitud T. Considere, por una parte, los valores del esfuerzo cortante promedio τ_{prom} y del ángulo de giro ϕ obtenidos de las fórmulas de torsión elástica desarrolladas en las secciones 3.4 y 3.5 y, por otra, los valores correspondientes obtenidos de las fórmulas desarrolladas en la sección 3.13 para ejes huecos de pared delgada. *a*) Muestre que el error relativo introducido al utilizar las fórmulas para ejes de pared delgada en lugar de las fórmulas de torsión elástica es el mismo para τ_{prom} y para ϕ y que el error relativo es positivo y proporcional al cuadrado de la relación t/c_m. *b*) Compare el error porcentual que corresponde a valores de la razón t/c_m de 0.1, 0.2 y 0.4.

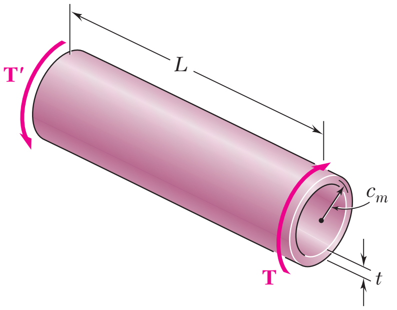


Figura P3.150

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Este capítulo se dedicó al análisis y diseño de *ejes* sometidos a *pares de torsión*, o momentos torsores. Excepto por las últimas dos secciones del capítulo el estudio se limitó a *ejes circulares*.

Deformaciones en ejes circulares

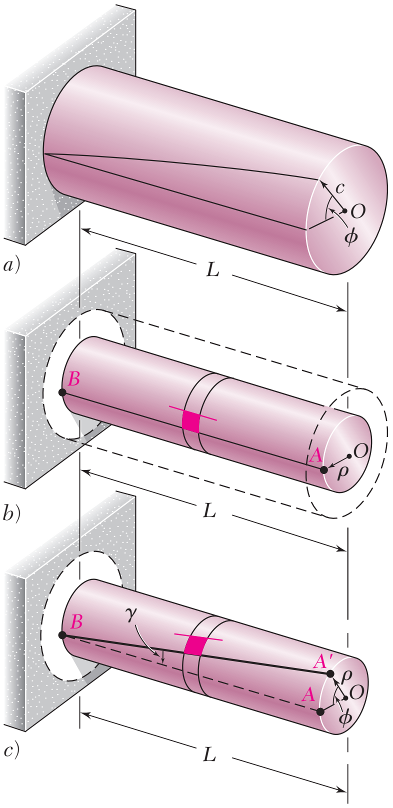


Figura 3.14

En un estudio preliminar [véase sección 3.2] se señaló que la distribución de esfuerzos en la sección transversal de un eje circular es *estáticamente indeterminada*. La determinación de estos esfuerzos, por lo tanto, requiere de un análisis previo de las *deformaciones* que ocurren en el eje [véase sección 3.3]. Habiéndose demostrado que en un eje circular sometido a torsión, *toda sección transversal permanece plana y sin distorsión*, se dedujo la siguiente expresión para la *deformación cortante* en un elemento pequeño con lados paralelos y perpendiculares al eje de la flecha y a una distancia ρ del eje:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \qquad (3.2)$$

donde ϕ es el ángulo de giro para una longitud L del eje (figura 3.14). La ecuación (3.2) muestra que la *deformación a cortante en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*. Se deduce que la deformación es máxima en la superficie del eje, donde ρ es igual al radio c del eje. Se escribió

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \qquad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \qquad (3.3, 4)$$

Esfuerzos cortantes en el rango elástico

Considerando los *esfuerzos de corte* en un eje circular dentro del rango elástico [véase sección 3.4] y recordando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación a cortante, $\tau = G\gamma$, se dedujo la relación

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\text{máx}} \qquad (3.6)$$

que muestra que dentro del rango elástico, el *esfuerzo cortante τ en una flecha circular también varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*. Igualando la suma de momentos de las fuerzas elementales ejercidas en cualquier sección del eje a la magnitud T del par de torsión aplicado al eje, se dedujeron las *fórmulas para la torsión elástica*

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \qquad \tau = \frac{T\rho}{J} \qquad (3.9, 10)$$

donde c es el radio de la sección transversal y J su momento centroidal polar de inercia. Se advirtió que $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ para un eje sólido y $J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4)$ para un eje hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2.

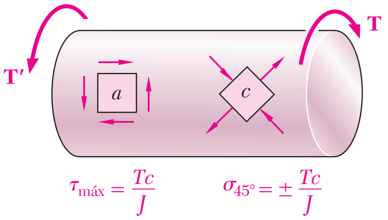

T′
T
a
c
$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J}$
$\sigma_{45°} = \pm\frac{Tc}{J}$

Figura 3.20

Se observó que mientras el elemento *a* de la figura 3.20 está en cortante puro, el elemento *c* en la misma figura está sujeto a esfuerzos normales de la misma magnitud, Tc/J, siendo dos de los esfuerzos normales a tensión y dos a compresión. Esto explica por qué en un ensayo de torsión los materiales dúctiles, que generalmente fallan por corte, se romperán a lo largo de un plano perpendicular al eje del espécimen, mientras que los materiales frágiles, que son más débiles a tensión que a cortante, se rompen a lo largo de superficies que forman un ángulo de 45° con ese eje.

Ángulo de giro

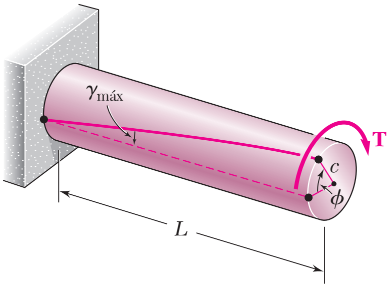


Figura 3.22

En la sección 3.5 se encontró que dentro del rango elástico, el ángulo de giro ϕ de un eje circular es proporcional al par de torsión T aplicado a él (figura 3.22). Expresando ϕ en *radianes*, se escribe

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{3.16}$$

donde L = longitud del eje
J = momento polar de inercia de la sección transversal
G = módulo de rigidez del material

Si el eje se somete a pares de torsión en lugares distintos a sus extremos o consta de varias partes de distintas secciones transversales y posiblemente de diferentes materiales, el ángulo de giro del eje debe expresarse como la *suma algebraica* de los ángulos de giro de sus partes componentes (véase problema muestra 3.3):

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.17}$$

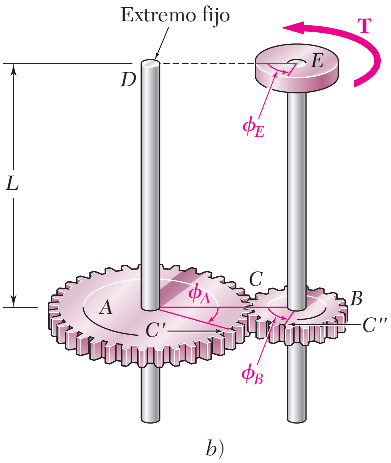


Figura 3.26*b*

Se observó que cuando ambos extremos de un eje *BE* giran (figura 3.26*b*), el ángulo de giro del eje es igual a la *diferencia* entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E de sus extremos. También se señaló que cuando dos ejes, *AD* y *BE*, se conectan por engranes *A* y *B*, los pares aplicados, respectivamente, por el engrane *A* sobre el eje *AD* y por el engrane *B* sobre el eje *BE* son *directamente proporcionales* a los radios r_A y r_B de los dos engranes, ya que las fuerzas aplicadas sobre ellos por los dientes en *C* son iguales y opuestas. Por otro lado, los ángulos ϕ_A y ϕ_B alrededor de los cuales giran los dos ejes son *inversamente proporcionales* a r_A y r_B, ya que los arcos CC' y CC'', descritos por los dientes, son iguales [véase ejemplo 3.04 y problema modelo 3.4].

Ejes estáticamente indeterminados

Si las reacciones en los soportes de un eje o los pares internos no pueden determinarse usando sólo la estática, se dice que el eje es *estáticamente indeterminado* [véase sección 3.6]. Las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre deben complementarse con las relaciones que incluyan las deformaciones del eje que se obtuvieron, a su vez, de la geometría del problema [véase ejemplo 3.05 y problema modelo 3.5].

Ejes de transmisión

En la sección 3.7 se explicó el *diseño de ejes de transmisión*. Primero se observó que la potencia P transmitida por un eje es

$$P = 2\pi f T \tag{3.20}$$

donde T es el torque ejercido en cada extremo del eje y f es la *frecuencia* o velocidad de rotación del eje. La unidad de frecuencia es la revolución por segundo (s^{-1}) o *hertz* (Hz). Si se emplean unidades SI, T se expresa en newtons-metro ($\mathrm{N \cdot m}$) y P en *watts* (W). Si se emplean unidades acostumbradas en Estados Unidos, T se expresa en $\mathrm{lb \cdot ft}$ o $\mathrm{lb \cdot in.}$, y P en $\mathrm{ft \cdot lb/s}$ o $\mathrm{in. \cdot lb/s}$; la potencia puede convertirse entonces a *caballos de fuerza* (hp) a través del uso de la relación

$$1\ \mathrm{hp} = 550\ \mathrm{ft \cdot lb/s} = 6\,600\ \mathrm{in. \cdot lb/s}$$

Para diseñar un eje para transmitir una potencia dada P a una frecuencia f, primero debe obtenerse T de la ecuación (3.20). Llevando este valor y el valor máximo permisible de τ para el material utilizado a la fórmula elástica (3.9), se obtendrá el valor correspondiente del parámetro J/c, del que puede calcularse el diámetro requerido del eje [ejemplos 3.06 y 3.07].

Concentraciones de esfuerzos

En la sección 3.8 se analizan las *concentraciones de esfuerzos* en ejes circulares. Se vio que la concentración de esfuerzos resultante de un cambio abrupto en el diámetro de un eje puede reducirse gracias al uso de un *filete* (figura 3.31). El valor del esfuerzo cortante máximo en el filete es de

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

donde el esfuerzo Tc/J se calcula para el eje de menor diámetro, y donde K es un factor de concentración de esfuerzos. Los valores de K se graficaron en la figura 3.32 en la página 167 contra la razón r/d, donde r es el radio del filete, para varios valores de D/d.

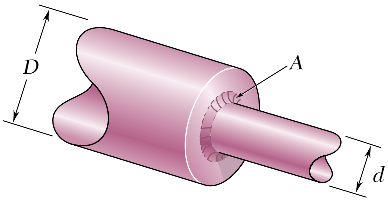


Figura 3.31

Deformaciones plásticas

Las secciones 3.9 a 3.11 tratan sobre el análisis de las *deformaciones plásticas* y de los *esfuerzos residuales* en ejes circulares. Primero se recordó que aun cuando no se aplique la ley de Hooke, la distribución de *deformaciones* en un eje circular es siempre lineal [véase sección 3.9]. Si el diagrama esfuerzo-deformación a cortante para el material se conoce, entonces es posible graficar el esfuerzo cortante τ contra la distancia ρ desde el eje de la flecha para cualquier valor dado de $\tau_{\text{máx}}$ (figura 3.35).

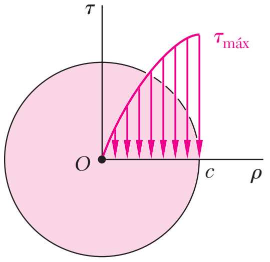


Figura 3.35

Sumando las contribuciones al par de torsión de elementos anulares de radio ρ y espesor $d\rho$, se expresó el par T como

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^2\tau\, d\rho \tag{3.26}$$

donde τ es la función de ρ graficada en la figura 3.35.

Módulo de ruptura

Un valor importante del par de torsión es el par último T_U que causa la falla del eje. Este valor puede determinarse, de manera experimental o mediante los cálculos indicados antes, igualando $\tau_{\text{máx}}$ al esfuerzo cortante último del material τ_U. Teniendo T_U y suponiendo una distribución lineal de esfuerzos (figura 3.36) se determina el esfuerzo ficticio correspondiente $R_T = T_U c/J$, conocido como el *módulo de ruptura a torsión* del material dado.

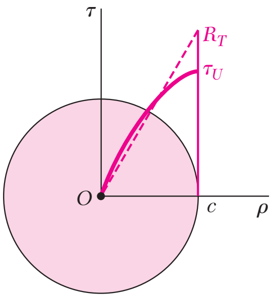


Figura 3.36

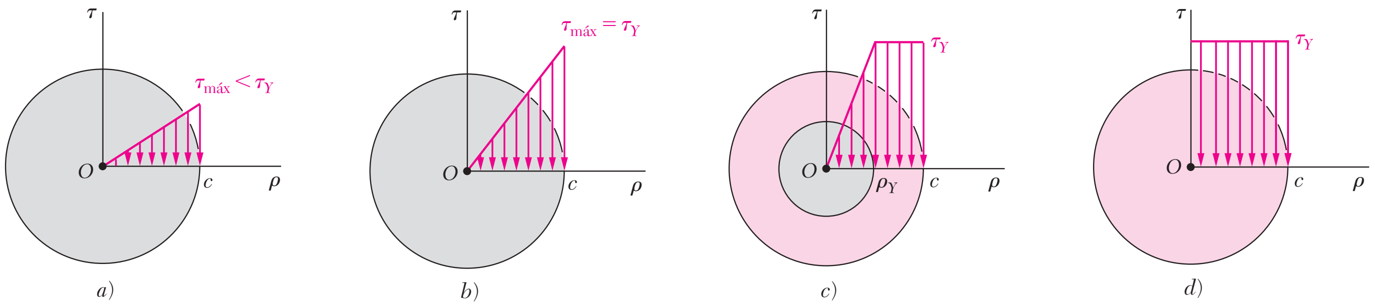
Eje sólido de material elastoplástico

Considerando el caso idealizado de un *eje sólido circular* hecho de un *material elastoplástico* [véase sección 3.10], primero se señaló que, mientras $\tau_{\text{máx}}$ no exceda la resistencia de cedencia τ_Y del material, la distribución de esfuerzos a través de una sección del eje es lineal (figura 3.38*a*). El par de torsión T_Y correspondiente a $\tau_{\text{máx}} = \tau_Y$ (figura 3.38*b*) se conoce como el *máximo par de torsión elástico.* Para un eje circular sólido con radio c, se tiene

$$T_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \qquad (3.29)$$

Al aumentar el par, se desarrolla una región plástica en el eje alrededor de un núcleo elástico de radio ρ_Y. El par T que corresponde a un valor dado de ρ_Y es

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \qquad (3.32)$$



a) *b*) *c*) *d*)

Figura 3.38

Se observó que cuando ρ_Y se aproxima a cero, el par se aproxima a un valor limitante T_p, llamado *par de torsión plástico* del eje considerado:

$$T_p = \frac{4}{3} T_Y \qquad (3.33)$$

Graficando el par T contra el ángulo de giro ϕ de un eje circular sólido (figura 3.39), se obtuvo el segmento de recta $0Y$ definido por la ecuación (3.16), seguido por una curva que se aproxima a la línea recta $T = T_p$, definida por la ecuación

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \qquad (3.37)$$

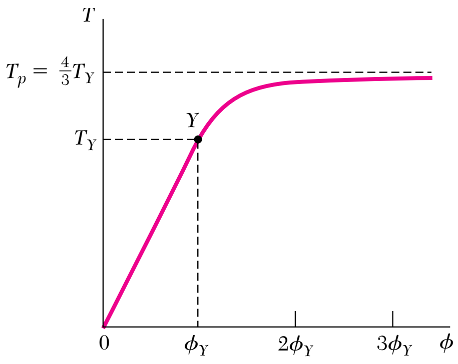


Figura 3.39

Deformación permanente. Esfuerzos residuales

Cargar un eje circular más allá del inicio de la cedencia y descargarlo [véase sección 3.11] resulta en una *deformación permanente* caracterizada por el ángulo de giro $\phi_p = \phi - \phi'$, donde ϕ corresponde a la fase de carga descrita en el párrafo previo, y ϕ' a la fase de descarga representada por una línea recta en la figura 3.42. También existirán *esfuerzos residuales* en el eje, que se determinan sumando los esfuerzos máximos alcanzados durante la fase de carga y los esfuerzos inversos correspondientes a la fase de descarga [véase ejemplo 3.09].

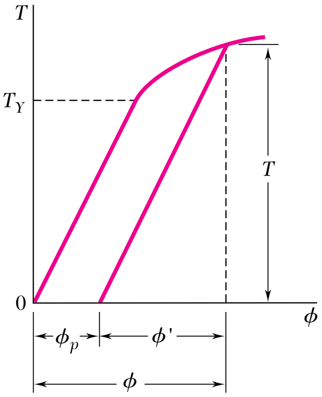


Figura 3.42

Torsión en elementos no circulares

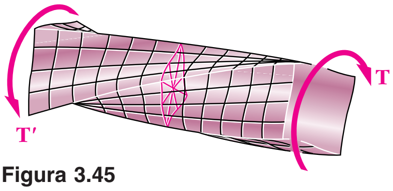


Figura 3.45

Las últimas dos secciones del capítulo trataron de la torsión de *elementos no circulares*. Primero se recordó que la deducción de las fórmulas para la distribución de deformación y de esfuerzo en ejes circulares se basó en que, debido a la simetría axial de estos elementos, las secciones circulares permanecen planas y sin distorsión. Puesto que esta propiedad no se mantiene para elementos no circulares, como la barra cuadrada de la figura 3.45, ninguna de las fórmulas deducidas anteriormente puede utilizarse para su análisis [véase sección 3.12].

Barras de sección transversal rectangular

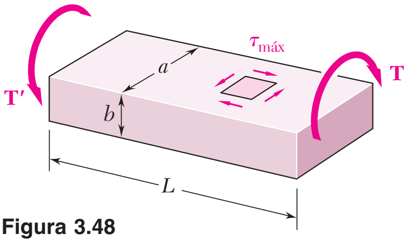


Figura 3.48

Se indicó en la sección 3.12 que en el caso de barras rectas con *sección transversal rectangular uniforme* (figura 3.48), el esfuerzo cortante máximo ocurre a lo largo de la línea central de la cara *más ancha* de la barra. Se dieron sin demostración las fórmulas para el esfuerzo cortante máximo y para el ángulo de giro. También se analizó la *analogía de la membrana* para visualizar la distribución de esfuerzos en un elemento no circular.

Ejes huecos de pared delgada

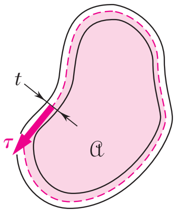


Figura 3.57

A continuación se estudió la distribución de esfuerzos en *ejes huecos no circulares de pared delgada* [véase sección 3.13]. Se vio que el esfuerzo cortante es paralelo a la superficie de la pared y que varía tanto a través de la pared como a lo largo de la sección transversal de la pared. Denotando con τ el valor promedio del esfuerzo cortante calculado a través de la pared en un punto dado de la sección transversal, y con t el espesor de la pared en ese punto (figura 3.57), se mostró que el producto $q = \tau t$, llamado *flujo de corte*, es constante a lo largo de la sección transversal.

Además, denotando por T el par de torsión aplicado al eje hueco y por $\mathcal{A}$ el área bordeada por la línea central de la sección transversal de la pared, se expresó de la siguiente manera el esfuerzo cortante promedio τ en cualquier punto dado de la sección transversal:

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \tag{3.53}$$

PROBLEMAS DE REPASO

3.151 Si se sabe que un agujero de 0.40 in. de diámetro ha sido perforado en los ejes *AB*, *BC* y *CD*, determine *a*) el eje en el que ocurre el máximo esfuerzo cortante, *b*) la magnitud de tal esfuerzo.

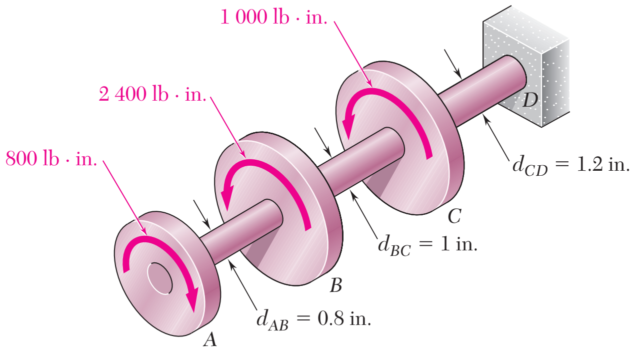


Figura P3.151

3.152 Un tubo de acero de 12 in. de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de $\frac{1}{4}$ in. de grosor, la cual se suelda a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 45° con el plano perpendicular al eje del tubo. Si se sabe que el esfuerzo de tensión máximo permisible en la soldadura es de 12 ksi, determine el mayor par de torsión que puede aplicarse al tubo.

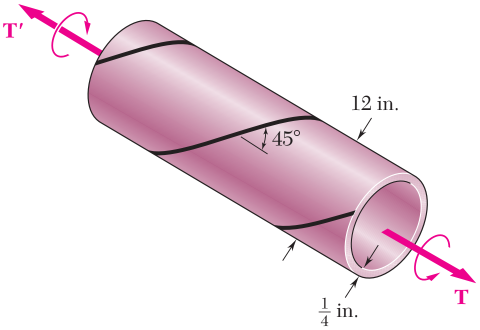


Figura *P3.152*

3.153 Para el eje de aluminio mostrado (G = 27 GPa), determine *a*) el par de torsión **T** que causa un ángulo de giro de 4°, *b*) el ángulo de giro causado por el mismo par par de torsión **T** en un eje cilíndrico sólido con la misma longitud y área de sección transversal.

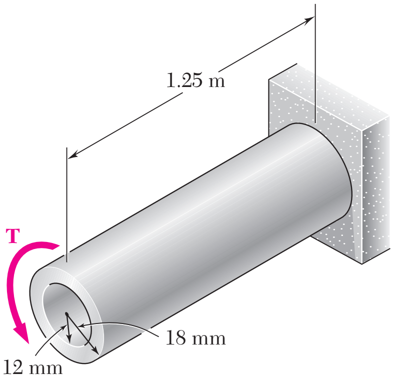


Figura P3.153

3.154 La varilla cilíndrica sólida *BC* está unida a la palanca rígida *AB* y al soporte fijo en *C*. La fuerza vertical **P** aplicada en *A* causa un pequeño desplazamiento en el punto *A*. Demuestre que el esfuerzo cortante máximo correspondiente en la varilla es

$$\tau = \frac{Gd}{2La}\Delta$$

donde *d* es el diámetro de la varilla y *G* su módulo de rigidez.

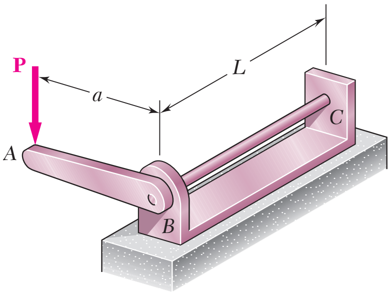


Figura P3.154

3.155 Dos ejes sólidos de acero ($G = 77.2$ GPa) están conectados a un disco de acoplamiento B y a soportes fijos en A y C. Para las cargas que se muestran, determine *a*) la reacción en cada soporte, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el eje AB, *c*) el esfuerzo cortante máximo en el eje BC.

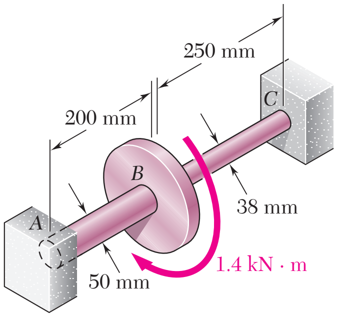


Figura *P3.155*

3.156 El eje compuesto que se muestra en la figura se tuerce al aplicarle un par par de torsión **T** en el extremo A. Si se sabe que el esfuerzo cortante máximo en la camisa de acero es de 150 MPa, determine el esfuerzo cortante máximo correspondiente en el núcleo de aluminio. Utilice $G = 77.2$ GPa para el acero y $G = 27$ GPa para el aluminio.

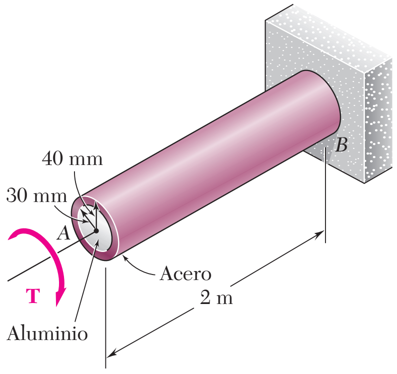


Figura P3.156

3.157 En el diseño del sistema de engranes y ejes que se muestra en la figura, los diámetros de los ejes son $d_{AB} = 2$ in. y $d_{CD} = 1.5$ in. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el ángulo en el cual gira el extremo D del eje CD.

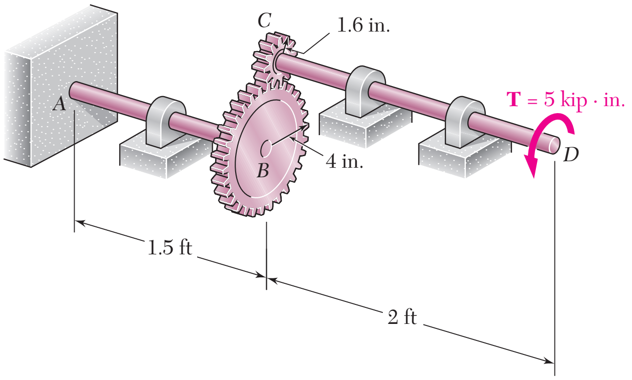


Figura *P3.157*

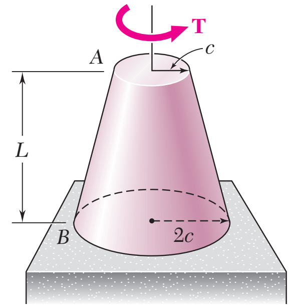


Figura P3.158

3.158 Un par de torsión **T** se aplica como se muestra en la figura a un eje sólido ahusado AB. Muestre, por integración, que el ángulo de giro de A es

$$\phi = \frac{7TL}{12\pi G c^4}$$

3.159 Un eje de acero de 1.5 in. de diámetro con una longitud de 4 ft se utilizará para transmitir 60 hp entre un motor y una bomba. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la mínima velocidad de rotación a la que el esfuerzo cortante no excederá 8 500 psi y a la que el ángulo de giro no excederá 2°.

3.160 Dos varillas sólidas de latón AB y CD se sueldan a un manguito de latón EF. Determine la relación d_2/d_1 para la cual ocurre el mismo esfuerzo cortante máximo en las varillas y en el manguito.

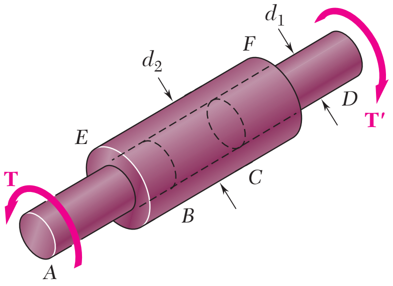


Figura P3.160

3.161 Uno de los dos ejes huecos de transmisión de un trasatlántico mide 75 m de largo y tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa y que el eje transmite 44 MW a su hélice cuando gira a 144 rpm, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el eje y *b*) el ángulo de giro correspondiente del eje.

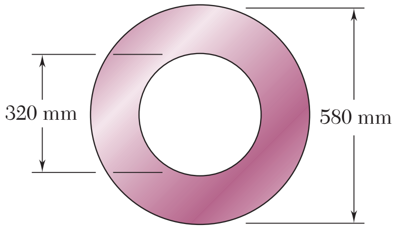


Figura *P3.161*

3.162 Dos ejes son del mismo material. La sección transversal del eje *A* es cuadrada con un lado *b* y la del eje *B* es un círculo con diámetro *b*. Si se sabe que los ejes están sometidos al mismo par de torsión, determine la relación τ_A/τ_B de los esfuerzos cortantes máximos que ocurren en los ejes.

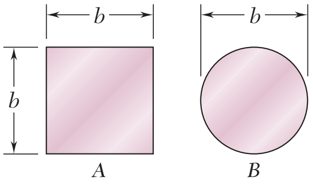


Figura P3.162

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora. Escriba cada programa para que pueda utilizarse con unidades del SI o con las unidades del sistema inglés.

3.C1 El eje *AB* consta de *n* elementos cilíndricos homogéneos, los cuales pueden ser sólidos o huecos. Su extremo *A* está fijo, mientras que su extremo *B* es libre y está sometido a la carga que se muestra en la figura. La longitud del elemento *i* se denota por L_i, su diámetro exterior mediante OD_i, su diámetro interior con ID_i, su módulo de rigidez por G_i, y el par de torsión aplicado a su extremo derecho por $\mathbf{T}_i$, siendo su magnitud T_i supuesta positiva si $\mathbf{T}_i$ se observa antihoraria desde el extremo *B* y negativa si es de otro modo. (Advierta que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido.) *a*) Escriba un programa para computadora que pueda utilizarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en cada elemento, el ángulo de giro en cada elemento y el ángulo de giro del eje completo. *b*) Use este programa para resolver los problemas 3.35 y 3.38.

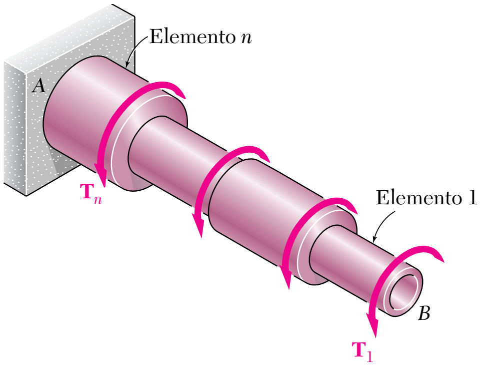


Figura P3.C1

3.C2 El ensamble mostrado en la figura consta de n ejes cilíndricos, sólidos o huecos, conectados por engranes y apoyados en ménsulas (que no se muestran). El extremo A_1 del primer eje es libre y está sometido a un par de torsión $\mathbf{T}_0$, mientras que el extremo B_n del último eje es fijo. La longitud del eje A_iB_i se denota con L_i, su diámetro exterior mediante OD_i, su diámetro interior por ID_i y su módulo de rigidez por G_i. (Advierta que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido.) El radio del engrane A_i se denota por a_i, y el radio del engrane B_i mediante b_i. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda utilizarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en cada eje, el ángulo de giro de cada eje, y el ángulo que gira el extremo A_i. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 3.40 y 3.44.

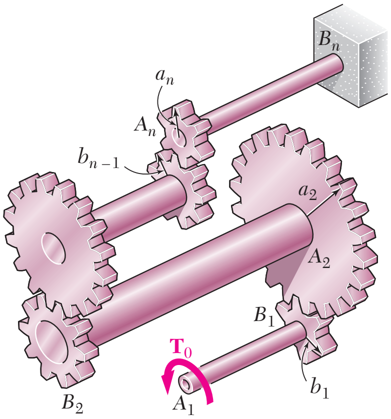


Figura P3.C2

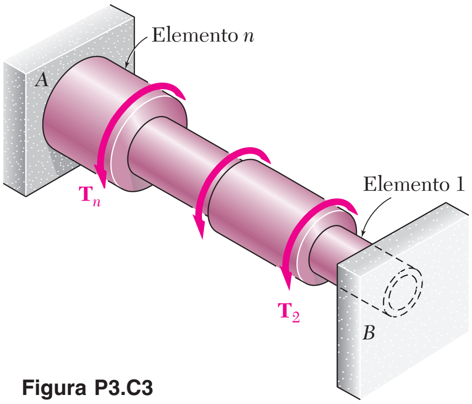


Figura P3.C3

3.C3 El eje AB consta de n elementos cilíndricos homogéneos, los cuales pueden ser sólidos o huecos. Sus dos extremos están fijos y se sujeta a la carga que se muestra en la figura. La longitud del elemento i se denota con L_i, su diámetro exterior con OD_i, su diámetro interior por ID_i, su módulo de rigidez mediante G_i y el par de torsión aplicado a su extremo derecho por $\mathbf{T}_i$, cuya magnitud T_i se supone positiva si se observa que $\mathbf{T}_i$ es antihoraria desde el extremo B y negativa en el caso contrario. Advierta que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido y también que $T_1 = 0$. Escriba un programa para computadora que pueda utilizarse para determinar las reacciones en A y en B, el esfuerzo cortante máximo en cada elemento y el ángulo de giro de cada elemento. Utilice este programa *a*) para resolver el problema 3.155, *b*) para determinar el esfuerzo cortante máximo en el eje del ejemplo 3.05.

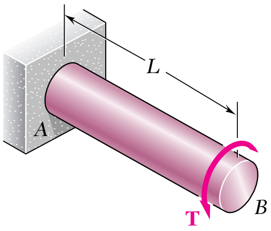


Figura P3.C4

3.C4 El eje cilíndrico sólido y homogéneo AB tiene longitud L, diámetro d, módulo de rigidez G y resistencia a la fluencia τ_Y. Este eje se somete a un par de torsión $\mathbf{T}$ que se incrementa gradualmente desde cero hasta que el ángulo de giro del eje alcanza un valor máximo ϕ_m y entonces se reduce a cero. *a*) Escriba un programa de computadora que, para cada uno de 16 valores de ϕ_m espaciados uniformemente en un rango que vaya desde 0 hasta un valor 3 veces mayor que el ángulo de giro al inicio de la fluencia, pueda utilizarse para determinar el máximo valor T_m del par de torsión, el radio del núcleo elástico, el esfuerzo cortante máximo, la torsión permanente y el esfuerzo cortante residual tanto en la superficie del eje como en la interfaz del núcleo elástico y la región plástica. *b*) Utilice el programa para obtener respuestas aproximadas a los problemas 3.114, 3.115 y 3.118.

3.C5 La expresión exacta para el ángulo de giro de un eje sólido ahusado *AB* cuando se le aplica un par de torsión **T**, como se muestra en la figura, está dada en el problema 3.61. Deduzca una expresión aproximada para el ángulo de giro reemplazando el eje ahusado por *n* ejes cilíndricos de igual longitud y radio $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(c/n)$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Utilizando para *T*, *L*, *G* y *c* valores de su elección, determine el porcentaje de error en la expresión aproximada cuando *a*) $n = 4$, *b*) $n = 8$, *c*) $n = 20$, *d*) $n = 100$.

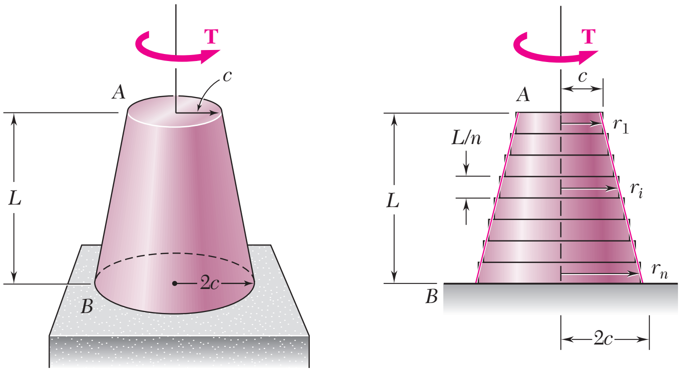


Figura P3.C5

3.C6 Un par de torsión **T** se aplica, como se indica en la figura, al eje largo, hueco y ahusado *AB* con espesor uniforme *t*. La expresión exacta para el ángulo de giro del eje puede obtenerse de la expresión dada en el problema 3.156. Deduzca una expresión aproximada para el ángulo de giro reemplazando el eje ahusado por *n* anillos cilíndricos de igual longitud y radio $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(c/n)$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Utilizando para *T*, *L*, *G*, *c* y *t* valores de su elección, determine el porcentaje de error en la expresión aproximada cuando *a*) $n = 4$, *b*) $n = 8$, *c*) $n = 20$, *d*) $n = 100$.

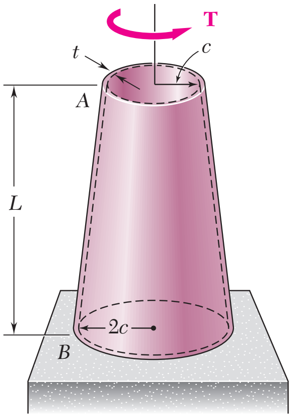


Figura P3.C6

CAPÍTULO

4

Flexión pura

El atleta que se muestra sostiene la barra con las manos colocadas a igual distancia de los discos. De esto resulta una flexión pura en la parte central de la barra. Los esfuerzos normales y la curvatura son resultado de dicha flexión pura, la cual será estudiada en este capítulo.

4.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se estudió cómo determinar los esfuerzos en elementos prismáticos sometidos a cargas axiales o a pares de torsión. En este capítulo y en los dos siguientes se analizarán los esfuerzos y las deformaciones en elementos prismáticos sujetos a *flexión*. La flexión es un concepto muy importante, ya que se utiliza en el diseño de muchos componentes estructurales y de máquinas, tales como vigas y trabes.

Este capítulo se dedicará al análisis de elementos prismáticos sometidos a pares iguales y opuestos **M** y **M′** que actúan en el mismo plano longitudinal. Se dice que tales elementos están sujetos a *flexión pura*. En la mayor parte del capítulo, se supondrá que los elementos poseen un plano de simetría y que los pares **M** y **M′** actúan en dicho plano (figura 4.1).

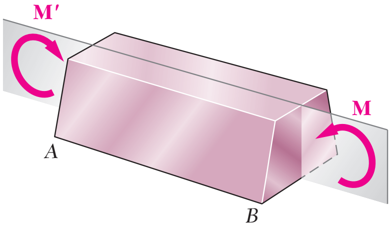


Figura 4.1

Un ejemplo de flexión pura es, por ejemplo, lo que le ocurre a una barra de una pesa gimnástica como las que sostienen los levantadores de pesas encima de su cabeza, como se muestra en la página opuesta. La barra tiene pesos iguales a distancias iguales de las manos del levantador de pesas. Debido a la simetría del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 4.2*a*), las reacciones en las manos deben ser iguales y opuestas a los pesos. Por lo tanto, en lo que se refiere a la porción central *CD* de la barra, los pesos y las reacciones pueden reemplazarse por dos pares iguales y opuestos de 960 lb · in. (figura 4.2*b*), mostrando que la porción central de la barra se encuentra en flexión pura. Al realizar un análisis similar al eje de un pequeño remolque (figura 4.3) se vería que, entre los puntos donde está unido al remolque, el eje está en flexión pura.

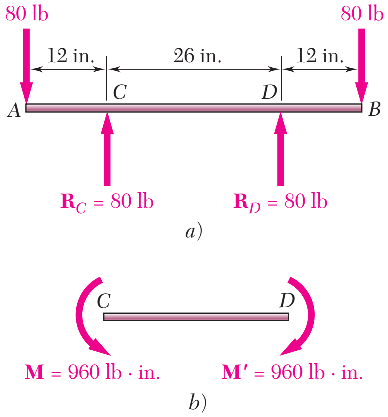


Figura 4.2

A pesar de lo interesantes que pueden ser las aplicaciones directas de la flexión pura, el dedicar un capítulo entero a su estudio no estaría justificado si no fuera por el hecho de que los resultados obtenidos serán utilizados en el análisis de otros tipos de carga, como las *cargas axiales excéntricas* y las *cargas transversales*.

Figura 4.3 Para el carrito deportivo que se muestra en la fotografía, la porción central del eje trasero se encuentra en flexión pura.

La figura 4.4 muestra una prensa de barra de acero de 12 in. utilizada para ejercer fuerzas de 150 lb sobre dos piezas de madera mientras se unen con adhesivo. La figura 4.5*a* presenta las fuerzas iguales y opuestas ejercidas por la madera sobre la prensa. Estas fuerzas producen una *carga excéntrica* de la porción recta de la prensa. En la figura 4.5*b* se efectuó un corte *CC'* a través de la prensa y se ha dibujado un diagrama de cuerpo libre de la porción superior de la prensa, del que se concluye que las fuerzas internas en la sección son equivalentes a una fuerza axial de tensión **P** de 150 lb y a un par **M** de 750 lb · in. De esta manera pueden combinarse los conocimientos adquiridos acerca de los esfuerzos bajo una carga *centrada* y los resultados del análisis subsiguiente de los esfuerzos en flexión pura para obtener la distribución de esfuerzos bajo una carga *excéntrica*. Esto se discutirá con mayor profundidad en la sección 4.12.

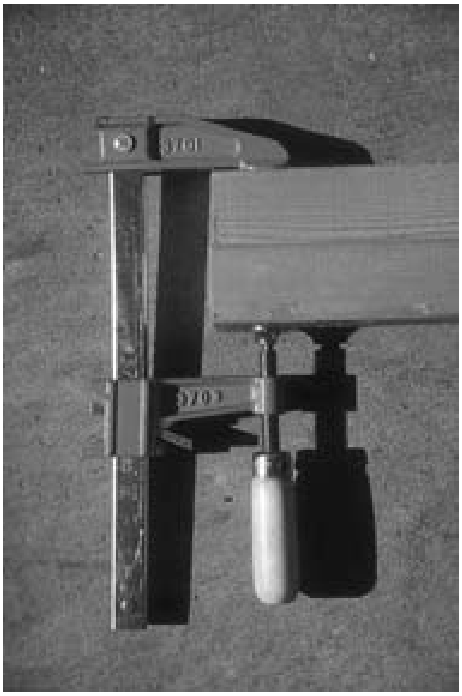


Figura 4.4

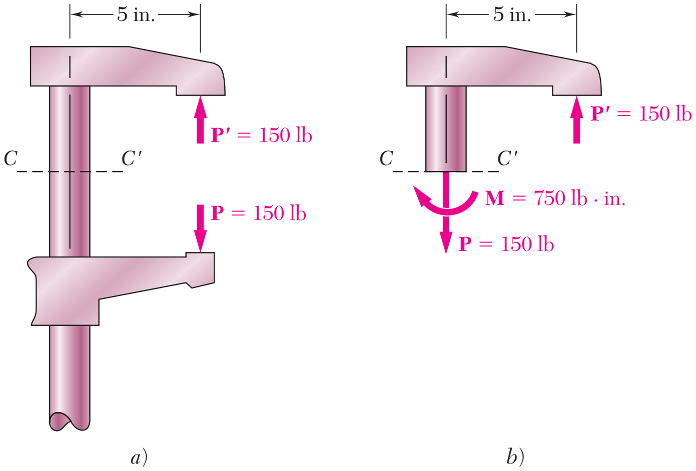


Figura 4.5

El estudio de la flexión pura también jugará un papel esencial en el estudio de las vigas, es decir, el estudio de los elementos prismáticos sometidos a varios tipos de *cargas transversales*. Considere, por ejemplo, una viga en voladizo *AB* que soporta una carga concentrada **P** en su extremo libre (figura 4.6*a*). Si se realiza un corte en *C* a una distancia *x* de *A*, se observa del diagrama de cuerpo libre de *AC* (figura 4.6*b*) que las fuerzas internas en el corte consisten en una fuerza **P'** igual y opuesta a **P** y de un momento **M** con magnitud $M = Px$. La distribución de esfuerzos normales en la sección puede obtenerse del par **M** como si la viga estuviera en flexión pura. Por otra parte, los esfuerzos cortantes en la sección dependen de la fuerza **P'** y se aprenderá en el capítulo 6 cómo determinar su distribución por encima de una sección transversal dada.

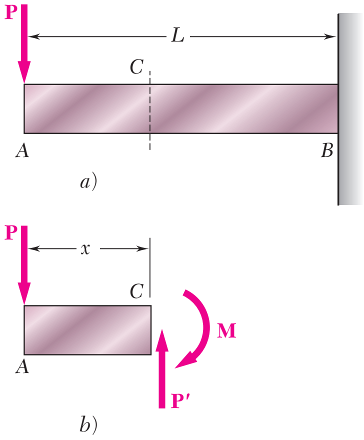


Figura 4.6

La primera parte del capítulo se dedicará al análisis de los esfuerzos y deformaciones causados por la flexión pura en un elemento homogéneo que posea un plano de simetría y que esté elaborado de un material que siga la ley de Hooke. En un análisis preliminar de esfuerzos debidos a flexión (sección 4.2) se utilizarán métodos de estática para deducir tres ecuaciones fundamentales que deben satisfacerse por los esfuerzos normales en cualquier sección transversal dada del elemento. En la sección 4.3 se demostrará que las *secciones transversales permanecerán planas* en un elemento sometido a flexión pura, mientras que en la sección 4.4 se desarrollarán fórmulas que pueden utilizarse para determinar los *esfuerzos normales*, así como el *radio de curvatura* para dicho elemento dentro del rango elástico.

En la sección 4.6 se estudiarán los esfuerzos y deformaciones en *elementos compuestos* hechos de más de un material, como vigas de concreto reforzado, que combinan las mejores características del acero y del concreto y se utilizan con mucha frecuencia en la construcción de edificios y puentes. Se aprenderá a dibujar una *sección transformada* que represente la sección de un elemento hecha de un material homogéneo que sufra las mismas deformaciones que el elemento compuesto bajo la misma carga. La sección transformada se utilizará para encontrar los esfuerzos y las deformaciones en el elemento compuesto original. La sección 4.7 se dedicará a la determinación de *concentraciones de esfuerzos* que se producen en lugares donde la sección transversal del elemento sufre un cambio repentino.

En la siguiente parte del capítulo se estudiarán las *deformaciones plásticas* en flexión, es decir, la deformación de elementos que se hacen de un material que no sigue la ley de Hooke y que están sometidos a flexión. Después de un análisis general de las deformaciones de dichos elementos (sección 4.8) se investigarán los esfuerzos y deformaciones en elementos hechos de un *material elastoplástico* (sección 4.9). Comenzando con el *momento elástico máximo* M_Y, que corresponde al inicio de la fluencia, se considerarán los efectos de momentos cada vez mayores hasta que se alcance el *momento plástico* M_p, instante en el que el elemento ha cedido por completo. También se aprenderá a obtener las *deformaciones permanentes* y los *esfuerzos residuales* que resultan de tales cargas (sección 4.11). Deberá advertirse que durante el último medio siglo la propiedad elastoplástica del acero se ha utilizado ampliamente para producir mejores diseños tanto en seguridad como en su costo.

En la sección 4.12 se aprenderá a analizar una *carga axial excéntrica* sobre un plano de simetría, como la mostrada en la figura 4.4, superponiendo los esfuerzos debidos a la flexión pura y los esfuerzos debidos a una carga axial centrada.

El tema de la flexión de elementos prismáticos concluye examinando la *flexión asimétrica* (sección 4.13) y el caso general de *cargas axiales excéntricas* (sección 4.14). La última sección del capítulo se dedicará al análisis de esfuerzos en *elementos curvos* (sección 4.15).

4.2 ELEMENTO SIMÉTRICO SOMETIDO A FLEXIÓN PURA

Considere un elemento prismático *AB* con un plano de simetría y sometido a pares iguales y opuestos **M** y **M**′ que actúan en dicho plano (figura 4.7*a*). Se observa que si se efectúa un corte a través del elemento *AB* en algún punto arbitrario *C*, las condiciones de equilibrio de la porción *AC* del elemento requieren que las fuerzas internas en la sección sean equivalentes al par **M** (figura 4.7*b*). Así, las fuerzas internas en cualquier sección transversal de un elemento simétrico en flexión pura son equivalentes a un par. El momento *M* de dicho par se conoce como el *momento flector* en la sección. Siguiendo la convención acostumbrada, un signo positivo se asignará a *M* cuando el elemento se flexiona como se indica en la figura 4.7*a*, esto es, cuando la concavidad de la viga mira hacia arriba, y un signo negativo en caso contrario.

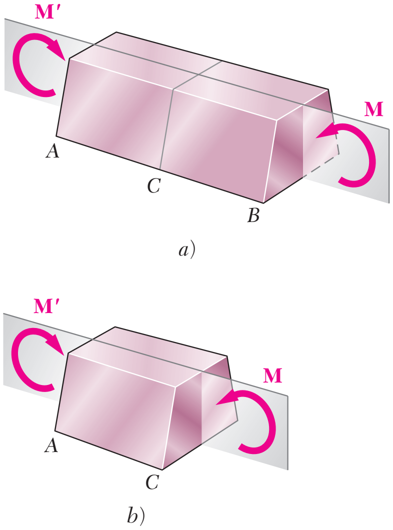


Figura 4.7

Denotando por σ_x el esfuerzo normal en un punto dado de la sección transversal y por τ_{xy} y τ_{xz} las componentes del esfuerzo cortante, se expresa que el sistema de fuerzas internas elementales ejercido sobre la sección es equivalente al par **M** (figura 4.8).

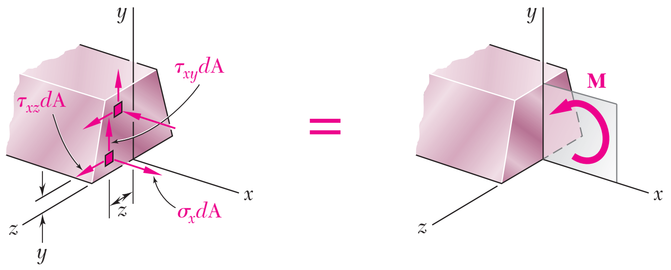


Figura 4.8

Recuerde de la estática, que un par **M** en realidad consiste de dos fuerzas iguales y opuestas. La suma de las componentes de estas fuerzas en cualquier dirección es, por tanto, igual a cero. Además, el momento del par es el mismo alrededor de *cualquier* eje perpendicular a su plano, y es cero alrededor de cualquier eje contenido en dicho plano. Seleccionando el eje z arbitrariamente, como se muestra en la figura 4.8, se expresa la equivalencia de las fuerzas internas elementales y del par **M** escribiendo que las sumas de las componentes y de los momentos de las fuerzas elementales son iguales a las componentes y momentos correspondientes al par **M**:

componentes en x: $$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

momentos alrededor del eje y: $$\int z\sigma_x \, dA = 0 \tag{4.2}$$

momentos alrededor del eje z: $$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Podrían obtenerse tres ecuaciones adicionales haciendo iguales a cero las sumas de las componentes en y, las componentes en z y los momentos alrededor del eje x, pero estas ecuaciones involucrarían únicamente las componentes de esfuerzo cortante y, como se verá en la siguiente sección, las componentes del esfuerzo cortante son ambas iguales a cero.

En este punto deben hacerse dos anotaciones: 1) El signo negativo en la ecuación (4.3) se debe a que un esfuerzo de tensión $(\sigma_x > 0)$ lleva a un momento negativo (en el sentido de las agujas del reloj) de la fuerza normal $\sigma_x \, dA$ alrededor del eje z. 2) La ecuación (4.2) podría haberse anticipado, ya que la aplicación de pares en el plano de simetría del elemento AB resultará en una distribución de esfuerzos normales que es simétrica alrededor del eje y.

De nuevo, se advierte que la distribución real de esfuerzos en una sección transversal dada no puede determinarse con la estática únicamente. Es *estáticamente indeterminada* y sólo puede obtenerse analizando las *deformaciones* producidas en el elemento.

4.3 DEFORMACIONES EN UN ELEMENTO SIMÉTRICO SOMETIDO A FLEXIÓN PURA

Se estudiarán ahora las deformaciones de un elemento prismático que posee un plano de simetría y está sometido en sus extremos a pares iguales y opuestos **M** y **M′** que actúan en el plano de simetría. El elemento se flexionará bajo la acción de los pares, pero permanecerá simétrico con respecto a dicho plano (figura 4.9). Además, como el momento flector *M* es el mismo en cualquier sección, el elemento se flexionará de manera uniforme. Así, la línea de intersección *AB* entre la cara superior del elemento y el plano de los pares tendrá una curvatura constante. Es decir, la línea *AB*, que era originalmente recta, se transformará en un círculo de centro *C*; lo mismo ocurrirá con la línea *A′B′* (no mostrada en la figura) a lo largo de la cual la cara inferior del elemento interseca el plano de simetría. También se observará que *AB* se acortará mientras *A′B′* se alargará al ocurrir la flexión mostrada en la figura, es decir, con $M > 0$,

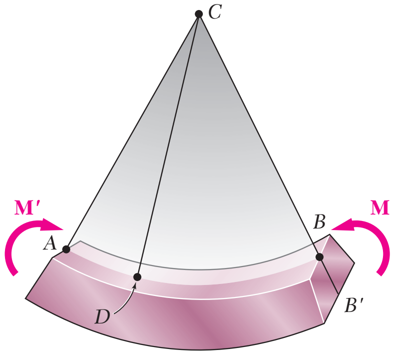


Figura 4.9

Ahora se probará que cualquier sección transversal perpendicular al eje del elemento permanece plana, y que el plano de la sección pasa por *C*. Si no fuera así, podría encontrarse un punto *E* del corte original en *D* (figura 4.10*a*), el cual después de flexionar el elemento, *no* estaría en el plano perpendicular al plano de simetría que contiene la línea *CD* (figura 4.10*b*). Sin embargo, debido a la simetría del elemento, habrá otro punto *E′* que se transformará exactamente de la misma manera. Suponga que después de flexionar la viga, ambos puntos estuvieran localizados a la izquierda del plano definido por *CD*, como se muestra en la figura 4.10*b*. Puesto que el momento flector *M* es el mismo en todo el elemento, una situación similar prevalecería en cualquier otra sección, y los puntos correspondientes a *E* y *E′* también se moverían a la izquierda. Así, un observador en *A* concluiría que la carga provoca que las partes *E* y *E′*, en las diferentes secciones, se muevan hacia él. Pero, un observador en *B*, para quien las cargas se ven igual, y que mira los puntos *E* y *E′* en las mismas posiciones (excepto que ahora están invertidas), llegaría a la conclusión opuesta. Esta inconsistencia lleva a afirmar que *E* y *E′* estarán en el plano definido por *CD* y, por tanto, que la sección permanece plana y pasa por *C*. Se debe anotar, sin embargo, que este análisis no excluye la posibilidad de que se presenten deformaciones *dentro* del plano de la sección (véase sección 4.5).

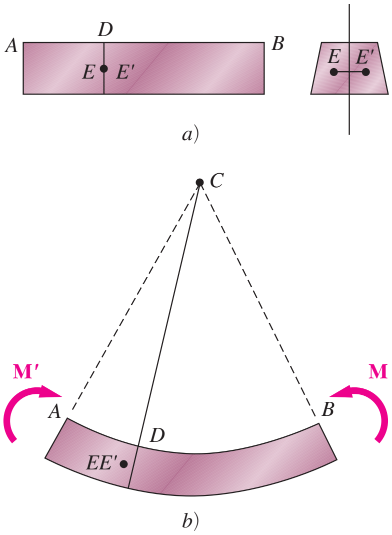
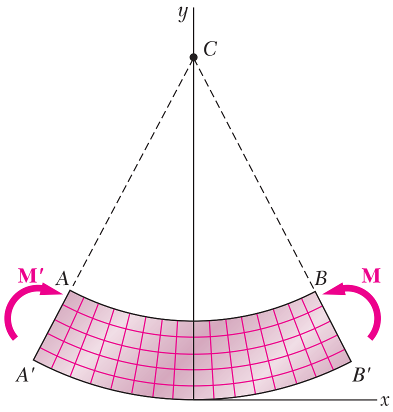


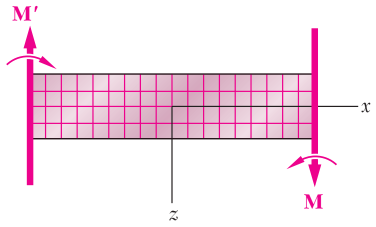
Figura 4.10

Suponga que el elemento está dividido en un gran número de pequeños elementos cúbicos con caras paralelas a los tres planos coordenados. La propiedad que se ha establecido requiere que estos pequeños elementos se transformen, como se muestra en la figura 4.11, cuando el elemento se somete a los pares **M** y **M′**. Como todas las caras representadas en las dos proyecciones de la figura 4.11 forman entre sí un ángulo de 90°, se concluye que $\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$, por tanto, que $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Observando las tres componentes del esfuerzo que no se han analizado todavía, es decir, σ_y, σ_z y τ_{yz}, se nota que deben ser nulas en la superficie del elemento. Como, por otra parte, las deformaciones comprendidas no requieren ninguna interacción de los pequeños elementos de una sección transversal dada, se supondrá que estas tres componentes del esfuerzo son nulas en todo el elemento. Esta hipótesis se verifica tanto experimental como teóricamente para elementos delgados que sufren pequeñas deformaciones.† Se concluye que la única componente del esfuerzo no nula es la componente normal σ_x. Así, en cualquier punto de un elemento delgado, en flexión pura, se tiene un estado de *esfuerzo uniaxial*. Recordando que la línea AB decrece y $A'B'$ se alarga, cuando $M > 0$, se nota que la deformación ϵ_x y el esfuerzo σ_x son negativos en la parte superior del elemento (*compresión*) y positivos bajos (*tensión*).

De lo anterior se deduce que debe existir una superficie paralela a las caras superior e inferior del elemento, donde ϵ_x y σ_x se anulan. Esta superficie es la *superficie neutra*. La superficie neutra interseca el plano de simetría según un arco de círculo DE (figura 4.12*a*) e interseca una sección transversal a lo largo de una línea recta llamada *eje neutro* de la sección (figura 4.12*b*).

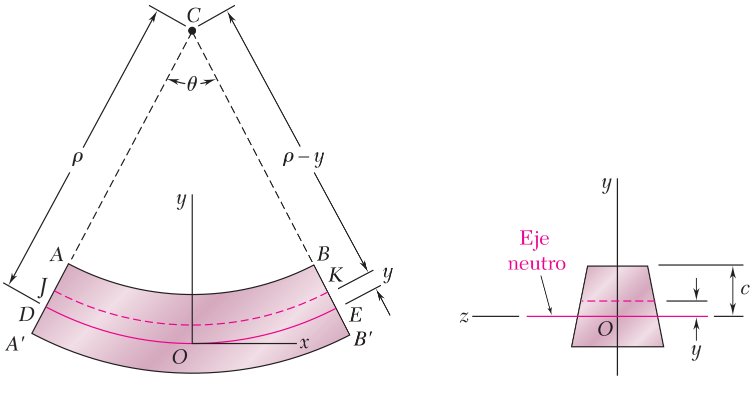


a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)



b) Sección longitudinal, horizontal

Figura 4.11



a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)

b) Sección transversal

Figura 4.12

Se escogerá el origen de coordenadas en la superficie neutra, en lugar de la cara inferior, como se hizo antes, de modo que la distancia de cualquier punto a la superficie neutra se medirá por la coordenada y.

---

† Véase también el problema 4.38.

Llamando ρ el radio del círculo DE (figura 4.12*a*), θ el ángulo central que corresponde a DE, y observando que la longitud de DE es igual a la longitud L del elemento no deformado, se tiene

$$L = \rho\theta \tag{4.4}$$

Considerando ahora el arco JK ubicado a una distancia y sobre la superficie neutra, se observa que su longitud L' es

$$L' = (\rho - y)\theta \tag{4.5}$$

Como la longitud original del arco JK era igual a L, la deformación de JK es

$$\delta = L' - L \tag{4.6}$$

o, sustituyendo (4.4) y (4.5) en (4.6),

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \tag{4.7}$$

La deformación unitaria longitudinal ϵ_x de los elementos de JK se obtiene dividiendo δ entre la longitud original L de JK:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

o

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

El signo negativo se debe a que se ha supuesto positivo el momento flector y, por lo tanto, que la viga es cóncava hacia arriba.

Debido a que las secciones deben permanecer planas, se producen deformaciones idénticas en todos los planos paralelos al plano de simetría. Así, el valor de la deformación unitaria, dado en la ecuación (4.8), es válido en todos los puntos y se concluye que la *deformación unitaria longitudinal normal* ϵ_x *varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra*.

La deformación unitaria ϵ_x alcanza su máximo valor absoluto cuando y es máxima. Si c es la distancia máxima a la superficie neutra (que corresponde a la superficie superior o inferior del elemento), y ϵ_m es el *máximo valor absoluto* de la deformación unitaria, se tiene

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \tag{4.9}$$

Resolviendo (4.9) para ρ y reemplazando en (4.8):

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \tag{4.10}$$

Se concluye el análisis de las deformaciones de un elemento sometido a flexión pura observando que aún no es posible calcular los esfuerzos o las deformaciones en un punto dado del elemento puesto que todavía no se ha localizado la superficie neutra. Para localizarla se tendría que especificar la relación esfuerzo-deformación del material utilizado.†

---

† Se nota, sin embargo, que si el cuerpo posee tanto un plano vertical de simetría como uno longitudinal (un miembro con sección rectangular) y si la curva de esfuerzo-deformación es la misma en tensión y en compresión, la superficie neutra coincidirá con el plano de simetría (véase sección 4.8).

4.4 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL RANGO ELÁSTICO

A continuación se estudiará el caso en el que el momento flector M es tal que los esfuerzos normales en el elemento permanecen por debajo del esfuerzo de fluencia σ_Y. Esto implica que, para propósitos prácticos, los esfuerzos en el elemento permanecerán por debajo del límite estático. No habrá deformaciones permanentes y podrá aplicarse la ley de Hooke para el esfuerzo uniaxial. Suponiendo que el material es homogéneo, y denotando por E al módulo de elasticidad, se tiene que en la dirección longitudinal x

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{4.11}$$

Recordando la ecuación (4.10) y multiplicando ambos miembros por E:

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

o, usando (4.11),

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m} \tag{4.12}$$

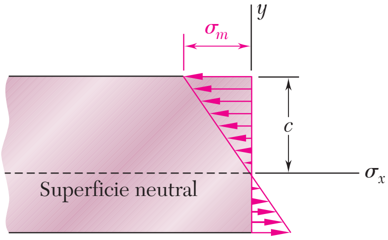


Figura 4.13

donde σ_m es el *máximo valor absoluto* de esfuerzo. Este resultado muestra que, *en el rango elástico, el esfuerzo normal varía linealmente con la distancia al plano neutro* (figura 4.13).

Debe anotarse que, hasta aquí, todavía se desconoce la localización de la superficie neutra y el valor máximo σ_m del esfuerzo. Ambos pueden hallarse si se recuerdan las relaciones (4.1) y (4.3), obtenidas antes, de la estática. Sustituyendo primero por σ_x de (4.12) en (4.1)

$$\int \sigma_x \, dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0$$

de donde se sigue que

$$\int y \, dA = 0 \tag{4.13}$$

Esta ecuación muestra que el primer momento de la sección transversal con respecto al eje neutro debe ser cero.† En otras palabras, si un elemento se somete a flexión pura *y los esfuerzos permanecen en el rango elástico, el eje neutro pasa por el centroide de la sección.*

Recuerde la ecuación (4.3), deducida en la sección 4.2, con respecto a un eje z horizontal *arbitrario*

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Especificando que el eje z debe coincidir con el eje neutro de la sección, reemplazando σ_x de (4.12) en (4.3) se tiene

---

† Véase el apéndice A para un análisis de momentos de áreas.

$$\int(-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right)dA = M$$

o

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2\,dA = M \tag{4.14}$$

Recordando que en el caso de flexión pura el eje neutro pasa por el centroide de la sección, se observa que I es el momento de inercia, o segundo momento, de la sección transversal con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del par **M**. Resolviendo (4.14) para σ_m:†

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Reemplazando σ_m de (4.15) en (4.12), se obtiene el esfuerzo normal σ_x a cualquier distancia y del eje neutro:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

Las ecuaciones (4.15) y (4.16) se llaman *ecuaciones de flexión elástica*, y el esfuerzo normal σ_x causado por la "flexión" del elemento se designa con frecuencia como *esfuerzo de flexión*. Se verifica que el esfuerzo es de compresión ($\sigma_x < 0$) por encima del eje neutro ($y > 0$) cuando el momento M es positivo, y de tensión ($\sigma_x > 0$) cuando M es negativo.

Volviendo a la ecuación (4.15), se nota que la razón I/c depende sólo de la geometría de la sección transversal. Esta relación se denomina *módulo elástico de la sección* y se representa por S.

$$\text{Módulo elástico de la sección} = S = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Sustituyendo S por I/c en la ecuación (4.15), se escribe esta ecuación en la forma alternativa:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{4.18}$$

Como el esfuerzo máximo σ_m es inversamente proporcional al módulo elástico S, es claro que las vigas deben diseñarse con un S tan grande como sea práctico. Por ejemplo, en el caso de una viga de madera de sección rectangular de ancho b y altura h, se tiene:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah \tag{4.19}$$

donde A es el área de la sección transversal de la viga. Esto muestra que, de dos vigas con igual sección transversal A (figura 4.14), la viga con mayor profundidad h tendrá el mayor módulo de sección y, por tanto, será la más efectiva para resistir la flexión.‡

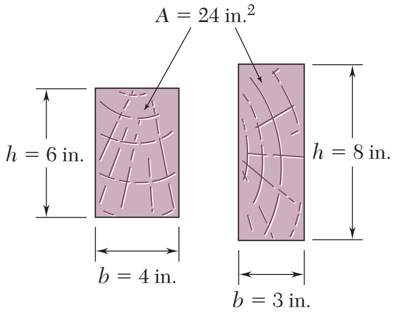


Figura 4.14

---

† Recuerde que se supuso positivo el momento flector. Si el momento de flexión M es negativo, M debe reemplazarse en la ecuación (4.15) por su valor absoluto $|M|$.

‡ Sin embargo, algunos valores grandes de la razón h/b pueden producir la inestabilidad lateral en la viga.

Figura 4.15 Las vigas de acero de patín ancho forman el armazón de muchos edificios.

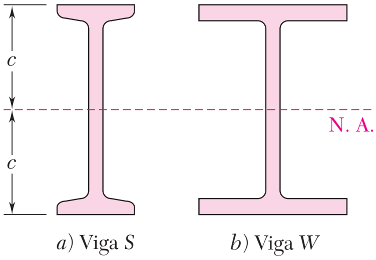


Figura 4.16

En el caso de acero estructural, las vigas estándares estadounidenses (vigas *S*) y las vigas de aleta ancha (vigas *W*) (figura 4.15) son preferibles a otros perfiles ya que una gran porción de su sección transversal se coloca lejos del eje neutro (figura 4.16). Así, para un área de sección transversal dada y una altura dada, su diseño proporciona grandes valores de I y, por tanto, de S. Los valores del módulo elástico de la sección de vigas comúnmente fabricadas pueden obtenerse en tablas que traen una lista de las diferentes propiedades geométricas de tales vigas. Para determinar el esfuerzo máximo σ_m en una sección de la viga estándar, el ingeniero sólo tiene que leer el valor del módulo elástico S en una tabla y dividir el momento flector M en la sección entre S.

La deformación del elemento causada por el momento flector M se mide por la *curvatura* de la superficie neutra. La curvatura se define como el inverso del radio de curvatura ρ y puede obtenerse resolviendo la ecuación (4.9) entre $1/\rho$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \tag{4.20}$$

Pero, en el rango elástico, se tiene $\epsilon_m = \sigma_m/E$. Sustituyendo por ϵ_m en (4.20), y recordando (4.15):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

o

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \tag{4.21}$$

EJEMPLO 4.01

Una barra de acero de 0.8 × 2.5 in. se somete a dos pares iguales y opuestos que actúan en el plano vertical de simetría de la barra (figura 4.17). Determine el valor del momento flector M que hace fluir la barra. Suponga $\sigma_Y = 36$ ksi.

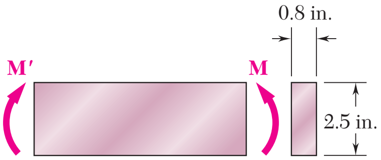


Figura 4.17

Puesto que el eje neutro debe pasar por el centroide C de la sección, $c = 1.25$ in. (figura 4.18). Por otra parte, el momento de inercia centroidal de la sección rectangular es

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(0.8\text{ in.})(2.5\text{ in.})^3 = 1.042\text{ in.}^4$$

Resolviendo la ecuación (4.15) para M, y sustituyendo los datos anteriores:

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{1.042\text{ in.}^4}{1.25\text{ in.}}(36\text{ ksi})$$

$$M = 30\text{ kip}\cdot\text{in.}$$

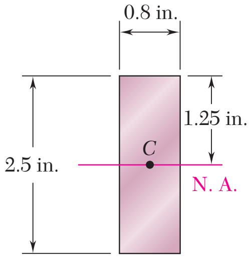


Figura 4.18

EJEMPLO 4.02

Se flexiona una barra semicircular de aluminio, con radio $r = 12$ mm (figura 4.19), hasta darle forma de un arco circular de radio medio $\rho = 2.5$ m. Si la cara plana de la barra se dirige hacia el centro de curvatura del arco, halle los esfuerzos máximos de tensión y compresión de la barra. Considere $E = 70$ GPa.

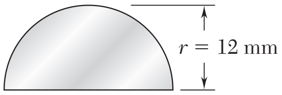


Figura 4.19

Se podría usar la ecuación (4.21) para calcular el momento M correspondiente al radio de curvatura ρ y luego la ecuación (4.15) para hallar σ_m. Sin embargo, es más sencillo utilizar la ecuación (4.9) para encontrar ϵ_m y la ley de Hooke para obtener σ_m.

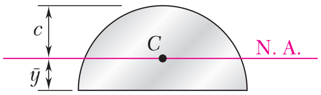


Figura 4.20

La ordenada $\bar{y}$ del centroide C de la sección semicircular es:

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12\text{ mm})}{3\pi} = 5.093\text{ mm}$$

El eje neutro pasa por C (figura 4.20) y la distancia c al punto más alejado de la sección, del eje neutro, es

$$c = r - \bar{y} = 12\text{ mm} - 5.093\text{ mm} = 6.907\text{ mm}$$

Usando la ecuación (4.9):

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6.907 \times 10^{-3}\text{ m}}{2.5\text{ m}} = 2.763 \times 10^{-3}$$

y aplicando la ley de Hooke,

$$\sigma_m = E\epsilon_m = (70 \times 10^9\text{ Pa})(2.763 \times 10^{-3}) = 193.4\text{ MPa}$$

Como este lado de la cara no da al centro de curvatura, el esfuerzo obtenido es de tensión. El esfuerzo de compresión máximo se presenta en la cara plana de la barra. Puesto que el esfuerzo es proporcional a la distancia al eje neutro, se tiene

$$\sigma_{\text{comp}} = -\frac{\bar{y}}{c}\sigma_m = -\frac{5.093\text{ mm}}{6.907\text{ mm}}(193.4\text{ MPa})$$
$$= -142.6\text{ MPa}$$

4.5 DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL

Cuando se probó en la sección 4.3, que la sección transversal de un elemento sometido a flexión pura permanecía plana, no se excluyó la posibilidad de que se presentaran deformaciones dentro del plano de la sección. Que tales deformaciones existirán, es evidente si se recuerda que (sección 2.11) los elementos en un estado uniaxial de esfuerzo, $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, se deforman tanto en las direcciones transversales y y z, como en la dirección axial x. Las deformaciones normales ϵ_y y ϵ_z dependen del módulo de Poisson ν del material usado y se expresan como

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x \qquad \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$$

o, recordando la ecuación (4.8),

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \qquad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \tag{4.22}$$

Las relaciones obtenidas muestran que los elementos situados por encima de la superficie neutra ($y > 0$) se expanden en ambas direcciones y y z, en tanto que los elementos por debajo de la superficie neutra ($y < 0$) se contraen. En un elemento de sección rectangular, se compensarán la expansión y contracción de los elementos en la dirección vertical y no se observarán cambios en la dirección vertical. En cuanto a las deformaciones en la dirección transversal horizontal z, sin embargo, la expresión de los elementos situados sobre la superficie neutra y la contracción correspondiente de los elementos situados debajo producirán que las líneas longitudinales de la sección se conviertan en arcos de círculo (figura 4.21). La situación señalada es similar a la de una sección longitudinal. Comparando la segunda de las ecuaciones (4.22) con la ecuación (4.8), se deduce que el eje neutro de la sección transversal se flexionará en un círculo de radio $\rho' = \rho/\nu$. El centro C' de este círculo se localiza debajo de la superficie neutra (si $M > 0$), es decir, en el lado opuesto al centro de curvatura C del elemento. El inverso del radio de curvatura ρ' es la curvatura de la sección transversal y se denomina *curvatura anticlástica*. Se tiene

$$\text{Curvatura anticlástica} = \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \tag{4.23}$$

En el análisis de las deformaciones de un elemento simétrico sometido a flexión pura, tanto en esta sección como en las anteriores, se habrá ignorado el modo en que realmente **M** y **M′** se aplicaban a ese elemento. Si *todas* las secciones transversales del elemento, de un extremo a otro, han de permanecer planas y libres de esfuerzo cortante, se debe estar seguro de que

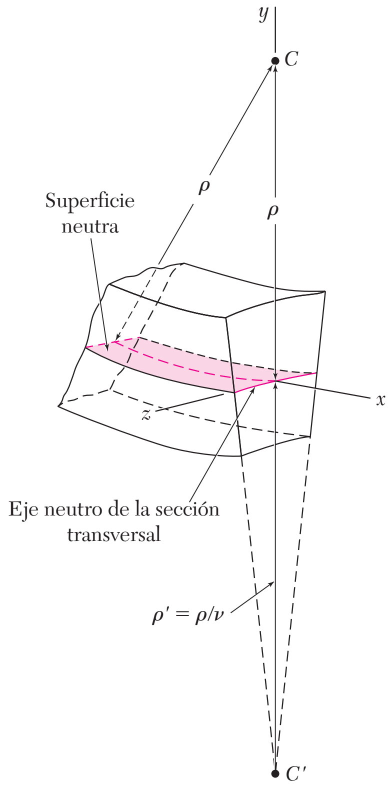


Figura 4.21

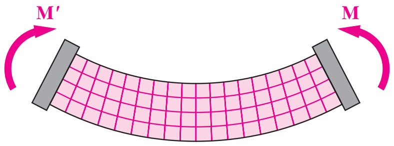


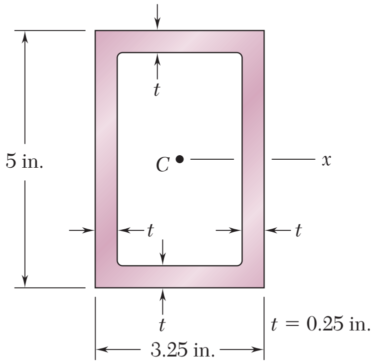
Figura 4.22

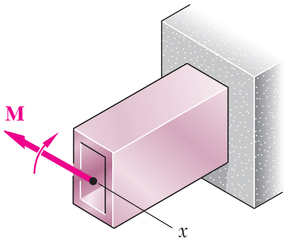
los pares se aplican de tal manera que los extremos del elemento mismo permanecen planos y libres de esfuerzos cortantes. Esto puede cumplirse aplicando los pares **M** y **M**′ por medio de placas rígidas y lisas (figura 4.22). Las fuerzas elementales que las platinas ejercen sobre el elemento serán normales a las secciones del extremo, y estas secciones, mientras permanecen planas, quedarán libres para deformarse como se ha descrito en esta sección.

Debe recalcarse que estas condiciones de carga no se presentan en la práctica, ya que requieren que cada placa ejerza fuerzas de tensión sobre la sección correspondiente por debajo de su eje neutro, y se permita simultáneamente que la sección se deforme libremente en su propio plano. El que las placas rígidas de la figura 4.22 no puedan darse en la realidad no les quita su importancia, que es permitir *visualizar* las condiciones de carga correspondientes a las relaciones descritas en las secciones precedentes. Las condiciones de carga reales pueden diferir mucho del modelo idealizado. En virtud del principio de Saint-Venant, sin embargo, las relaciones obtenidas pueden utilizarse para calcular los esfuerzos en situaciones prácticas, siempre que la sección considerada no esté muy cerca de los puntos de aplicación de los pares.

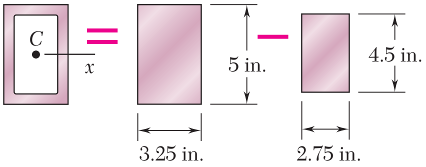
PROBLEMA MODELO 4.1

El tubo rectangular que se representa en la figura se obtiene de una aleación de aluminio con $\sigma_Y = 40$ ksi, $\sigma_U = 60$ ksi y $E = 10.6 \times 10^6$ psi. Despreciando el efecto, determine *a*) el momento flector *M* para el cual el factor de seguridad será 3.00, *b*) el radio de curvatura correspondiente del tubo.





SOLUCIÓN



Momento de inercia. Considerando la sección transversal del tubo como la diferencia de los dos rectángulos, como se muestra en la figura y recordando la fórmula del momento centroidal de inercia de un rectángulo, se tiene

$$I = \tfrac{1}{12}(3.25)(5)^3 - \tfrac{1}{12}(2.75)(4.5)^3 \qquad I = 12.97 \text{ in.}^4$$

Esfuerzo admisible. Con un factor de seguridad de 3.00 y con un esfuerzo último de 60 ksi:

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.00} = 20 \text{ ksi}$$

Puesto que $\sigma_{\text{perm}} < \sigma_Y$, el tubo permanece en el rango elástico y pueden aplicarse los resultados de la sección 4.4.

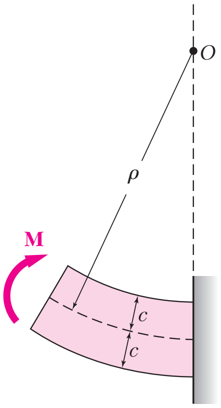
***a*) Momento flector.** Si $c = \frac{1}{2}(5 \text{ in.}) = 2.5$ in., entonces

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{Mc}{I} \qquad M = \frac{\mathrm{I}}{c}\sigma_{\text{perm}} = \frac{12.97 \text{ in.}^4}{2.5 \text{ in.}}(20 \text{ ksi}) \qquad M = 103.8 \text{ kips} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

***b*) Radio de curvatura.** Como $E = 10.6 = 10^6$ psi, se sustituye este valor y los obtenidos de *I* y *M* en la ecuación (4.21) para encontrar

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{103.8 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{(10.6 \times 10^6 \text{ psi})(12.97 \text{ in.}^4)} = 0.755 \times 10^{-3} \text{ in.}^{-1}$$

$$\rho = 1\,325 \text{ in.} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft} \blacktriangleleft$$



Solución alterna. Como se conoce el esfuerzo máximo, $\sigma_{\text{perm}} = 20$ ksi, se determina la deformación máxima ϵ_m y se utiliza la ecuación (4.9),

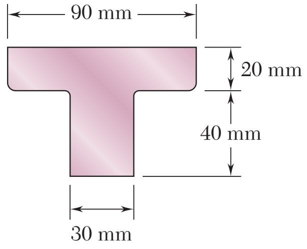
$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{perm}}}{E} = \frac{20 \text{ ksi}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

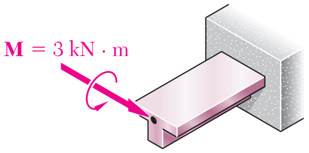
$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \qquad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{2.5 \text{ in.}}{1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}}$$

$$\rho = 1\,325 \text{ in.} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 4.2

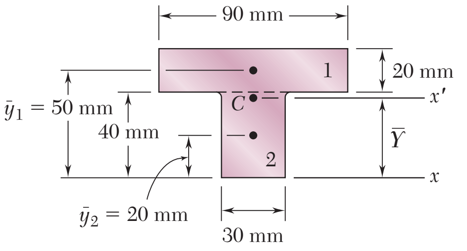
Una sección de una máquina de hierro colado se somete a un par de 3 kN · m, tal como se muestra en la figura. Si $E = 165$ GPa y se desprecia el efecto del filete, determine *a*) los esfuerzos máximos de tensión y compresión en el elemento fundido, *b*) su radio de curvatura.





SOLUCIÓN

Centroide. Se divide la sección transversal en T en dos rectángulos y se escribe:



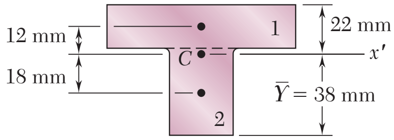
	Área, mm^2	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm^3
1	$(20)(90) = 1\,800$	50	90×10^3
2	$(40)(30) = 1\,200$	20	24×10^3
	$\Sigma A = 3\,000$		$\Sigma \bar{y}A = 114 \times 10^3$

$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A$

$\bar{Y}(3\,000) = 114 \times 10^6$

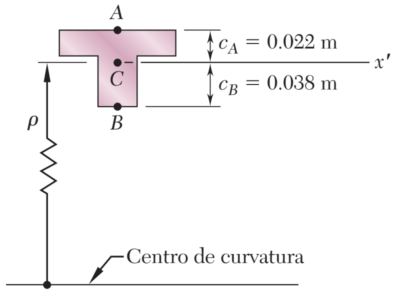
$\bar{Y} = 38$ mm

Momento centroidal de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para hallar el momento de inercia de cada rectángulo, con respecto al eje x' que pasa por el centroide de la sección compuesta. Sumando esos momentos de inercia, se tiene



$$I_{x'} = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \Sigma(\tfrac{1}{12}bh^3 + Ad^2)$$
$$= \tfrac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \tfrac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2$$
$$= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

***a*) Esfuerzo máximo de tensión.** Como los momentos aplicados flexionan la fundición hacia abajo, el centro de curvatura se sitúa debajo de la sección. Su tensión máxima ocurre en el punto *A*, que es el más alejado del centro de curvatura.



$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.022 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_A = +76.0 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Esfuerzo máximo de compresión. Se produce en el punto *B*; se tiene

$$\sigma_B = -\frac{Mc_B}{I} = -\frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.038 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_B = -131.3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b*) Radio de curvatura.** De la ecuación (4.21) se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$
$$= 20.95 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \qquad \rho = 47.7 \text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.1 y *4.2* Si se sabe que el par mostrado en la figura actúa en un plano vertical, determine los esfuerzos en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

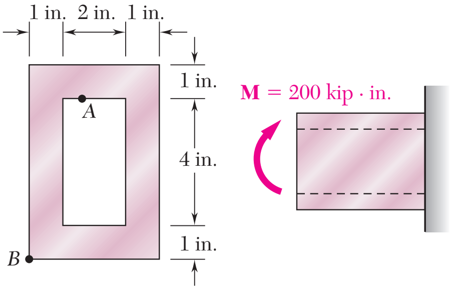

1 in.
2 in.
1 in.
1 in.
A
4 in.
1 in.
B
M = 200 kip · in.

Figura P4.1

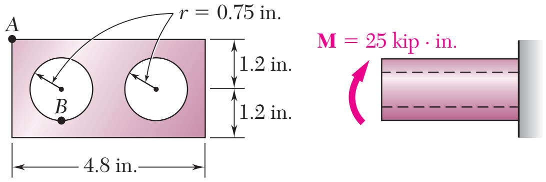

A
r = 0.75 in.
1.2 in.
1.2 in.
B
4.8 in.
M = 25 kip · in.

Figura *P4.2*

4.3 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se troquela con una aleación de aluminio para la que $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_U = 450$ MPa. Utilizando un factor de seguridad de 3.0, determine el par máximo que puede aplicarse a la viga cuando se flexiona alrededor del eje *z*.

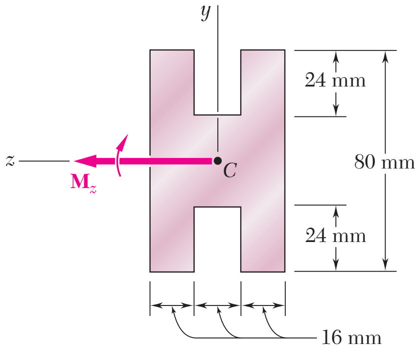

y
24 mm
z
M_z
C
80 mm
24 mm
16 mm

Figura P4.3

4.4 Retome el problema 4.3, y ahora suponga que la viga se flexiona alrededor del eje *y*.

4.5 La viga de acero que se muestra en la figura está hecha de un tipo de acero para el cual $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_U = 400$ MPa. Con un factor de seguridad de 2.50, determine el mayor par que puede aplicarse a la viga cuando se dobla alrededor del eje *x*.

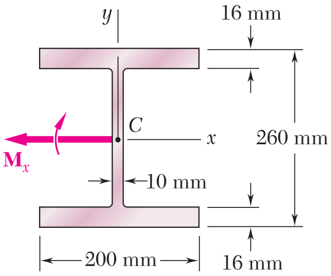

y
16 mm
C
x
260 mm
M_x
10 mm
200 mm
16 mm

Figura P4.5

4.6 Retome el problema 4.5, y ahora suponga que la viga se flexiona alrededor del eje *y* por medio de un par con momento M_y.

4.7 a 4.9 Dos fuerzas verticales se aplican a una viga con la sección transversal que se muestra en las figuras. Determine los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la porción *BC* de la viga.

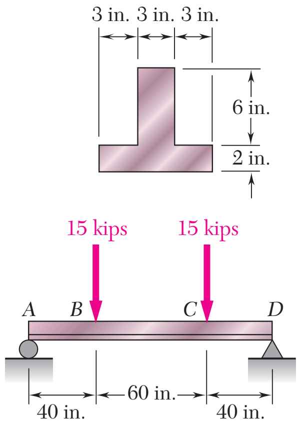

3 in. 3 in. 3 in.
6 in.
2 in.
15 kips
15 kips
A
B
C
D
40 in.
60 in.
40 in.

Figura P4.7

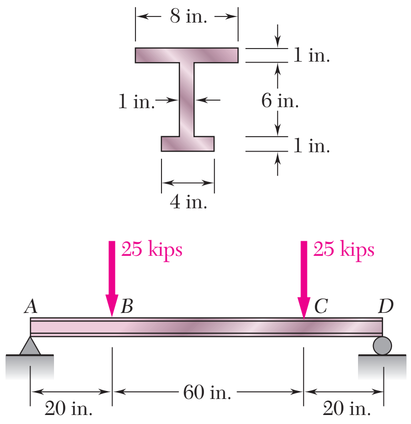

8 in.
1 in.
1 in.
6 in.
1 in.
4 in.
25 kips
25 kips
A
B
C
D
20 in.
60 in.
20 in.

Figura ***P4.8***

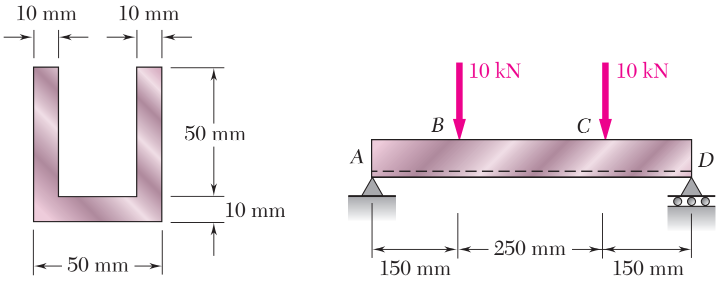

10 mm
10 mm
50 mm
10 mm
50 mm
10 kN
10 kN
A
B
C
D
150 mm
250 mm
150 mm

Figura P4.9

4.10 Dos pares iguales y opuestos de magnitud $M = 25$ kN · m se aplican a una viga con sección de canal *AB*. Puesto que los pares provocan que la viga se flexione en un plano horizontal, determine el esfuerzo *a*) en el punto *C*, *b*) en el punto *D*, *c*) en el punto *E*.

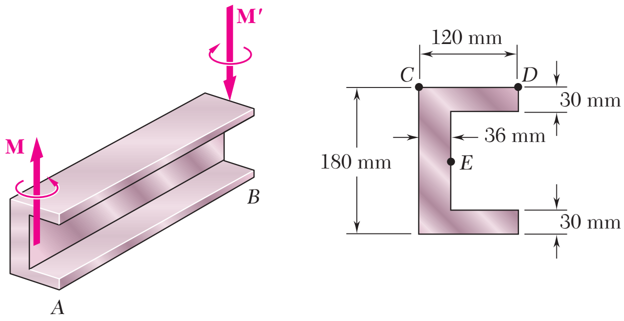

M′
M
B
A
120 mm
C
D
30 mm
36 mm
E
180 mm
30 mm

Figura ***P4.10***

4.11 Si se sabe que una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se flexiona alrededor de un eje horizontal y que el momento flector es de 8 kip · in., determine la fuerza total que actúa en la porción sombreada de la viga.

4.12 Retome el problema 4.11, y ahora suponga que la viga se flexiona alrededor de un eje vertical y que el momento flector es de 8 kip · in.

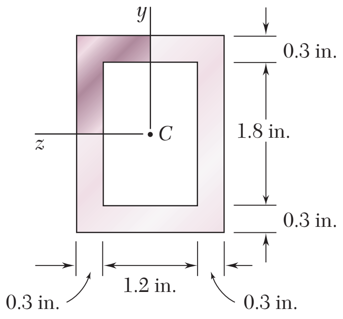

y
0.3 in.
C
z
1.8 in.
0.3 in.
0.3 in.
1.2 in.
0.3 in.

Figura P4.11

4.13 Si una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se flexiona alrededor de un eje horizontal y se sabe que el momento flector es de 6 kN · m, determine la fuerza total que actúa en la aleta superior.

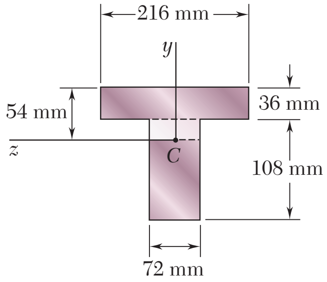


Figura P4.13 y *P4.14*

4.14 Si una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se flexiona alrededor de un eje horizontal y se sabe que el momento flector es de 6 kN · m, determine la fuerza total que actúa en la porción sombreada del alma.

4.15 Si se sabe que para la fundición mostrada en la figura el esfuerzo permisible es de 6 ksi en tensión y 15 ksi en compresión, determine el máximo par **M** que puede aplicarse.

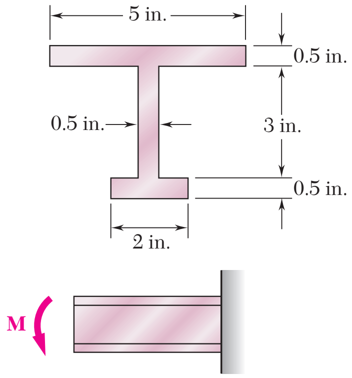


Figura P4.15

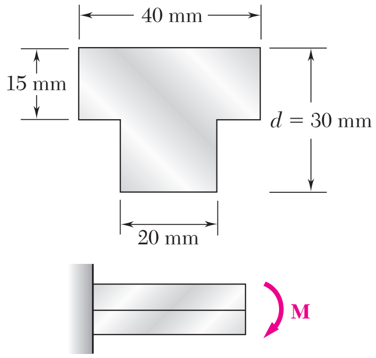


Figura P4.16

4.16 La viga mostrada en la figura está hecha de un nylon para el cual el esfuerzo permisible es de 24 MPa en tensión y de 30 MPa en compresión. Determine el máximo par **M** que puede aplicarse a la viga.

4.17 Retome el problema 4.16, y ahora suponga que $d = 40$ mm.

4.18 y *4.19* Si se sabe que para la viga extruida mostrada en la figura el esfuerzo permisible es de 120 MPa en tensión y de 150 MPa en compresión, determine el máximo par **M** que puede aplicarse.

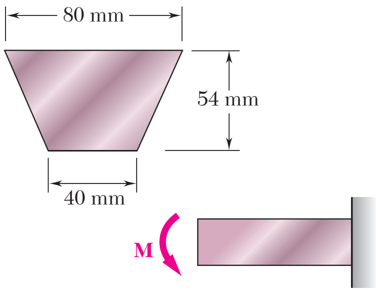


Figura P4.18

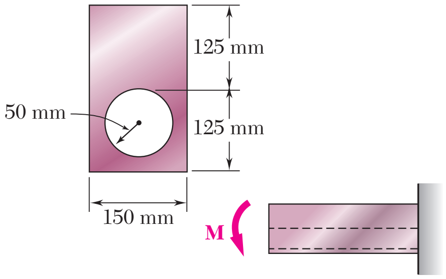


Figura *P4.19*

4.20 Si se sabe que para la viga mostrada en la figura el esfuerzo permisible es de 12 ksi en tensión y de 16 ksi en compresión, determine el máximo par **M** que puede aplicarse.

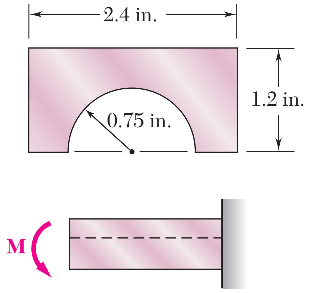


Figura P4.20

4.21 Una cinta de acero para sierra, que originalmente era recta, pasa sobre poleas de 8 in. de diámetro cuando está montada sobre una sierra de banda. Determine el esfuerzo máximo en la cinta, si se sabe que tiene 0.018 in. de grosor y 0.625 in. de ancho. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

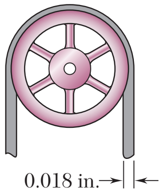


Figura P4.21

4.22 Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi para la tira de acero AB, determine *a*) el máximo par **M** que puede aplicarse, *b*) el radio de curvatura correspondiente. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

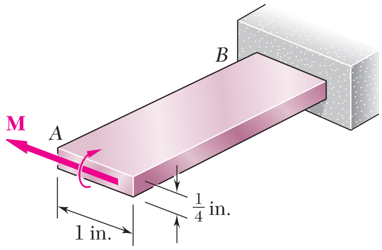


Figura P4.22

4.23 En ocasiones se almacenan varillas rectas de 6 mm de diámetro y 30 m de longitud enrollándolas dentro de un tambor con 1.25 m de diámetro interior. Si la resistencia a la cedencia no se excede, determine *a*) el esfuerzo máximo en una varilla enrollada, *b*) el momento flector correspondiente en la varilla. Utilice $E = 200$ GPa.

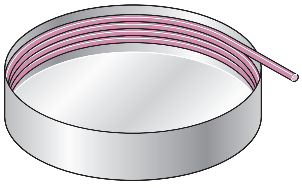


Figura P4.23

4.24 Un par de 200 kip · in. se aplica a la viga de acero laminado W8 × 31 que se muestra en la figura. *a*) Si el par se aplica alrededor del eje z como se muestra, determine el esfuerzo máximo y el radio de curvatura de la viga. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que el par se aplica alrededor del eje y. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

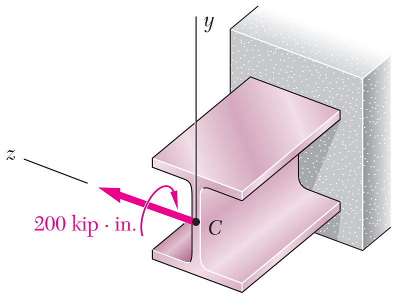


Figura *P4.24*

4.25 Un par de 60 N · m se aplica a la barra de acero mostrada en la figura. *a*) Si el par se aplica alrededor del eje z, como se muestra en la figura, determine el esfuerzo máximo y el radio de curvatura de la barra. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que el par se aplica alrededor del eje y. Utilice $E = 200$ GPa.

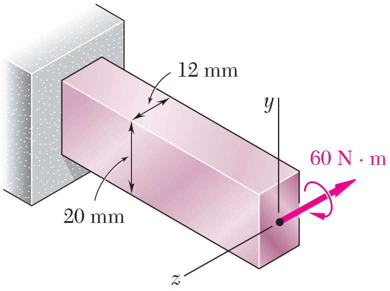
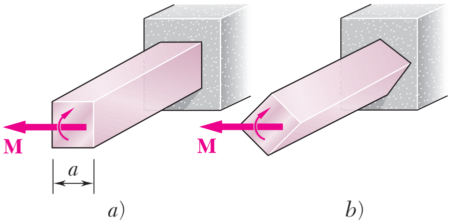


Figura P4.25

4.26 Un par de magnitud M se aplica a una barra cuadrada con lado a. Para cada una de las orientaciones mostradas en la figura, determine el esfuerzo máximo y la curvatura de la barra.



a) *b*)

Figura *P4.26*

4.27 Una porción de una barra cuadrada se elimina por fresado, de tal manera que queda la sección transversal que se muestra en la figura. Después, la barra se flexiona alrededor de su diagonal horizontal con un par **M**. En el caso de que $h = 0.9h_0$, exprese el esfuerzo máximo en la barra en la forma $\sigma_m = k\sigma_0$ donde σ_0 es el esfuerzo máximo que se habría producido si la barra cuadrada original hubiera sido flexionada por el mismo par **M**, y determine el valor de k.

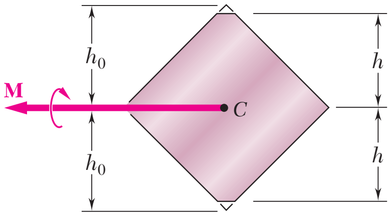


Figura P4.27

4.28 En el problema 4.27 determine *a*) el valor de h para el cual el esfuerzo máximo σ_m sea tan pequeño como sea posible, *b*) el valor correspondiente de k.

4.29 Una viga de acero laminado W200 × 31.3 se somete a un par **M** con un momento de 45 kN · m. Si se sabe que $E = 200$ GPa y que $\nu = 0.29$, determine *a*) el radio de curvatura ρ, *b*) el radio de curvatura ρ' para una sección transversal.

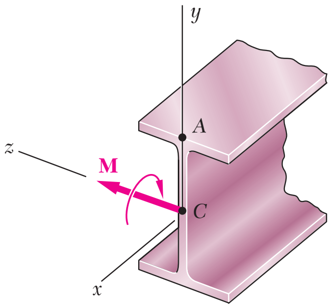


Figura P4.29

4.30 Para la barra y la carga del ejemplo 4.01, determine *a*) el radio de curvatura ρ, *b*) el radio de curvatura ρ' de una sección transversal, *c*) el ángulo entre los lados de la barra que originalmente eran verticales. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

4.31 Para la barra de aluminio y la carga del problema modelo 4.1, determine *a*) el radio de curvatura ρ' de la sección transversal, *b*) el ángulo entre los lados de la barra que originalmente eran verticales. Utilice $E = 10.6 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.33$.

4.32 En la sección 4.3 se supuso que los esfuerzos normales σ_y en un elemento sometido a flexión pura son despreciables. Para un elemento con sección rectangular inicial recta, *a*) deduzca una expresión aproximada para σ_y como función de y, *b*) demuestre que $(\sigma_y)_{\text{máx}} = -(c/2\rho)(\sigma_x)_{\text{máx}}$ y, así, que σ_y puede despreciarse en todas las situaciones prácticas. (*Sugerencia*: Considere el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga situada bajo la superficie de la ordenada y, y suponga que la distribución del esfuerzo σ_x es todavía lineal.)

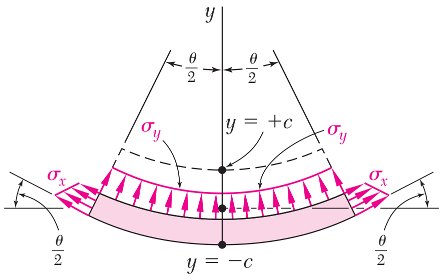


Figura P4.32

4.6 FLEXIÓN DE ELEMENTOS HECHOS DE VARIOS MATERIALES

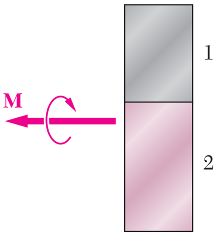


Figura 4.23

Las deducciones de la sección 4.4 se basaban en la hipótesis de que el material era homogéneo, con un módulo dado de elasticidad E. Si el elemento sometido a flexión pura está hecho de dos o más materiales, con distintos módulos de elasticidad, la aproximación para la determinación de esfuerzos debe cambiar.

Considere, por ejemplo, una barra compuesta de dos porciones de diferentes materiales, unidos como muestra la sección transversal de la figura 4.23. Esta barra compuesta se deformará, como se dijo en la sección 4.3, puesto que su sección transversal permanece igual en toda su longitud, ya que en la sección 4.3 no se planteó hipótesis alguna sobre la relación esfuerzo-deformación unitaria del material o materiales. Así, la deformación normal ϵ_x todavía varía linealmente con la distancia y al eje neutro de la sección (figuras 4.24*a* y *b*) y la ecuación (4.8) rige:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

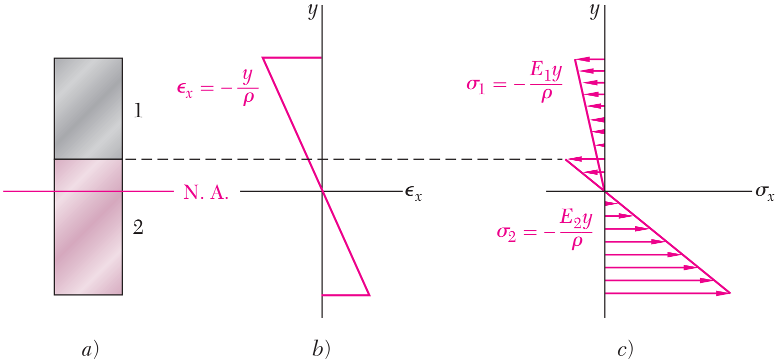

1
2
N. A.
y
$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$
ϵ_x
y
$\sigma_1 = -\frac{E_1 y}{\rho}$
$\sigma_2 = -\frac{E_2 y}{\rho}$
σ_x
a)
b)
c)

Figura 4.24 Distribución de esfuerzos y de deformaciones en una barra hecha de dos materiales.

Sin embargo, no puede suponerse que el eje neutro pasa por el centroide de la sección compuesta. Por ello, uno de los objetivos de este análisis es determinar la posición de dicho eje.

Como los módulos de elasticidad de los materiales E_1 y E_2 son diferentes, las expresiones obtenidas para los esfuerzos normales en cada material serán también diferentes. Al escribir

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1\epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \\ \sigma_2 &= E_2\epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho} \end{aligned} \tag{4.24}$$

se obtiene una curva de distribución de esfuerzos que consiste en dos segmentos de línea recta (figura 4.24*c*). Se deduce, de las ecuaciones (4.24), que la fuerza dF_1 ejercida sobre un elemento de área dA de la porción superior de la sección es:

$$dF_1 = \sigma_1\, dA = -\frac{E_1 y}{\rho}\, dA \tag{4.25}$$

mientras que la fuerza dF_2 ejercida sobre un elemento de la misma área dA de la porción inferior es:

$$dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \tag{4.26}$$

Pero, llamando n la relación E_2/E_1 de los dos módulos de elasticidad, puede expresarse dF_2 como

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho}(n\,dA) \tag{4.27}$$

Comparando las ecuaciones (4.25) y (4.27), se nota que se ejercerá la misma fuerza dF_2 sobre un elemento de área $n\,dA$ del primer material. En otras palabras, la resistencia a la flexión de la barra permanecerá igual si ambas partes fueran hechas del primer material siempre que el ancho de cada elemento de la porción inferior fuera multiplicado por n. Note que este ensanchamiento (si $n > 1$) o estrechamiento (si $n < 1$) debe efectuarse *en dirección paralela al eje neutro de la sección* puesto que es esencial que la distancia y de cada elemento al eje neutro permanezca igual. La nueva sección transversal así obtenida se denomina *sección transformada* del elemento (figura 4.25).

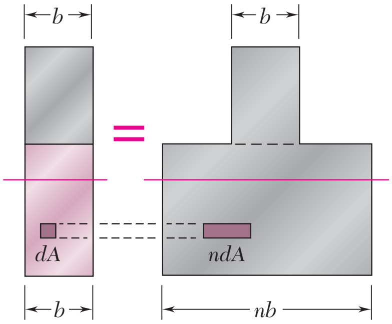


Figura 4.25 Sección transformada para una barra compuesta.

Puesto que la sección transformada representa la sección transversal de un elemento hecho de un *material homogéneo* con módulo elástico E_1, es posible utilizar el método descrito en la sección 4.4 para hallar el eje neutro de la sección y los esfuerzos normales en varios puntos de ella. El eje neutro se trazará *por el centroide de la sección transformada* (figura 4.26), y el esfuerzo σ_x, en cualquier punto del elemento homogéneo ficticio, se obtendrá de la ecuación (4.16)

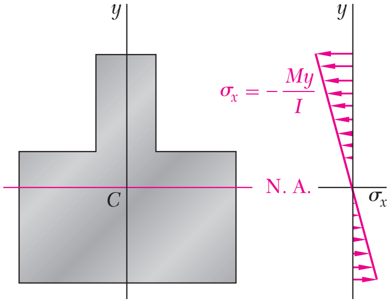


Figura 4.26 Distribución de esfuerzos en la sección transformada.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

donde y es la distancia a la superficie neutra, e I el *momento de inercia de la sección transformada* con respecto a su eje centroidal.

Para obtener el esfuerzo σ_1 en un punto situado en la porción superior de la sección transversal de la barra compuesta original, simplemente se calculará el esfuerzo σ_x en el punto correspondiente de la sección transformada. Sin embargo, para obtener el esfuerzo σ_2 en un punto de la parte inferior de la sección, se *multiplicará por* n el esfuerzo σ_x calculado en el punto correspondiente de la sección transformada. En verdad, como se vio antes, la misma fuerza elemental dF_2 se aplica a un elemento de área $n\,dA$ de la sección transformada y a un elemento de área dA de la sección original. Así, el esfuerzo σ_2 en un punto de la sección original debe ser n veces más grande que el esfuerzo en el punto correspondiente de la sección transformada.

Las deformaciones de un elemento compuesto también pueden hallarse usando la sección transformada. Recuerde que la sección transformada representa la sección transversal de un elemento hecho con un material homogéneo de módulo E_1, que se deforma de la misma manera que el elemento compuesto. Por lo tanto, utilizando la ecuación (4.21), se escribe que la curvatura del miembro compuesto es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transformada con respecto a su eje neutro.

EJEMPLO 4.03

Una barra obtenida uniendo piezas de acero ($E_s = 29 \times 10^6$ psi) y latón ($E_b = 15 \times 10^6$ psi) tiene la sección mostrada en la figura 4.27. Determine los esfuerzos máximos en el acero y el latón cuando la barra se somete a flexión pura con un momento $M = 40$ kips · in.

La sección transformada correspondiente a una barra equivalente hecha de latón se muestra en la figura 4.28. Puesto que

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29 \times 10^6 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.933$$

el ancho de la porción central de latón que reemplaza el acero original se obtiene multiplicando por 1.933 el ancho original

$$(0.75 \text{ in.})(1.933) = 1.45 \text{ in.}$$

Se observa que este cambio en las dimensiones se produce en dirección paralela al eje neutro. El momento de inercia de la sección transformada con respecto al eje centroidal es

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(2.25 \text{ in.})(3 \text{ in.})^3 = 5.063 \text{ in.}^4$$

y la distancia máxima al eje neutro es $c = 1.5$ in. Usando la ecuación (4.15), se halla el esfuerzo máximo en la sección transformada:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ kips} \cdot \text{in.})(1.5 \text{ in.})}{5.063 \text{ in.}} = 11.85 \text{ ksi}$$

El valor obtenido representa también el esfuerzo máximo en la parte de latón de la barra compuesta original. El esfuerzo máximo en el acero, sin embargo, será mayor que el obtenido para la sección transformada, ya que el área de la porción central debe reducirse mediante el factor $n = 1.933$ cuando se retorne de la sección transformada a la original. Así se concluye que:

$$(\sigma_{\text{latón}})_{\text{máx}} = 11.85 \text{ ksi}$$
$$(\sigma_{\text{acero}})_{\text{máx}} = (1.933)(11.85 \text{ ksi}) = 22.9 \text{ ksi}$$

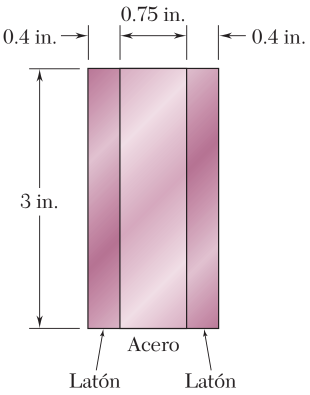


Figura 4.27

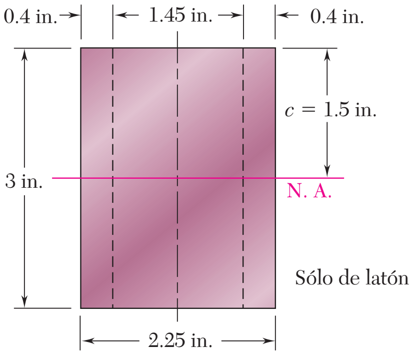
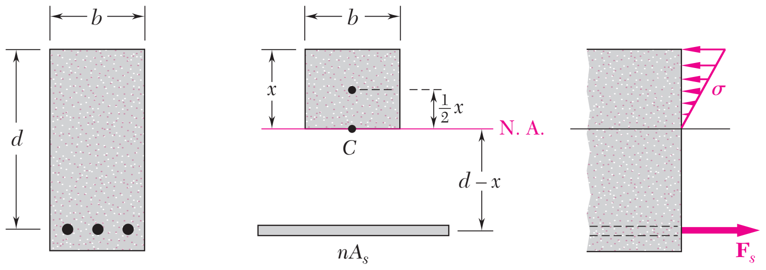


Figura 4.28

Un ejemplo importante de elementos estructurales hechos de dos materiales diferentes son *las vigas de concreto reforzado* (figura 4.29). Estas vigas, cuando se someten a momentos positivos, se refuerzan con barras de acero colocadas cerca de su cara inferior (figura 4.30*a*). Como el concreto sometido a tensión es muy débil, se agrietará bajo la superficie neutra y el acero tomará toda la carga de tensión, mientras que el concreto de la parte superior tomará la carga de compresión.

Para obtener la sección transformada de una viga de concreto reforzado, se reemplaza el área A_s de las barras de acero por un área equivalente nA_s, donde n es la razón E_s/E_c de los módulos de elasticidad del acero y del concreto (figura 4.30*b*). Por otra parte, como el concreto sólo actúa con eficiencia a compresión, únicamente la porción de la sección localizada por encima del eje neutro debe considerarse en la sección transformada.

Figura 4.29



a) *b*) *c*)

Figura 4.30

La posición del eje neutro se obtiene calculando la distancia x de la cara superior de la viga al centroide C de la sección transformada. Denotando por b el ancho de la viga, y d la distancia desde la cara superior al centroide de las barras de acero, se tiene que el primer momento de la sección transformada con respecto al eje neutro debe ser cero. Como el primer momento de cada una de las dos porciones de la sección transformada se obtiene multiplicando su área por la distancia de su centroide al eje neutro, se escribe:

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_s(d - x) = 0$$

o

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0 \tag{4.28}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para x, se obtiene la posición del eje neutro y la porción de la sección de la viga de concreto que se usa efectivamente.

La determinación de los esfuerzos en la sección transformada se realiza, como ya se explicó con anterioridad en esta sección (véase problema modelo 4.4). La distribución de esfuerzos de compresión en el concreto y la resultante $\mathbf{F}_s$ de las fuerzas de tensión en las barras de acero, se muestran en la figura 4.30*c*.

4.7 CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS

La ecuación $\sigma_m = Mc/I$ se dedujo en la sección 4.4 para el caso de un elemento con un plano de simetría y sección uniforme, y en la sección 4.5 se vio que era apropiada para toda la longitud del elemento sólo si los pares **M** y **M′** se aplicaban mediante platinas rígidas y sin fricción. En otras condiciones de aplicación de las cargas se producirán concentraciones de esfuerzos cerca de los puntos de aplicación.

Esfuerzos más altos ocurrirán si la sección transversal del elemento experimenta cambios súbitos. Se han estudiado dos casos particulares de interés,† el caso de una barra plana con un cambio súbito de sección (ancho) y el caso de una barra plana con ranuras. Como la distribución de esfuerzos en las secciones transversales críticas sólo depende de la geometría del elemento, pueden determinarse los factores de concentración de esfuerzos para diferentes relaciones de los parámetros considerados y registrados, como en las

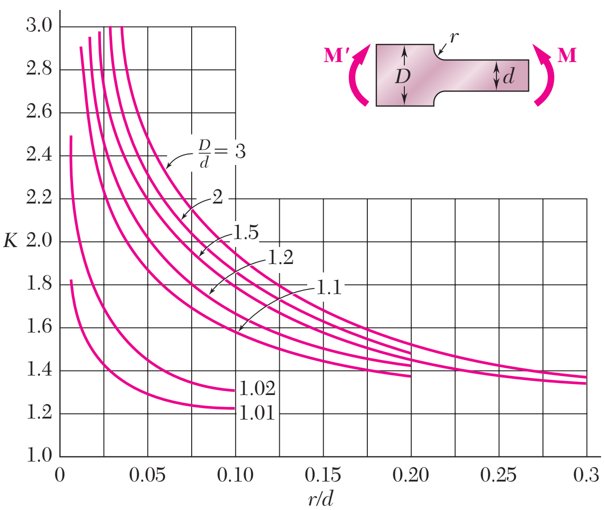


Figura 4.31 Factores de concentración de esfuerzos para *barras planas* con cambios de ancho sometidas a flexión pura.†

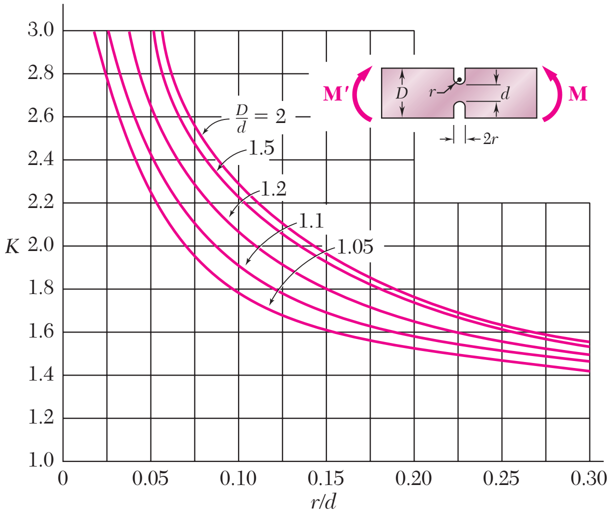


Figura 4.32 Factores de concentración de esfuerzos para barras planas con ranuras sometidas a flexión pura.†

---

† W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.

figuras 4.31 y 4.32. El valor del esfuerzo máximo en la sección puede expresarse como:

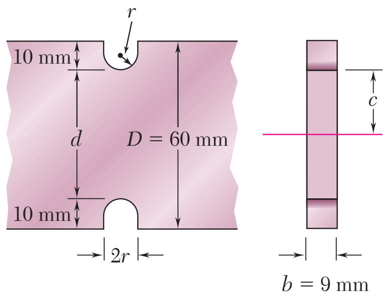
$$\sigma_m = K\frac{Mc}{I} \tag{4.29}$$

donde *K* es el factor de concentración de esfuerzos, y donde *c* e *I* se refieren a la sección crítica, es decir, a la sección de ancho *d* en los dos casos estudiados aquí. Un examen de las figuras 4.31 y 4.32 muestra claramente la importancia de usar soldaduras de filete y ranuras de radio *r* tan grandes como sea práctico.

Finalmente, se debe señalar que, como en el caso de la carga axial y la torsión, los valores de *K* se han calculado teniendo en cuenta la hipótesis de una relación lineal entre esfuerzo y deformación. En muchas aplicaciones se producirán deformaciones plásticas que se traducen en valores del esfuerzo máximo más bajos que los indicados por la ecuación (4.29).

EJEMPLO 4.04

Se van a maquinar ranuras de 10 mm de profundidad en una barra de acero de 60 mm de ancho y 9 mm de espesor (figura 4.33). Determine el ancho mínimo permisible de las ranuras si el esfuerzo en la barra no debe pasar de 150 MPa cuando el momento flector es de 180 N · m.



a) *b*)

Figura 4.33

En la figura 4.33*a* se observa que:

$$d = 60 \text{ mm} - 2(10 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$
$$c = \tfrac{1}{2}d = 20 \text{ mm} \qquad b = 9 \text{ mm}$$

El momento de inercia de la sección crítica con respecto al eje neutro es:

$$I = \tfrac{1}{12}bd^3 = \tfrac{1}{12}(9 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3 = 48 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

El valor del esfuerzo *Mc*/*I* es entonces:

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180 \text{ N} \cdot \text{m})(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{48 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 75 \text{ MPa}$$

Sustituyendo este valor por *Mc*/*I* en la ecuación (4.29) y haciendo $\sigma_m = 150$ MPa, se escribe

$$150 \text{ MPa} = K(75 \text{ MPa})$$
$$K = 2$$

Por otra parte

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.5$$

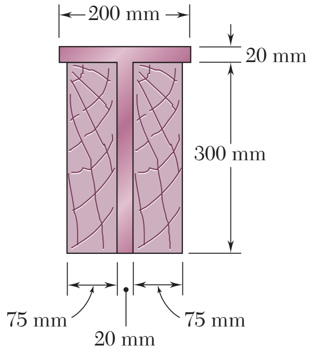
Usando la curva de la figura 4.32, correspondiente a $D/d = 1.5$, se encuentra que el valor $K = 2$ corresponde a un valor de r/d igual a 0.13. Se tiene, por lo tanto,

$$\frac{r}{d} = 0.13$$
$$r = 0.13d = 0.13(40 \text{ mm}) = 5.2 \text{ mm}$$

El mínimo ancho permisible de las ranuras es entonces

$$2r = 2(5.2 \text{ mm}) = 10.4 \text{ mm}$$

PROBLEMA MODELO 4.3

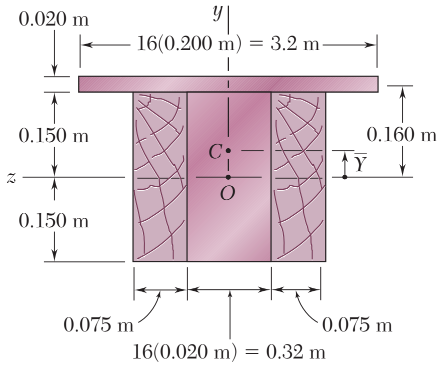


Una viga de acero en T se ha reforzado poniéndole los dos pedazos de madera que se muestran en la figura. El módulo de elasticidad es 12.5 GPa para la madera y 200 GPa para el acero. Considerando que se aplica un momento flector $M = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$ a la viga compuesta, halle *a*) el esfuerzo máximo en la madera, *b*) el esfuerzo en el acero a lo largo de la fibra externa.

SOLUCIÓN

Sección transformada. Primero se calcula la razón

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200 \text{ GPa}}{12.5 \text{ GPa}} = 16$$



Multiplicando las dimensiones horizontales de la porción de acero para $n = 16$, se obtiene una sección transformada enteramente de madera.

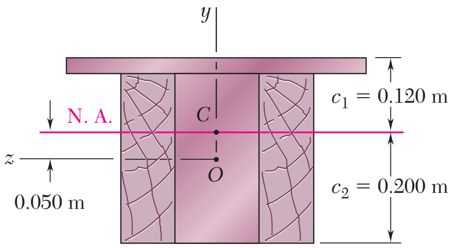
Eje neutro. Pasa por el centroide de la sección transformada. Como la sección consta de dos rectángulos, se tiene

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{(0.160 \text{ m})(3.2 \text{ m} \times 0.020 \text{ m}) + 0}{3.2 \text{ m} \times 0.020 \text{ m} + 0.470 \text{ m} \times 0.300 \text{ m}} = 0.050 \text{ m}$$

Momento centroidal de inercia. Usando el teorema de los ejes paralelos:

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{12}(0.470)(0.300)^3 + (0.470 \times 0.300)(0.050)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{12}(3.2)(0.020)^3 + (3.2 \times 0.020)(0.160 - 0.050)^2 \\ I &= 2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

_a_) Máximo esfuerzo de la madera. La madera más alejada del eje neutro se localiza a lo largo del borde de la base, donde $c_2 = 0.200$ m.



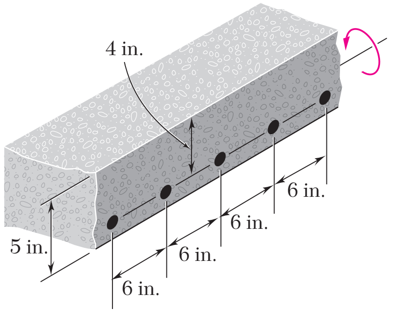
$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.200 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4}$$

$\sigma_w = 4.57$ MPa ◀

_b_) Esfuerzo en el acero. A lo largo del borde superior $c_1 = 0.120$ m. De la sección transformada se obtiene un esfuerzo equivalente en la madera, que debe multiplicarse por *n* para obtener el esfuerzo en el acero.

$$\sigma_s = n\frac{Mc_1}{I} = (16)\frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.120 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4}$$

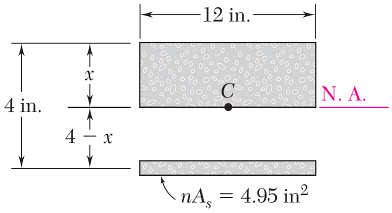
$\sigma_s = 43.8$ MPa ◀



PROBLEMA MODELO 4.4

Una losa de concreto para piso está reforzada por varillas de acero de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro colocadas a 1.5 in. por encima de la cara inferior de la losa y espaciadas 6 in. entre centros. El módulo de elasticidad es de 3.6×10^6 psi para el concreto utilizado y de 29×10^6 psi para el acero. Considerando que un momento flector de 40 kips · in. se aplica a cada tramo de 1 ft de ancho de la losa, determine *a*) el esfuerzo máximo en el concreto, *b*) el esfuerzo en el acero.

SOLUCIÓN



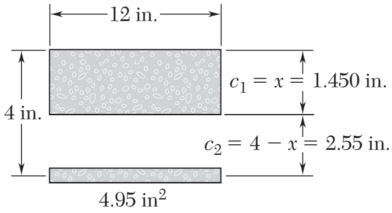
Sección transformada. Considere una porción de la losa de 12 in. de ancho, en la que hay dos varillas de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro que tienen un área total de sección transversal

$$A_s = 2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\text{ in.}\right)^2\right] = 0.614\text{ in.}^2$$

Ya que el concreto trabaja sólo en compresión, todas las fuerzas de tensión las soportan las varillas de acero, y la sección transformada consiste en las dos áreas mostradas en la figura. Una es la porción del concreto en compresión (situada por encima del eje neutro) y la otra es el área transformada de acero nA_s. Se tiene

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6\text{ psi}}{3.6 \times 10^6\text{ psi}} = 8.06$$

$$nA_s = 8.06(0.614\text{ in.}^2) = 4.95\text{ in.}^2$$

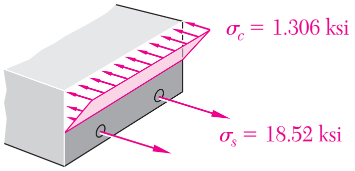


Eje neutro. El eje neutro de la losa pasa a través del centroide de la sección transformada. Sumando los momentos del área transformada alrededor del eje neutro, se tiene que

$$12x\left(\frac{x}{2}\right) - 4.95(4 - x) = 0 \qquad x = 1.450\text{ in.}$$

Momento de inercia. El momento centroidal de inercia del área transformada es

$$I = \tfrac{1}{3}(12)(1.450)^3 + 4.95(4 - 1.450)^2 = 44.4\text{ in.}^4$$



***a*) Esfuerzo máximo en el concreto.** En la parte superior de la losa, se tiene $c_1 = 1.450$ in., y

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(40\text{ kips} \cdot \text{in.})(1.450\text{ in.})}{44.4\text{ in.}^4} \qquad \sigma_c = 1.306\text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b*) Esfuerzo en el acero.** Para el acero, se tiene $c_2 = 2.55$ in., $n = 8.06$ y

$$\sigma_s = n\frac{Mc_2}{I} = 8.06\frac{(40\text{ kips} \cdot \text{in.})(2.55\text{ in.})}{44.4\text{ in.}^4} \qquad \sigma_s = 18.52\text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

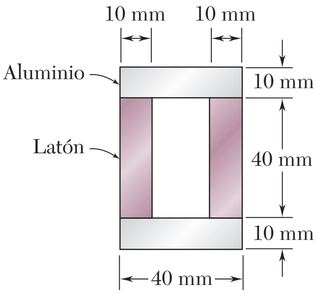


Figura P4.33

4.33 y *4.34* Una barra que tiene la sección transversal mostrada en la figura se forma al unir fuertemente piezas de latón y aluminio. Con los datos que se presentan a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra compuesta se flexiona alrededor de un eje horizontal.

	Aluminio	**Latón**
Módulo de elasticidad	70 GPa	105 GPa
Esfuerzo permisible	100 MPa	160 MPa

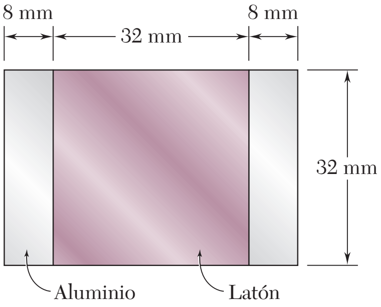


Figura *P4.34*

4.35 y 4.36 Para la barra compuesta que se indica, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra se dobla alrededor de un eje vertical.

4.35 Barra del problema 4.33.

4.36 Barra del problema 4.34.

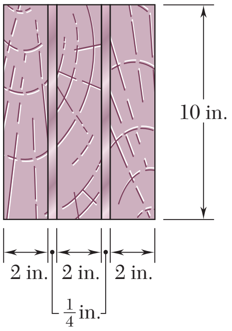


Figura P4.37

4.37 Tres vigas de madera y dos placas de acero se unen fuertemente con pernos para formar el elemento compuesto que se muestra en la figura. Con los datos que se dan a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando el elemento compuesto se dobla alrededor de un eje horizontal.

	Madera	**Acero**
Módulo de elasticidad	2×10^6 psi	30×10^6 psi
Esfuerzo permisible	2 000 psi	22 000 psi

4.38 Para el elemento compuesto del problema 4.37, determine el momento flector máximo permisible cuando el elemento se flexiona alrededor de un eje vertical.

4.39 y 4.40 Una barra de acero (E_s = 210 GPa) y una barra de aluminio (E_a = 70 GPa) se unen para formar la barra compuesta mostrada en la figura. Si la barra se dobla alrededor de un eje horizontal mediante un par con M = 200 N · m, determine el esfuerzo máximo en *a*) la barra de aluminio, *b*) la barra de acero.

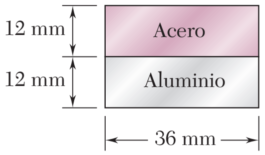


Figura P4.39

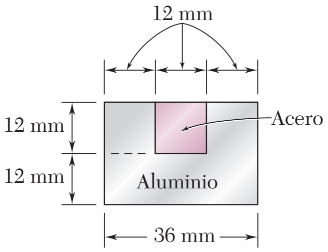


Figura P4.40

4.41 y *4.42* La viga de madera de 6 × 12 in. se ha reforzado atornillándola a las tiras de acero que se muestran en la figura. El módulo de elasticidad de la madera es de 1.8 × 10^6 psi y el del acero de 29 × 10^6 psi. Si se sabe que la viga se dobla alrededor de un eje horizontal mediante un par con momento M = 450 kip · in., determine el esfuerzo máximo en *a*) la madera, *b*) el acero.

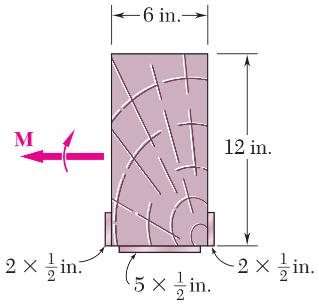


Figura P4.41

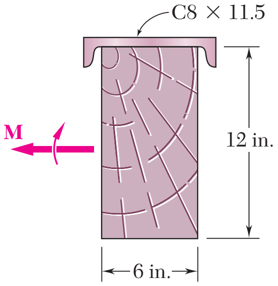


Figura *P4.42*

4.43 y 4.44 Para la barra compuesta que se indica, determine el radio de curvatura causado por un par con momento de 200 N · m.

4.43 Barra del problema 4.39.
4.44 Barra del problema 4.40.

4.45 y *4.46* Para la viga compuesta indicada, determine el radio de curvatura causado por un par con momento de 450 kip · in.

4.45 Barra del problema 4.41.
4.46 Barra del problema 4.42.

4.47 Una viga de concreto se refuerza con tres varillas de acero colocadas como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 3 × 10^6 psi para el concreto y de 30 × 10^6 psi para el acero. Con un esfuerzo permisible de 1 350 psi para el concreto y de 20 ksi para el acero, determine el momento flector máximo positivo permisible en la viga.

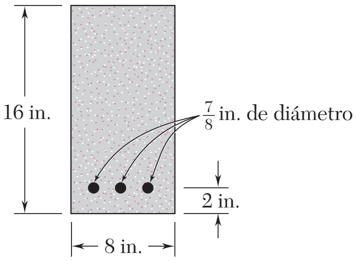


Figura P4.47

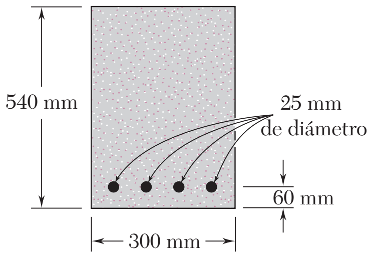


Figura P4.48

4.48 La viga de concreto reforzado que se observa en la figura se sujeta a un momento flector positivo de 175 kN · m. Si se sabe que el módulo de elasticidad es de 25 GPa para el concreto y de 200 GPa para el acero, determine *a*) el esfuerzo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el concreto.

4.49 Retome el problema 4.48, y ahora suponga que el ancho de 300 mm de la viga se incrementa a 350 mm.

4.50 Una dala de concreto está reforzada con varillas de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro colocadas sobre centros ubicados cada 5.5 in. como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 3×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero. Con un esfuerzo permisible de 1400 psi para el concreto y 20 ksi para el acero, determine el máximo momento flector por pie de anchura que puede aplicarse con seguridad a la dala.

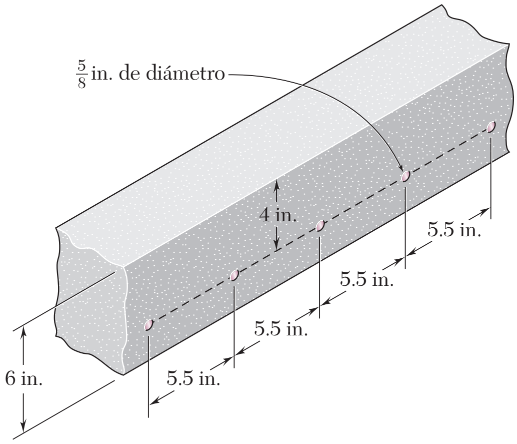


Figura *P4.50*

4.51 Si se sabe que el momento flector en la viga de concreto reforzado que se muestra en la figura es de +150 kip · ft y que el módulo de elasticidad es de 3.75 $\times 10^6$ psi para el concreto y de 30×10^6 psi para el acero, determine *a*) el esfuerzo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el concreto.

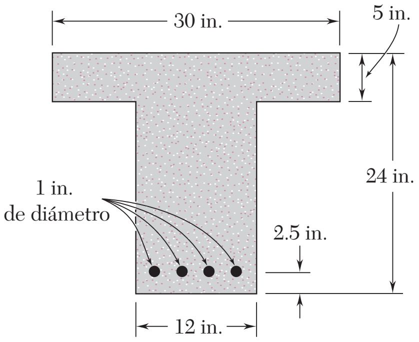


Figura P4.51

4.52 El diseño de una viga de concreto reforzado se considera *balanceado* si los esfuerzos máximos en el acero y en el concreto son iguales, respectivamente, a los esfuerzos permisibles σ_s y σ_c. Muestre que para lograr un diseño balanceado la distancia x desde la parte superior de la viga al eje neutro debe ser

$$x = \frac{d}{1 + \dfrac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}}$$

donde E_c y E_s son los módulos de elasticidad del concreto y del acero, respectivamente, y d es la distancia desde la parte superior de la viga al reforzamiento de acero.

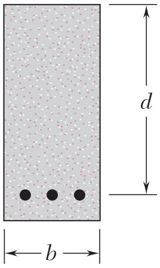


Figura P4.52

4.53 Para la viga de concreto que se muestra en la figura, el módulo de elasticidad es de 25 GPa para el concreto y de 200 GPa para el acero. Si se sabe que $b = 200$ mm y $d = 450$ mm, y que el esfuerzo permisible para el concreto es de 12.5 MPa y de 140 MPa para el acero, determine *a*) el área requerida A_s para el refuerzo de acero si el diseño de la viga debe estar balanceado, *b*) el momento flector máximo permisible. (Vea el problema 4.52 para la definición de una viga balanceada.)

4.54 Para la viga de concreto que se muestra en la figura, el módulo de elasticidad es de 3.5×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero. Si se sabe que $b = 8$ in. y $d = 22$ in., y que el esfuerzo permisible para el concreto es de 1 800 psi y de 20 ksi para el acero, determine *a*) el área requerida A_s para el refuerzo de acero si el diseño de la viga debe estar balanceado, *b*) el momento flector máximo permisible. (Vea el problema 4.52 para la definición de una viga balanceada.)

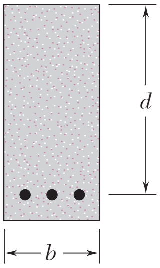


Figura P4.53 y *P4.54*

4.55 y 4.56 Cinco tiras de metal, cada una de ellas con una sección transversal de 15 × 45 mm, se unen para formar la viga compuesta que se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 210 GPa para el acero, 105 GPa para el latón y 70 GPa para el aluminio. Si la viga se flexiona alrededor de un eje horizontal mediante un par con momento de 1 400 N · m, determine *a*) el esfuerzo máximo en cada uno de los tres metales, *b*) el radio de curvatura de la viga compuesta.

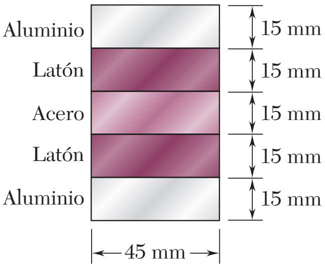


Figura P4.55

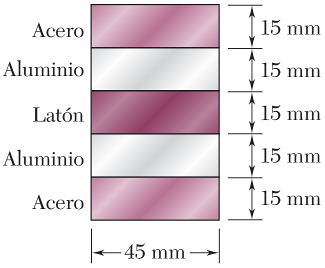


Figura P4.56

4.57 Un tubo de acero y uno de aluminio se unen fuertemente para formar la viga compuesta que se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 30×10^6 psi para el acero y de 10×10^6 psi para el aluminio. Si se sabe que la viga compuesta se flexiona mediante un par con momento de 5 kip · in., determine el esfuerzo máximo *a*) en el aluminio, *b*) en el acero.

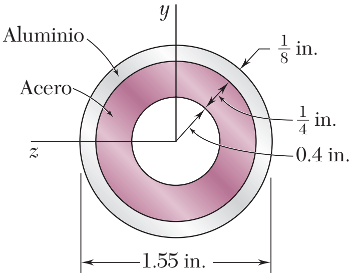


Figura P4.57

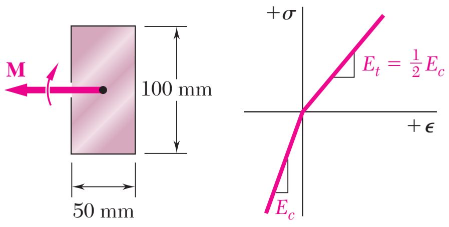


Figura P4.59

4.58 Retome el problema 4.57, y ahora suponga que el tubo interior de $\frac{1}{4}$ in. de espesor es de aluminio y que el tubo exterior de $\frac{1}{8}$ in. de espesor es de acero.

4.59 La viga rectangular que se muestra en la figura está hecha de un plástico para el cual el valor del módulo de elasticidad en tensión es la mitad del valor del módulo de elasticidad a compresión. Para un momento flector $M = 600$ N · m, determine el máximo *a*) esfuerzo de tensión, *b*) esfuerzo de compresión.

***4.60** Una viga rectangular está hecha de un material para el cual el módulo de elasticidad es E_t a tensión y E_c a compresión. Muestre que la curvatura de la viga en flexión pura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_r I}$$

donde

$$E_r = \frac{4E_tE_c}{\left(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}\right)^2}$$

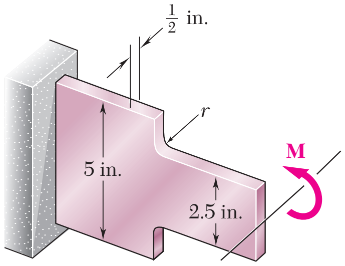


Figura P4.61 y P4.62

4.61 Si se sabe que el esfuerzo permisible para la viga mostrada en la figura es de 12 ksi, determine el momento flector permisible M cuando el radio r de los filetes es de *a*) $\frac{1}{2}$ in., *b*) $\frac{3}{4}$ in.

4.62 Si se sabe que $M = 3$ kip · in., determine el esfuerzo máximo en la viga que se muestra en la figura cuando el radio r de los filetes es de *a*) $\frac{1}{4}$ in., *b*) $\frac{1}{2}$ in.

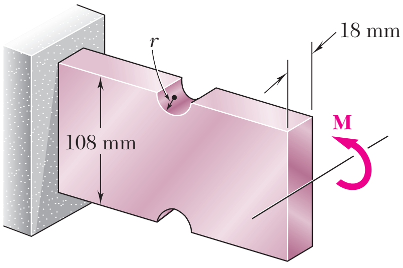


Figura *P4.63* y P4.64

4.63 Es necesario maquinar ranuras semicirculares con radio r en los lados de un elemento de acero como se muestra en la figura. Si se sabe que $M = 450$ N · m, determine el esfuerzo máximo en el elemento cuando *a*) $r = 9$ mm, *b*) $r = 18$ mm.

4.64 Es necesario maquinar ranuras semicirculares con radio r en los lados de un elemento de acero como se muestra en la figura. Con un esfuerzo permisible de 60 MPa, determine el momento flector máximo que puede aplicarse al elemento cuando *a*) $r = 9$ mm, *b*) $r = 18$ mm.

4.65 Un par con momento $M = 2$ kN · m se aplicará al extremo de una barra de acero. Determine el esfuerzo máximo en la barra *a*) si la barra se diseña con ranuras semicirculares de radio $r = 10$ mm, como se muestra en la figura 4.65*a*; *b*) si la barra se rediseña para eliminar el material por encima de las ranuras, como se muestra en la figura P4.65*b*.

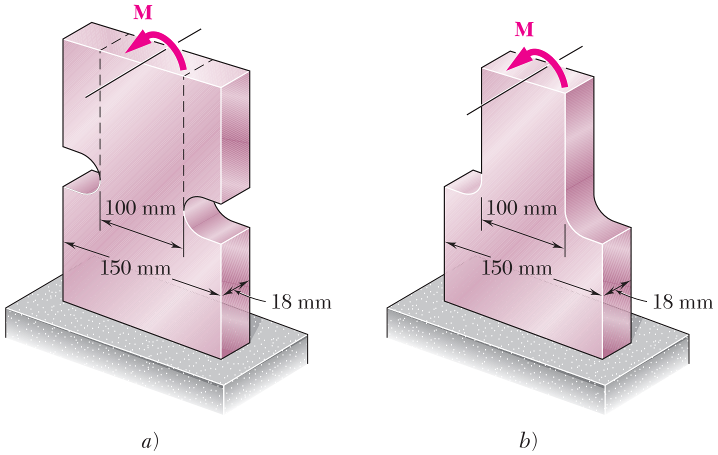


Figura *P4.65* y P4.66

4.66 El esfuerzo permisible utilizado en el diseño de una barra de acero es de 80 MPa. Determine el máximo par **M** que puede aplicarse a la barra *a*) si ésta se diseña con ranuras que tienen porciones semicirculares de radio $r = 15$ mm, como se muestra en la figura P4.65*a*; *b*) si la barra se rediseña para eliminar el material por encima de las ranuras, como se muestra en la figura P4.65*b*.

*4.8 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Cuando se dedujo la relación fundamental $\sigma_x = -My/I$ en la sección 4.4, se supuso que la ley de Hooke era aplicable a todo el elemento. Si se excede el límite de cedencia en alguna parte del elemento, o si el material es frágil y tiene un diagrama esfuerzo-deformación no lineal, dicha relación se invalida. El objetivo de esta sección es desarrollar un método más general para determinar la distribución de esfuerzos en un elemento sometido a flexión pura, método que puede usarse cuando la ley de Hooke no es aplicable.

Recuerde primero que cuando se probó, en la sección 4.3, que la deformación normal ϵ_x varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra, no se supuso una relación específica esfuerzo-deformación. Por tanto, aún puede usarse esa propiedad en el presente análisis y escribir

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \qquad (4.10)$$

donde y es la distancia del punto estudiado a la superficie neutra, y c el valor máximo de y.

Sin embargo, no es posible seguir suponiendo que, en una sección dada, el eje neutro pasa por el centroide de dicha sección, puesto que esta propiedad se obtuvo en la sección 4.4, bajo la hipótesis de deformación elástica. En general, el eje neutro debe localizarse por aproximaciones sucesivas, hasta hallar una distribución de esfuerzos que satisfaga las ecuaciones (4.1) y (4.3) de la sección 4.2. En el caso particular de un elemento que posee un plano horizontal y un plano vertical de simetría y esté hecho de un material caracterizado por la misma relación esfuerzo-deformación a tensión y a compresión, el eje neutro coincidirá con el eje longitudinal de simetría de la sección. Ciertamente, las propiedades del material requieren que los esfuerzos sean simétricos con respecto al eje neutro, es decir, simétricos con respecto a *algún* eje horizontal y es claro que esto se cumplirá y la ecuación (4.1) se satisfará al mismo tiempo, sólo si ese eje es el mismo eje horizontal de simetría.

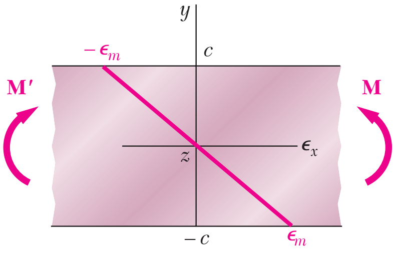


Figura 4.34

El análisis se limitará primero al caso especial que se acaba de describir. La distancia y en la ecuación (4.10) se mide desde el eje horizontal de simetría z en la sección transversal, y la distribución de ϵ_x es lineal y simétrica con respecto a dicho eje (figura 4.34). Por otra parte, la curva esfuerzo-deformación es simétrica con respecto al origen de coordenadas (figura 4.35).

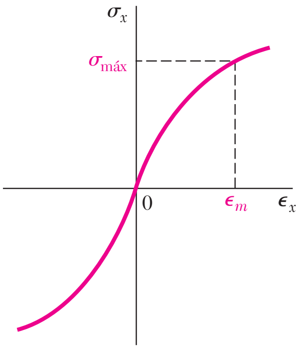


Figura 4.35

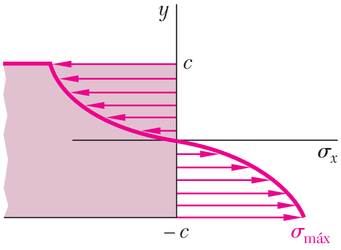


Figura 4.36

La distribución de esfuerzos en la sección transversal del elemento, es decir, la gráfica de σ_x contra y, se obtiene como sigue. Suponiendo que $\sigma_{\text{máx}}$ se ha especificado, se determina el valor correspondiente de ϵ_m del diagrama esfuerzo-deformación y se lleva este valor a la ecuación (4.10). Luego, por cada valor de y, se halla el correspondiente de ϵ_x en la ecuación (4.10) o la figura 4.34, y se obtiene del diagrama esfuerzo-deformación de la figura 4.35, el esfuerzo σ_x correspondiente al valor ϵ_x. Graficando σ_x contra y se genera la distribución de esfuerzos deseados (figura 4.36).

Recuerde ahora que, cuando se dedujo la ecuación (4.3) en la sección 4.2, no se supuso una relación particular entre esfuerzo y deformación. Puede usarse, entonces, la ecuación (4.3) para calcular el momento flector M que corresponde a la distribución de esfuerzos obtenida en la figura 4.36. Considerando el caso particular de un elemento que tiene una sección rectangular de ancho b, el elemento de área en la ecuación (4.3) se expresa como $dA = b\,dy$ y se tiene:

$$M = -b \int_{-c}^{c} y\sigma_x \, dy \qquad (4.30)$$

donde σ_x es la función de y graficada en la figura 4.36. Como σ_x es una función impar de y, la ecuación (4.30) se escribe en la forma

$$M = -2b \int_0^c y\sigma_x \, dy \tag{4.31}$$

Si σ_x es una función analítica conocida de ϵ_x, es posible usar la ecuación (4.10) para expresar σ_x como función de y, y la integral en (4.31) puede hallarse analíticamente. De otra manera, el momento flector M puede obtenerse por integración numérica. Este cálculo se torna más significativo si se advierte que la integral de la ecuación (4.31) representa el primer momento con respecto al eje horizontal del área de la figura 4.36 que se ubica por encima del eje horizontal y se limita por la curva de distribución del esfuerzo y el eje vertical.

Un valor importante del momento flector es el momento último M_U que causa la falla del elemento. Su valor puede obtenerse a partir del esfuerzo último del material σ_U escogiendo $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_U$ y completando los cálculos que se indicaron antes. Sin embargo, es más conveniente en la práctica determinar M_U experimentalmente utilizando una muestra del material. Suponiendo una distribución lineal de esfuerzos ficticia, la ecuación (4.15) se usa para hallar el esfuerzo máximo correspondiente R_B:

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \tag{4.32}$$

El esfuerzo ficticio R_B es el *módulo de ruptura al flexionar* el material dado. Puede usarse para calcular el momento de flexión último M_U de un elemento del mismo material, cuya sección transversal tiene la misma forma, pero dimensiones diferentes, resolviendo la ecuación (4.32) para M_U. Como en el caso de un elemento con una sección rectangular, las distribuciones de esfuerzos, real y ficticia, que se muestran en la figura 4.37 deben generar el mismo valor M_U para el momento último y las áreas que ellas definen deben tener igual el primer momento con respecto al eje horizontal. Es claro que el módulo de ruptura R_B será siempre mayor que la resistencia real σ_U.

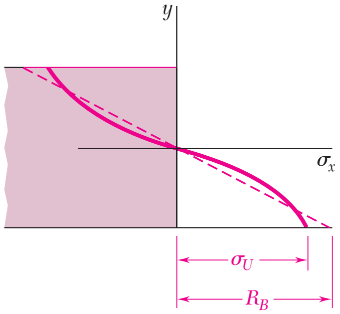


Figura 4.37

*4.9 ELEMENTOS HECHOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

Con el fin de ofrecer una mejor visión de la conducta plástica de un material sometido a flexión, se analizará el caso de un elemento hecho de *material elastoplástico* suponiéndose primero que el elemento tiene más *sección rectangular* de ancho b y altura $2c$ (figura 4.38). Recuerde de la sección 2.17, que el diagrama esfuerzo-deformación para un material elastoplástico es el de la figura 4.39.

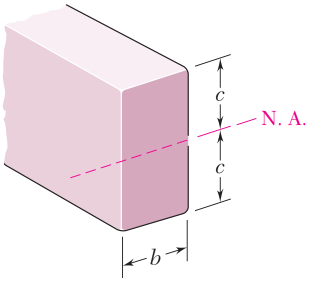


Figura 4.38

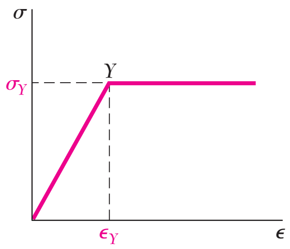


Figura 4.39

Mientras σ_x no excede el límite de fluencia σ_Y, se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos es lineal (figura 4.40*a*). El esfuerzo máximo es

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Cuando el momento flector aumenta, σ_m alcanza eventualmente el valor σ_Y (figura 4.40*b*). Sustituyendo este valor en la ecuación (4.15), y resolviendo para M, se obtiene el valor M_Y del momento flector en el inicio de la fluencia:

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y \tag{4.33}$$

El momento M_Y es el *máximo momento elástico* ya que es el mayor momento para el cual la deformación permanece completamente elástica. Recordando que, para la sección rectangular considerada,

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3}bc^2 \tag{4.34}$$

se escribe

$$M_Y = \frac{2}{3}bc^2\sigma_Y \tag{4.35}$$

Si el momento flector sigue aumentando, se desarrollan zonas plásticas en el elemento que tienen el esfuerzo uniformemente igual a $-\sigma_Y$ en la zona superior y a $+\sigma_Y$ en la inferior (figura 4.40*c*). Entre las zonas plásticas subsiste un núcleo elástico en el cual σ_x varía linealmente con y,

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_Y}{y_Y}y \tag{4.36}$$

donde y_Y representa la mitad del espesor del núcleo elástico. Cuando M aumenta, la zona plástica se expande hasta que, en el límite, la deformación es completamente plástica (figura 4.40*d*).

Se usará la ecuación (4.31) para hallar el valor del momento flector M que corresponde a un espesor $2y_Y$ del núcleo elástico. Recordando que σ_x está dado por la ecuación (4.36) para $0 \leq y \leq y_Y$, y es igual a $-\sigma_Y$ para $y_Y \leq y \leq c$, se escribe:

$$M = -2b \int_0^{y_Y} y\left(-\frac{\sigma_Y}{y_Y}y\right) dy - 2b \int_{y_Y}^{c} y(-\sigma_Y)\, dy$$

$$= \frac{2}{3}by_Y^2\sigma_Y + bc^2\sigma_Y - by_Y^2\sigma_Y$$

$$M = bc^2\sigma_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \tag{4.37}$$

o, a partir de la ecuación 4.35,

$$M = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \tag{4.38}$$

donde M_Y es el momento elástico máximo. Se observa que cuando y_Y se aproxima a cero, el momento flector tiende a

$$M_p = \frac{3}{2}M_Y \tag{4.39}$$

Este valor del momento flector, que corresponde a una deformación completamente plástica (figura 4.40*d*), es el *momento plástico* del elemento estudiado. Note que la ecuación (4.39) es válida sólo para *elementos de sección rectangular hechos de material elastoplástico*.

Debe tenerse claro que la distribución de las *deformaciones* a través de la sección permanece lineal después de la fluencia. Por tanto, la ecuación (4.8) de la sección 4.3 es aún válida y puede usarse para obtener el semiespesor y_Y del núcleo elástico. Se tiene

$$y_Y = \epsilon_Y\rho \tag{4.40}$$

donde ϵ_Y es la deformación de fluencia y ρ el radio de curvatura correspondiente a un momento $M \geq M_Y$. Cuando el momento flector es igual a M_Y, se tiene $y_Y = c$ y la ecuación (4.40) resulta en

$$c = \epsilon_Y\rho_Y \tag{4.41}$$

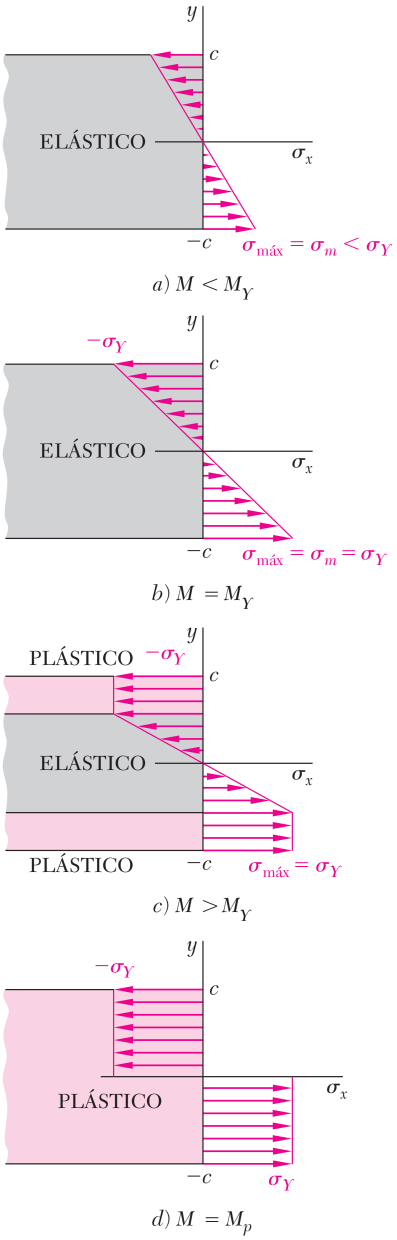
donde ρ_Y es el radio de curvatura correspondiente al momento elástico máximo M_Y. Dividiendo miembro a miembro (4.40) entre (4.41), se obtiene la relación†

$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_Y} \tag{4.42}$$

Sustituyendo por y_Y/c, de la ecuación (4.42), en la ecuación (4.38) se expresa el momento flector M como función de radio de curvatura ρ de la superficie neutra:

$$M = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{\rho_Y^2}\right) \tag{4.43}$$

Debe notarse que la ecuación (4.43) sólo es válida después del inicio de la fluencia, es decir, para valores de M mayores que M_Y. Para $M < M_Y$ debe usarse la ecuación (4.21) de la sección 4.4.


y
c
ELÁSTICO
σ_x
$-c$
$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_m < \sigma_Y$
$-\sigma_Y$
$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_m = \sigma_Y$
PLÁSTICO
$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$
σ_Y

a) $M < M_Y$

b) $M = M_Y$

c) $M > M_Y$

d) $M = M_p$

Figura 4.40

---

† La ecuación (4.42) se aplica a cualquier elemento hecho de cualquier material dúctil con un punto de fluencia bien definido, ya que su deducción no depende de la forma de la sección transversal ni de la forma del diagrama esfuerzo-deformación más allá del punto de cedencia.

Se observa, de la ecuación (4.43), que el momento flector alcanza el valor $M_p = \frac{3}{2}M_Y$ sólo cuando $\rho = 0$. Como claramente no puede tenerse un valor nulo del radio de curvatura en todos los puntos de la superficie neutra, se concluye que una deformación totalmente plástica no puede desarrollarse en flexión pura. Sin embargo, como se verá en el capítulo 5, tal situación puede ocurrir en un punto en el caso de una viga sometida a carga transversal.

En la figura 4.41 se han representado, en tres dimensiones, las distribuciones de esfuerzos en un elemento rectangular, correspondientes, respectivamente, a un momento elástico máximo M_Y y al caso límite del momento plástico M_p. Como, en ambos casos, las resultantes de las fuerzas elementales de tensión y compresión deben pasar por los centroides de los volúmenes que representan la distribución de esfuerzos y ser iguales en magnitud a estos volúmenes, se verifica que:

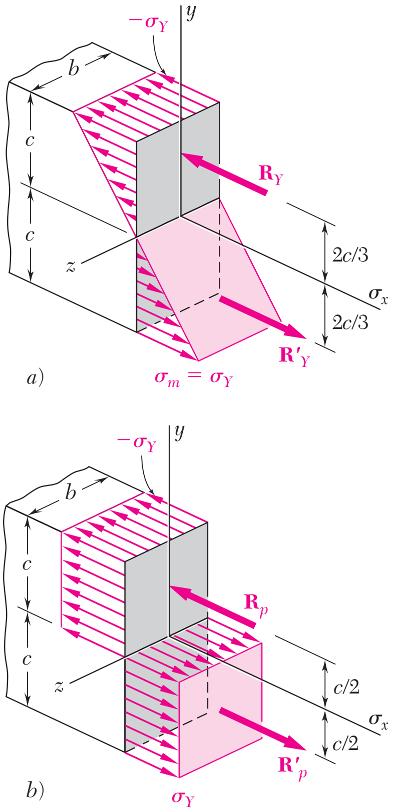


Figura 4.41

$$R_Y = \tfrac{1}{2}bc\sigma_Y$$

y

$$R_p = bc\sigma_Y$$

y que los momentos de los pares correspondientes son, respectivamente

$$M_Y = (\tfrac{4}{3}c)R_Y = \tfrac{2}{3}bc^2\sigma_Y \tag{4.44}$$

y

$$M_p = cR_p = bc^2\sigma_Y \tag{4.45}$$

Así, se demuestra que para un elemento rectangular, $M_p = \frac{3}{2}M_Y$ como requería la ecuación (4.39).

Para vigas de *sección transversal no rectangular*, el cálculo del máximo momento elástico M_Y y del momento plástico M_p se simplifica de manera sustancial si se usa un método gráfico de análisis, como se muestra en el problema modelo 4.5. Se encontrará, en este caso más general, que la relación $k = M_p/M_Y$ no es igual a $\frac{3}{2}$. Para formas estructuradas, como las vigas de aleta ancha, por ejemplo, esta relación varía de 1.08 a 1.14. La relación $k = M_p/M_Y$ es *el factor de forma* de la sección transversal ya que depende únicamente de dicha forma. Se observa que si se conocen el factor de forma k y el momento elástico máximo M_Y de una viga es posible obtener el momento plástico M_p de la viga multiplicando a M_Y por k:

$$M_p = kM_Y \tag{4.46}$$

La relación M_p/σ_Y, que se obtiene al dividir el momento plástico M_p del elemento entre la resistencia a la fluencia σ_Y del material se conoce como *módulo plástico de la sección* y se representa por Z. Cuando se conocen el módulo plástico Z y el límite de fluencia σ_Y de una viga, el momento plástico M_p de la viga se obtiene multiplicando σ_Y por Z:

$$M_p = Z\sigma_Y \tag{4.47}$$

Recordando que $M_Y = S\sigma_Y$, ecuación (4.18), y comparando esta relación con la ecuación (4.47) se nota que el factor de forma $k = M_p/M_Y$ de una sección transversal dada puede expresarse como la relación entre los módulos plástico y elástico:

$$k = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{Z\sigma_Y}{S\sigma_Y} = \frac{Z}{S} \tag{4.48}$$

Analizando el caso particular de una viga rectangular de ancho b y altura h, se nota, de las ecuaciones (4.45) y (4.47), que el *módulo plástico* es:

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_Y} = \frac{bc^2\sigma_Y}{\sigma_Y} = bc^2 = \tfrac{1}{4}bh^2$$

Por otra parte, recuerde, de la ecuación (4.19) de la sección 4.4, que la *sección de módulo elástico* de la misma viga es

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2$$

Sustituyendo en la ecuación (4.48) los valores obtenidos de Z y S, se verifica que el factor de forma de una viga rectangular es

$$k = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{1}{4}bh^2}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3}{2}$$

EJEMPLO 4.05

Un elemento de sección uniforme rectangular de 50 × 120 mm (figura 4.42) se somete a un momento flector $M = 36.8$ kN · m. Suponiendo que el elemento está hecho de un material elastoplástico con un punto de fluencia 240 MPa y un módulo de elasticidad de 200 GPa, determine *a*) el espesor del núcleo elástico, *b*) el radio de curvatura de la superficie neutra.

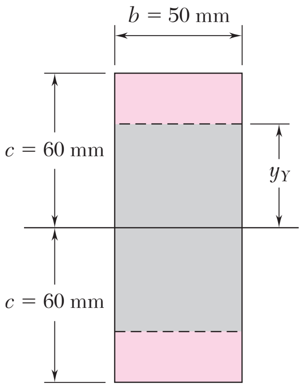


Figura 4.42

a) Espesor del núcleo elástico. Primero se determina el momento elástico máximo M_Y. Sustituyendo en la ecuación (4.34), se tiene

$$\frac{I}{c} = \frac{2}{3}bc^2 = \frac{2}{3}(50 \times 10^{-3}\text{ m})(60 \times 10^{-3}\text{ m})^2$$
$$= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

y llevando este valor, junto con $\sigma_Y = 240$ MPa a la ecuación (4.33)

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y = (120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)(240\text{ MPa}) = 28.8\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo los valores de M y M_Y en la ecuación (4.38):

$$36.8\text{ kN} \cdot \text{m} = \frac{3}{2}(28.8\text{ kN} \cdot \text{m})\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right)$$

$$\left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = 0.444 \qquad \frac{y_Y}{c} = 0.666$$

y como $c = 60$ mm

$$y_Y = 0.666(60\text{ mm}) = 40\text{ mm}$$

El espesor $2y_Y$ del núcleo elástico será de 80 mm.

b) Radio de curvatura. Note que la deformación de fluencia es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{240 \times 10^6\text{ Pa}}{200 \times 10^9\text{ Pa}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

Resolviendo la ecuación (4.40) para ρ y reemplazando los valores obtenidos de y_Y y ϵ_Y, se escribe

$$\rho = \frac{y_Y}{\epsilon_Y} = \frac{40 \times 10^{-3}\text{ m}}{1.2 \times 10^{-3}} = 33.3\text{ m}$$

*4.10 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN ELEMENTOS CON UN SOLO PLANO DE SIMETRÍA

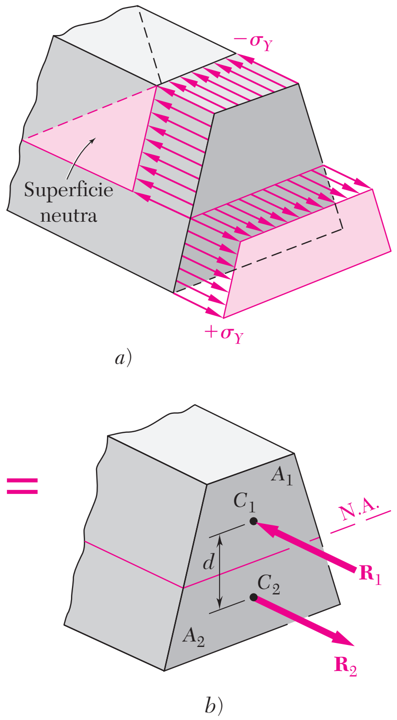


Figura 4.43

En el análisis de las deformaciones plásticas, se ha supuesto hasta aquí que el elemento flexionado tiene dos planos de simetría, uno que contiene los pares **M** y **M**′, y el otro que es perpendicular a ese plano. Ahora se estudiará el caso más general en que el elemento sólo posee un plano de simetría que contiene a **M** y **M**′. Sin embargo, el análisis se limitará al caso donde la deformación es totalmente plástica, cuyos esfuerzos normales son uniformemente iguales a $-\sigma_Y$ sobre la superficie neutra y a $+\sigma_Y$ por debajo de ella (figura 4.43*a*).

Como se indicó en la sección 4.8, no puede suponerse que el eje neutro coincide con el eje centroidal de la sección transversal cuando dicha sección no es simétrica con respecto a ese eje. Para localizar el eje neutro, se estudiará la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas elementales de compresión ejercidas sobre la porción A_1 de la sección transversal situada sobre el eje neutro y la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas de tensión ejercidas sobre A_2 debajo del eje neutro (figura 4.43*b*). Puesto que $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman un par equivalente al aplicado al elemento, deben tener la misma magnitud. Se tiene, entonces, $R_1 = R_2$, o $A_1\sigma_Y = A_2\sigma_Y$ de lo cual se concluye que $A_1 = A_2$. En otras palabras, *el eje neutro divide la sección transversal en porciones de áreas iguales*. Note que el eje así obtenido *no* será, en general, un eje centroidal de la sección.

También se observa que las líneas de acción de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ pasan por los centroides C_1 y C_2 de las dos porciones definidas. Si d es la distancia entre C_1 y C_2 y A el área total de la sección transversal, el momento plástico del elemento se expresa como

$$M_p = \left(\tfrac{1}{2}A\sigma_Y\right) d$$

En el problema modelo 4.6 se presenta un ejemplo del cálculo del momento plástico de un elemento que tiene sólo un plano de simetría.

*4.11 ESFUERZOS RESIDUALES

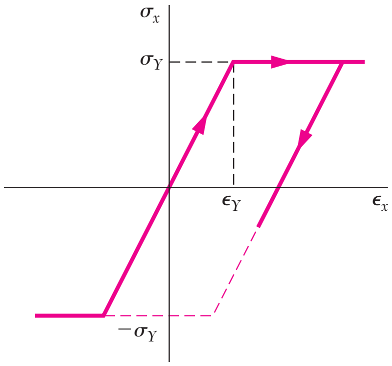


Figura 4.44

En las secciones precedentes se estudió que si en un elemento hecho de material elastoplástico el momento flector es suficientemente grande, se desarrollarán zonas plásticas. Cuando el momento flector se reduce a cero, la correspondiente reducción en esfuerzo y deformación, en cualquier punto dado, puede representarse por una línea recta en el diagrama esfuerzo-deformación, como se ilustra en la figura 4.44. El valor final del esfuerzo en un punto no será cero, en general, tal como se verá en seguida. Habrá un esfuerzo residual en casi todos los puntos, y ese esfuerzo puede tener o no el mismo signo del esfuerzo máximo alcanzado al final de la fase de carga.

Puesto que la relación lineal entre σ_x y ϵ_x se aplica a todos los puntos del elemento durante la fase de descarga, es posible que la ecuación (4.16) pueda usarse para obtener el cambio del esfuerzo en cualquier punto dado. En otras palabras, la fase de descarga puede manejarse suponiendo que el elemento es completamente elástico.

Los esfuerzos residuales se obtienen aplicando el principio de superposición en forma análoga a la descrita en la sección 2.20, para una carga axial, y para la torsión (sección 3.11). Se analizan, por una parte, los esfuerzos debidos a la aplicación del momento flector M y, por otra, los esfuerzos contrarios debidos al momento flector igual y opuesto $-M$ que se aplica para descargar el elemento. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento *elastoplástico* del material durante la fase de carga, y el segundo grupo la conducta *lineal* del material durante la fase de descarga. Sumando los grupos de esfuerzos, se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el elemento.

EJEMPLO 4.06

Para el elemento del ejemplo 4.05, halle *a*) la distribución de esfuerzos residuales, *b*) el radio de curvatura después que se ha reducido el momento flector del máximo de 36.8 kN · m a cero.

a) Distribución de los esfuerzos residuales. Recuerde, del ejemplo 4.05, que el límite de fluencia es $\sigma_Y = 240$ MPa y que el espesor del núcleo elástico es $2y_Y = 80$ mm. La distribución de esfuerzos en el elemento cargado es la que se muestra en la figura 4.45*a*.

La distribución de los esfuerzos contrarios debidos al momento flector opuesto de 36.8 kN · m requerido para descargar el elemento es lineal, como se observa en la figura 4.45*b*. El esfuerzo máximo σ'_m en esa distribución se obtiene de la ecuación (4.15). Recordando, del ejemplo 4.05, que $I/c = 120 \times 10^{-6}$ m^3, se tiene

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{36.8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{120 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 306.7 \text{ MPa}$$

Superponiendo las dos distribuciones de esfuerzos, se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la figura 4.45*c*. Se verifica que, aunque los esfuerzos contrarios exceden al límite de fluencia σ_Y, la hipótesis de la distribución lineal de los esfuerzos contrarios es válida, ya que no sobrepasan $2\sigma_Y$.

b) Radio de curvatura después de la descarga. Puede aplicarse la ley de Hooke a cualquier parte del núcleo $|y| < 40$ mm, puesto que no ha ocurrido deformación plástica en esa porción del elemento. Así, la deformación residual a la distancia $y = 40$ mm es

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35.5 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = -177.5 \times 10^{-6}$$

Resolviendo la ecuación (4.8) para ρ y sustituyendo los valores apropiados de ϵ_x y de y, se tiene

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{177.5 \times 10^{-6}} = 225 \text{ m}$$

El valor obtenido para ρ, después de remover la carga, representa una deformación permanente del elemento.

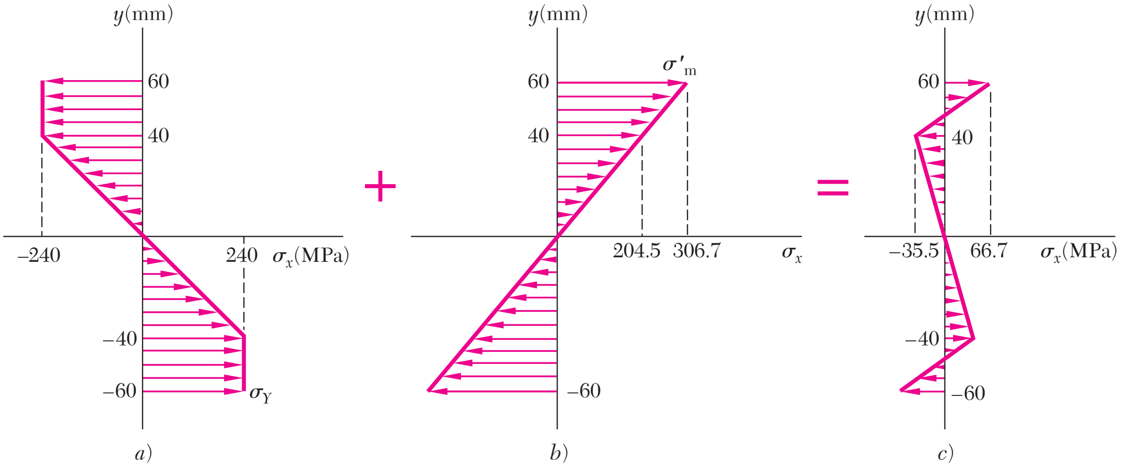
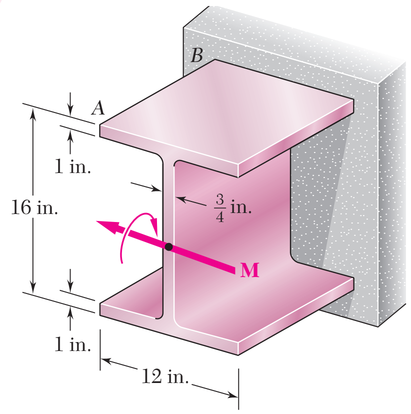


Figura 4.45



PROBLEMA MODELO 4.5

La viga AB está hecha de acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 50$ ksi. Determine, despreciando el efecto de los filetes, el momento flector M y el radio de curvatura correspondiente, *a*) al iniciarse la fluencia, *b*) cuando las aletas se han plastificado completamente.

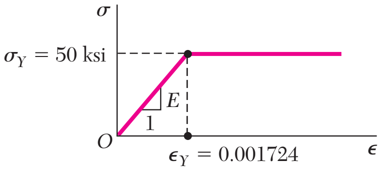
SOLUCIÓN

***a*) Iniciación de la fluencia.** El momento centroidal de inercia de la sección es

$$I = \tfrac{1}{12}(12 \text{ in.})(16 \text{ in.})^3 - \tfrac{1}{12}(12 \text{ in.} - 0.75 \text{ in.})(14 \text{ in.})^3 = 1\,524 \text{ in.}^4$$

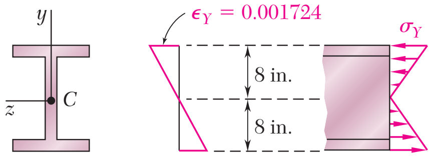
Momento flector. Para $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y = 50$ ksi y $c = 8$ in., se tiene

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(50 \text{ ksi})(1\,524 \text{ in.}^4)}{8 \text{ in.}} \qquad M_Y = 9\,525 \text{ kips} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$



Radio de curvatura. Advirtiendo que, en $c = 8$ in., la deformación unitaria es $\epsilon_Y = \sigma_Y/E = (50 \text{ ksi})/(29 \times 10^6 \text{ psi}) = 0.001724$, se tiene de la ecuación (4.41), que

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \qquad 8 \text{ in.} = 0.001724\rho_Y \qquad \rho_Y = 4\,640 \text{ in.} \blacktriangleleft$$



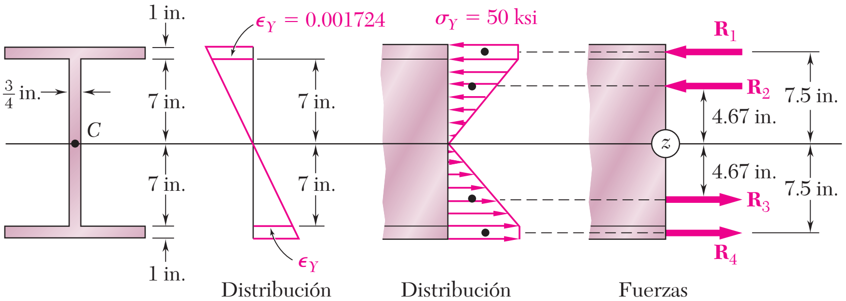
Distribución de deformaciones

Distribución de esfuerzos

***b*) Patines completamente plásticos.** Cuando los patines se han vuelto completamente plásticos, las deformaciones y los esfuerzos en la sección se muestran en la figura que viene a continuación.

Reemplazamos las fuerzas elementales de compresión ejercidas en el patín superior y en la porción superior del alma por sus resultantes $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, y de manera similar se reemplazan las fuerzas de tensión por $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

$$R_1 = R_4 = (50 \text{ ksi})(12 \text{ in.})(1 \text{ in.}) = 600 \text{ kips}$$
$$R_2 = R_3 = \tfrac{1}{2}(50 \text{ ksi})(7 \text{ in.})(0.75 \text{ in.}) = 131.3 \text{ kips}$$



Distribución de deformaciones

Distribución de esfuerzos

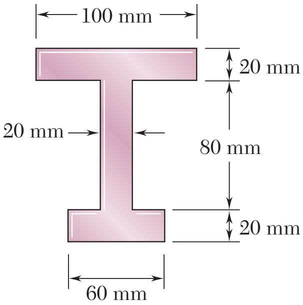
Fuerzas resultantes

Momento flector. Sumando los momentos de $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$ alrededor del eje z, se escribe

$$\begin{aligned} M &= 2[R_1(7.5 \text{ in.}) + R_2(4.67 \text{ in.})] \\ &= 2[(600)(7.5) + (131.3)(4.67)] \end{aligned} \qquad M = 10\,230 \text{ kips} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

Radio de curvatura. Ya que $y_Y = 7$ in. para esta carga, se tiene de la ecuación (4.40) que

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \qquad 7 \text{ in.} = (0.001724)\rho \qquad \rho = 4\,060 \text{ in.} = 338 \text{ ft.} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 4.6

Determine el momento plástico M_p de una viga cuya sección transversal se muestra en la figura, cuando se flexiona alrededor del eje horizontal. Suponga que el material es elastoplástico con un límite de fluencia de 240 MPa.

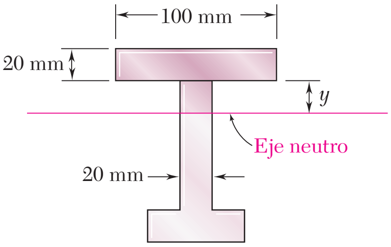
SOLUCIÓN

Eje neutro. Cuando la deformación es totalmente plástica, el eje neutro divide la sección transversal en dos partes cuyas áreas son iguales, puesto que el área total es

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4\,800 \text{ mm}^2$$

el área sobre el eje neutro será de 2 400 mm^2. Se escribe

$$(20)(100) + 20y = 2\,400 \qquad y = 20 \text{ mm}$$



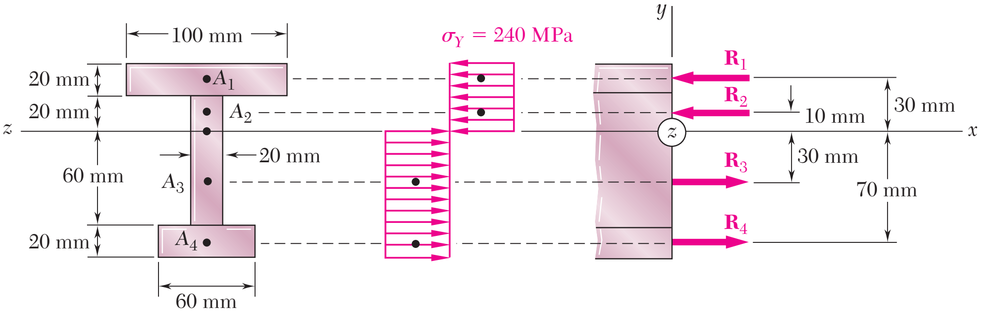
Note que el eje neutro *no* pasa por el centroide de la sección.

Momento plástico. La resultante $\mathbf{R}_i$ de las fuerzas elementales sobre A_i es igual a

$$R_i = A_i\sigma_Y$$

y pasa por el centroide de esa área. Se tiene

$$\begin{aligned}
R_1 &= A_1\sigma_Y = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN}\\
R_2 &= A_2\sigma_Y = [(0.020 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN}\\
R_3 &= A_3\sigma_Y = [(0.020 \text{ m})(0.060 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}\\
R_4 &= A_4\sigma_Y = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}
\end{aligned}$$



El momento plástico M_p se obtiene sumando los momentos de las fuerzas con respecto al eje z.

$$\begin{aligned}
M_p &= (0.030 \text{ m})R_1 + (0.010 \text{ m})R_2 + (0.030 \text{ m})R_3 + (0.070 \text{ m})R_4\\
&= (0.030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0.010 \text{ m})(96 \text{ kN})\\
&\quad + (0.030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0.070 \text{ m})(288 \text{ kN})\\
&= 44.16 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad\qquad M_p = 44.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Nota: Como la sección transversal *no* es simétrica con respecto al eje z, la suma de los momentos de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ *no* es igual a la suma de los momentos de $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

PROBLEMA MODELO 4.7

Para la viga del problema modelo 4.5, halle los esfuerzos residuales y el radio permanente de curvatura después de retirar el par **M** de 10 230 kips · in.

SOLUCIÓN

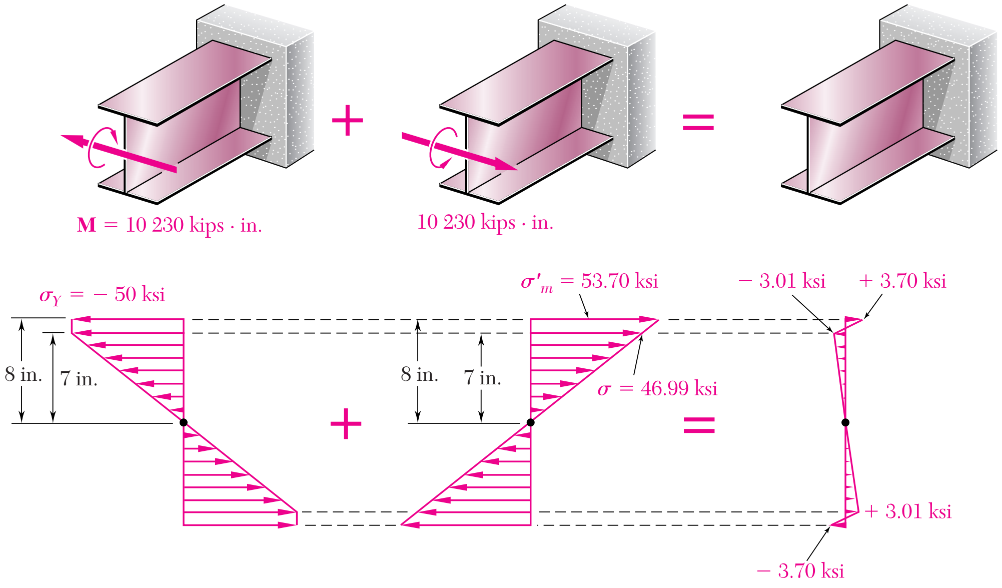
Carga. En el problema modelo 4.5 un par con momento $M = 10\,230$ kips · in. se aplicó y se obtuvieron los esfuerzos mostrados en la figura 1.

Descarga elástica. La viga se descarga por la aplicación de un par de momento $M = -10\,230$ kips · in. (que es igual y opuesto al par originalmente aplicado). Durante esta descarga, la acción de la viga es completamente elástica; recordando del problema modelo 4.5 que $I = 1\,524$ in.^{4}, se calcula el esfuerzo máximo

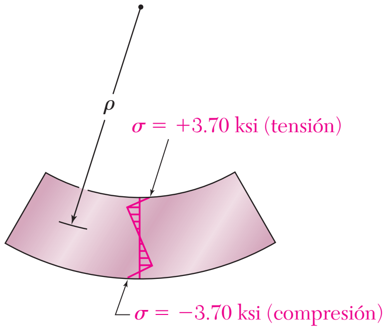
$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(10\,230 \text{ kips} \cdot \text{in.})(8 \text{ in.})}{1\,524 \text{ in.}^4} = 53.70 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos causados por la descarga se muestran en la figura 2.

Esfuerzos residuales. Se superponen los esfuerzos debidos a la carga (figura 1) y a la descarga (figura 2) y se obtienen los esfuerzos residuales en la viga (figura 3).


+
=
M = 10 230 kips · in.
10 230 kips · in.
$\sigma_Y = -50$ ksi
8 in.
7 in.
+
8 in.
7 in.
$\sigma'_m = 53.70$ ksi
$\sigma = 46.99$ ksi
=
− 3.01 ksi
+ 3.70 ksi
+ 3.01 ksi
− 3.70 ksi

1) 2) 3)


ρ
$\sigma = +3.70$ ksi (tensión)
$\sigma = -3.70$ ksi (compresión)

Radio permanente de curvatura. En $y = 7$ in. el esfuerzo residual es $\sigma = -3.01$ ksi. Ya que no ocurrió deformación plástica en este punto, se aplica la ley de Hooke y se tiene que $\epsilon_x = \sigma/E$. Recordando la ecuación (4.8), se tiene que

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{yE}{\sigma} = -\frac{(7 \text{ in.})(29 \times 10^6 \text{ psi})}{-3.01 \text{ ksi}} = +67\,400 \text{ in.} \qquad \rho = 5\,620 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

Se advierte que el esfuerzo residual es en tensión sobre la cara superior de la viga y de compresión en la cara inferior, aun cuando la viga es cóncava hacia arriba.

PROBLEMAS

4.67 La barra prismática que se muestra en la figura, hecha de un acero que se supone elastoplástico con $\sigma_Y = 300$ MPa, se somete a un par **M** paralelo al eje x. Determine el momento M del par para el que *a*) ocurre la cedencia, *b*) el núcleo elástico de la barra tiene un grosor de 4 mm.

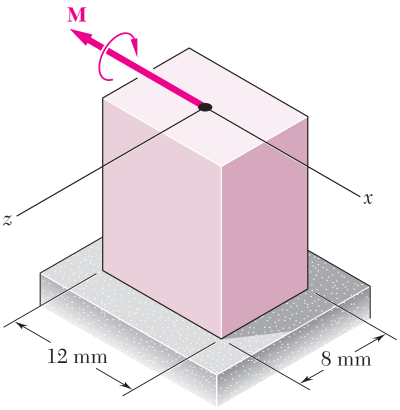


Figura P4.67

4.68 Retome el problema 4.67, y ahora suponga que el par **M** es paralelo al eje z.

4.69 Una barra, con la sección transversal rectangular que se muestra en la figura, está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 30 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 48$ ksi. Determine el espesor de las zonas plásticas en las partes superior e inferior de la barra cuando *a*) $M = 250$ lb · in., *b*) $M = 300$ lb · in.

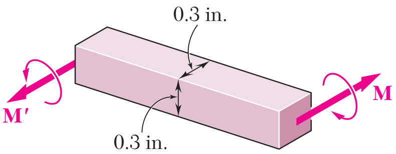


Figura P4.69

4.70 Para la barra de acero del problema 4.69, determine el momento flector M del par para el cual *a*) ocurre la cedencia, *b*) las zonas plásticas en las partes superior e inferior de la barra son de 0.09 in. de espesor.

4.71 La barra prismática que se muestra en la figura, hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, se somete a un par de 1 350 lb · in. paralelo al eje z. Determine *a*) el grosor del núcleo elástico, *b*) el radio de curvatura de la barra.

4.72 Retome el problema 4.71, y ahora suponga que el par de 1 350 lb · in. es paralelo al eje y.

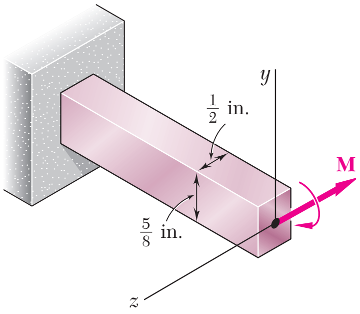


Figura P4.71

4.73 y 4.74 Una barra con la sección transversal que se muestra en la figura está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 240$ MPa. Para una flexión alrededor del eje z, encuentre el momento flector en el que a) ocurre la cedencia, b) las zonas plásticas encima y debajo de la barra tienen un espesor de 30 mm.

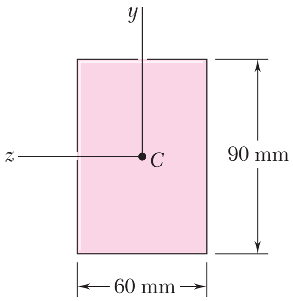


Figura P4.73

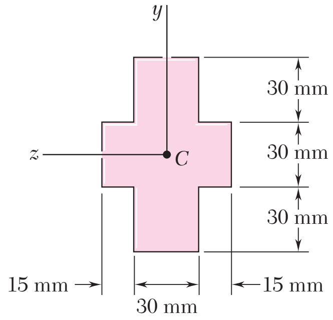


Figura P4.74

4.75 y 4.76 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 42$ ksi. Para una flexión alrededor del eje z, determine el momento flector para el que a) ocurre la cedencia, b) las zonas plásticas encima y debajo de la barra son de 1 in. de espesor.

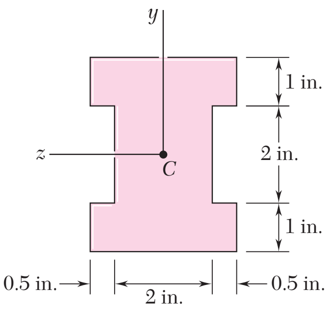


Figura P4.75

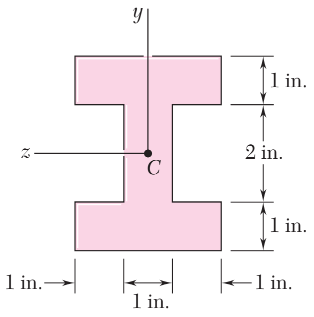


Figura P4.76

4.77 a 4.80 Para la viga indicada determine a) el momento completamente plástico M_p, b) el factor de forma de la sección transversal.

4.77 Viga del problema 4.73.
4.78 Viga del problema 4.74.
4.79 Viga del problema 4.75.
4.80 Viga del problema 4.76.

4.81 y 4.82 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero con la sección transversal que se muestra en la figura, suponga que el acero es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 240 MPa.

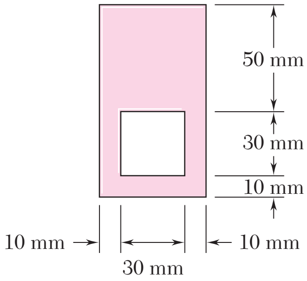


Figura *P4.81*

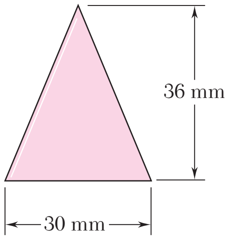


Figura P4.82

4.83 Un tubo de pared gruesa con la sección transversal que se muestra en la figura, está hecho de un acero que se supone elastoplástico con una resistencia a la cedencia σ_Y. Desarrolle una expresión para el momento plástico M_p del tubo en términos de c_1, c_2 y σ_Y.

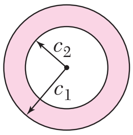


Figura *P4.83* y P4.84

4.84 Determine el momento plástico M_p de un tubo de pared gruesa con la sección transversal que se muestra en la figura, si se sabe que $c_1 = 60$ mm, $c_2 = 40$ mm y $\sigma_Y = 240$ MPa.

4.85 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero con la sección transversal que se muestra en la figura, para ello suponga que el acero es elastoplástico y que tiene una resistencia a la cedencia de 48 ksi.

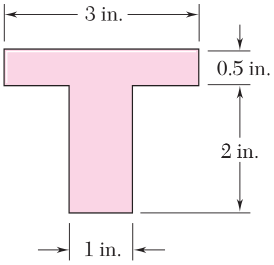


Figura P4.85

4.86 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero con la sección transversal que se muestra en la figura, para ello suponga que el acero es elastoplástico y que tiene una resistencia a la cedencia de 36 ksi.

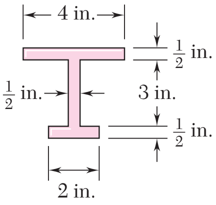


Figura P4.86

4.87 y 4.88 Sobre la viga indicada se aplica y después se retira un par con momento igual al momento completamente plástico M_p. Con una resistencia a la cedencia de 240 MPa, determine el esfuerzo residual en $y = 45$ mm.

4.87 Viga del problema 4.73.
4.88 Viga del problema 4.74.

4.89 y 4.90 Sobre la viga indicada se aplica y después se retira un par con momento igual al momento completamente plástico M_p. Con una resistencia a la cedencia de 42 ksi, determine el esfuerzo residual en *a*) $y = 1$ in., *b*) $y = 2$ in.

4.89 Viga del problema 4.75.
4.90 Viga del problema 4.76.

4.91 Un momento flector se aplica a la viga del problema 4.73, por lo que se desarrollan zonas plásticas de 30 mm de espesor encima y debajo de la barra. Después de que el par se ha retirado, determine *a*) los esfuerzos residuales en $y = 45$ mm, *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la viga.

4.92 Un momento flector se aplica a la viga del problema 4.76, por lo que se desarrollan zonas plásticas de 2 in. de espesor encima y debajo de la barra. Después de que el par se ha retirado, determine *a*) los esfuerzos residuales en $y = 2$ in., *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la viga.

***4.93** Una barra rectangular recta y sin esforzar es flexionada para formar un arco de círculo con radio ρ mediante dos pares con momento M. Después de que los pares se retiran, se observa que el radio de curvatura de la barra es ρ_R. Denote con ρ_Y el radio de curvatura de la barra al inicio de la cedencia y muestre que los radios de curvatura satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_Y}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_Y}\right)^2\right]\right\}$$

4.94 Una barra con sección transversal rectangular es de un material que se supone elastoplástico. Denote con M_Y y con ρ_Y, respectivamente, el momento flector y el radio de curvatura al inicio de la cedencia, determine *a*) el radio de curvatura cuando un par con momento $M = 1.25\ M_Y$ se aplica a la barra, *b*) el radio de curvatura después de que se retira el par. Verifique los resultados con la relación deducida en el problema 4.93.

4.95 La barra prismática *AB* está hecha de un acero que se supone elastoplástico y para el que $E = 200$ GPa. Si se sabe que el radio de curvatura de la barra es de 2.4 m cuando se aplica un par con momento $M = 350$ N · m, como se indica en la figura, determine *a*) la resistencia a la cedencia del acero, *b*) el espesor del núcleo elástico de la barra.

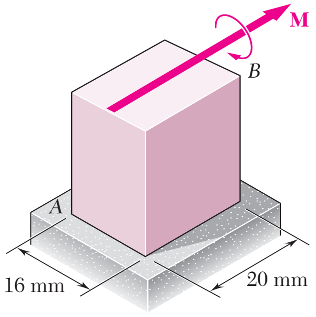


Figura P4.95

4.96 La barra prismática *AB* es de una aleación de aluminio para la que el diagrama de esfuerzo-deformación unitaria a tensión es como se muestra en la figura. Suponga que el diagrama σ-ϵ es el mismo a compresión que a tensión, determine *a*) el radio de curvatura de la barra cuando el esfuerzo máximo es de 250 MPa, *b*) el valor correspondiente del momento flector. (*Sugerencia*: Para el inciso *b*), grafique σ frente a y y utilice un método aproximado de integración.)

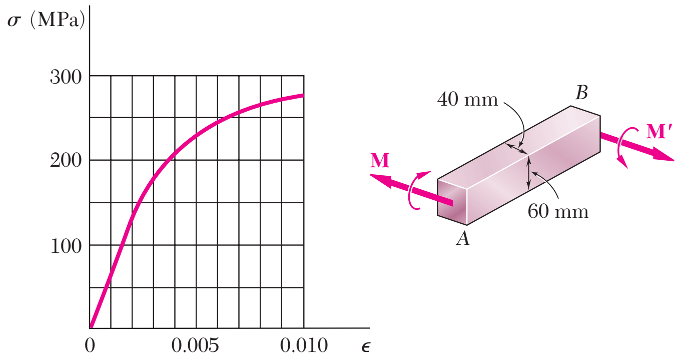


Figura *P4.96*

4.97 La barra prismática *AB* está hecha de una aleación de bronce con un diagrama de esfuerzo-deformación a tensión como se muestra en la figura. Suponga que el diagrama σ-ϵ es el mismo a compresión que a tensión, determine *a*) el esfuerzo máximo en la barra cuando el radio de curvatura de la barra es de 100 in., *b*) el valor correspondiente del momento flector. (Vea la sugerencia dada en el problema 4.96.)

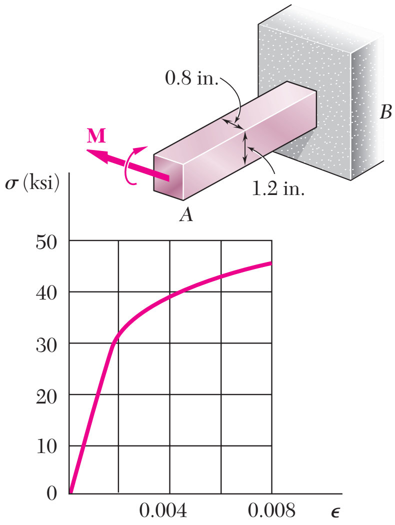


Figura P4.97

4.98 Una barra prismática de sección rectangular es de una aleación para la cual el diagrama esfuerzo-deformación se representa mediante la relación $\epsilon = k\sigma^n$ para $\sigma > 0$ y $\epsilon = -|k\sigma^n|$ para $\sigma < 0$. Si se aplica un par **M** a la barra, demuestre que el esfuerzo máximo es

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n}\frac{Mc}{I}$$

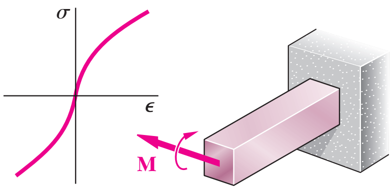


Figura P4.98

4.12 CARGA AXIAL EXCÉNTRICA EN UN PLANO DE SIMETRÍA

En la sección 1.5 se estudió que la distribución de esfuerzos en la sección transversal de un elemento sometido a carga axial puede considerarse uniforme sólo si la línea de acción de las cargas **P** y **P′** pasan por el centroide de la sección. Se dice que dicha carga es *céntrica*. Ahora se estudiará la distribución de esfuerzos cuando la línea de acción de las fuerzas *no* pasa por el centroide, es decir, cuando la carga es *excéntrica*.

Dos ejemplos de una carga excéntrica se presentan en las figuras 4.46 y 4.47. En el caso del arbotante de iluminación de la autopista, el peso de la lámpara causa una carga excéntrica en el poste. De la misma manera, las fuerzas verticales ejercidas sobre la prensa causan una carga excéntrica en la columna posterior de la prensa.

Figura 4.46

Figura 4.47

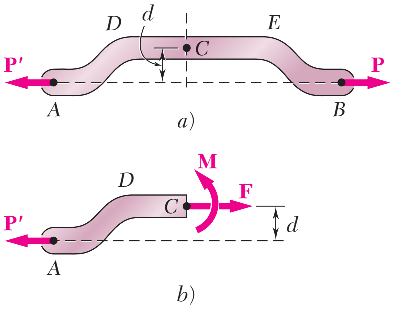


Figura 4.48

En esta sección, el análisis se restringirá a elementos que tienen un plano de simetría, y se supondrá que las cargas se aplican en el plano de simetría del elemento (figura 4.48*a*). Las fuerzas internas que actúan en una sección transversal dada pueden representarse por la fuerza **F** aplicada en el centroide *C* de la sección y a un par **M** que actúa en el plano de simetría del elemento (figura 4.48*b*). Las condiciones de equilibrio del cuerpo libre *AC* requieren que la fuerza **F** sea igual y opuesta a **P′** y que el momento del par **M** sea igual y opuesto al momento de **P′** con respecto a *C*. Llamando *d* a la distancia desde *C* hasta la línea de acción *AB* de las fuerzas **P** y **P′**, se tiene

$$F = P \qquad \text{y} \qquad M = Pd \tag{4.49}$$

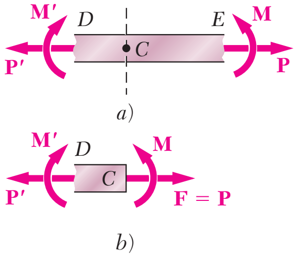


Figura 4.49

Se observa que las fuerzas internas en la sección se hubieran representado por la misma fuerza y el mismo par si la porción recta *DE* del elemento *AB* se hubiera separado de *AB* y sometido simultáneamente a las fuerzas céntricas **P** y **P′** y a los pares de flexión **M** y **M′** (figura 4.49). Así, la distribución de esfuerzos debida a la carga excéntrica original puede obtenerse superponiendo la distribución uniforme del esfuerzo correspondiente a las cargas céntricas **P** y **P′** y la distribución lineal correspondiente a los pares flectores **M** y **M′** (figura 4.50).

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{céntrica}} + (\sigma_x)_{\text{flexión}}$$

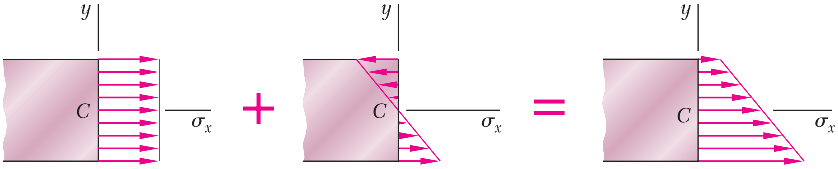


Figura 4.50

o, recordando las ecuaciones (1.5) y (4.16):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

donde A es el área de la sección transversal e I su momento centroidal de inercia, y donde y se mide desde el eje centroidal de la sección. La relación obtenida muestra que la distribución de esfuerzos en la sección es *lineal pero no uniforme*. Dependiendo de la geometría de la sección transversal y de la excentricidad de la carga, los esfuerzos combinados pueden tener todos el mismo signo, como en la figura 4.50, o algunos pueden ser positivos y otros negativos, como en la figura 4.51. En el último caso habrá una línea en la sección, a lo largo de la cual $\sigma_x = 0$. Esta línea representa el *eje neutro* de la sección. Se observa que el eje neutro *no* coincide con el eje centroidal de sección, ya que $\sigma_x \neq 0$ para $y = 0$.

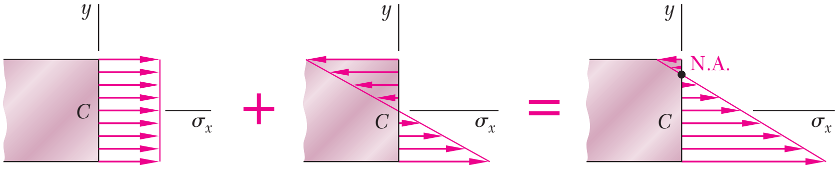


Figura 4.51

Los resultados obtenidos serán válidos sólo hasta el punto que se satisfagan las condiciones de aplicación del principio de superposición (sección 2.12) y del principio de Saint-Venant (véase sección 2.17). Esto implica que los esfuerzos no deben exceder el límite de proporcionalidad del material, que las deformaciones por la flexión tampoco deben afectar apreciablemente la distancia d en la figura 4.48*a* y que la sección transversal donde se calculan los esfuerzos no esté muy próxima a los puntos D o E de la misma figura. El primero de estos requisitos muestra claramente que el método de superposición no puede aplicarse a deformaciones plásticas.

EJEMPLO 4.07

Una cadena de eslabón abierto se obtiene doblando barras de acero de bajo carbono, de 0.5 in. de diámetro, hasta darles la forma que se aprecia en la figura 4.52. Si la cadena soporta una fuerza de 160 lb, determine *a*) los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la parte recta del eslabón, *b*) la distancia entre los ejes centroidal y neutro de una sección transversal.

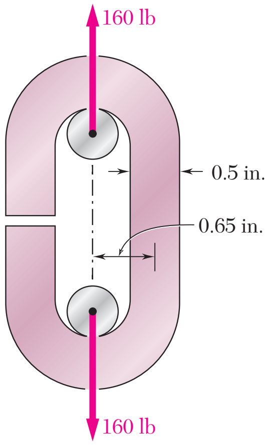


Figura 4.52

a) Máximos esfuerzos de tensión y compresión. Las fuerzas internas en la sección transversal son equivalentes a una fuerza céntrica **P** y a un momento flector **M** (figura 4.53) de magnitudes

$$P = 160 \text{ lb}$$
$$M = Pd = (160 \text{ lb})(0.65 \text{ in.}) = 104 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

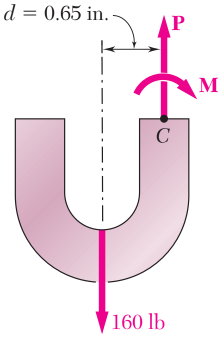
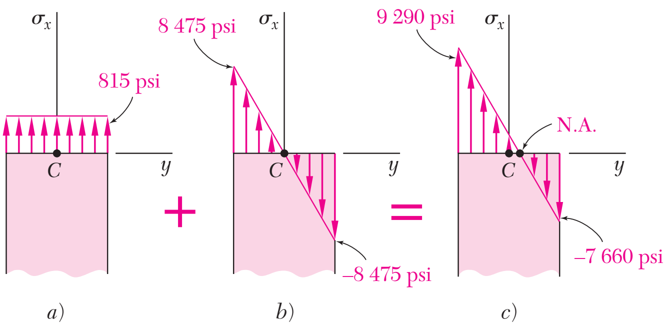


Figura 4.53

Las distribuciones de esfuerzos correspondientes se indican en las partes *a*) y *b*) de la figura 4.54. La distribución debida a la fuerza céntrica **P** es uniforme e igual a $\sigma_0 = P/A$. Se tiene

$$A = \pi c^2 = \pi(0.25 \text{ in.})^2 = 0.1963 \text{ in.}^2$$
$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{160 \text{ lb}}{0.1963 \text{ in.}^2} = 815 \text{ psi}$$



a) *b*) *c*)

Figura 4.54

Debido al par de flexión **M**, la distribución es lineal y posee un esfuerzo máximo $\sigma_m = Mc/I$.

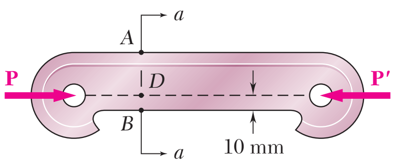
$$I = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0.25 \text{ in.})^4 = 3.068 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(104 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.25 \text{ in.})}{3.068 \times 10^{-3} \text{ in.}^4} = 8\,475 \text{ psi}$$

Superponiendo las dos distribuciones se obtiene la distribución de esfuerzos correspondientes a la carga excéntrica (figura 4.54*c*). Los esfuerzos máximos de tensión y compresión de la sección son, respectivamente

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 815 + 8\,475 = 9\,290 \text{ psi}$$
$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 815 - 8\,475 = -7\,660 \text{ psi}$$

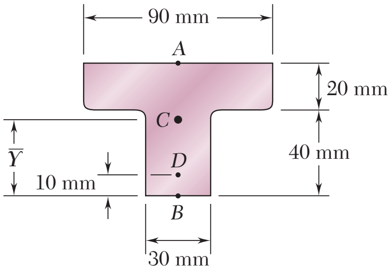
b) Distancia entre los ejes centroidal y neutro. La distancia y_0 entre los ejes centroidal y neutro de la sección se obtiene haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.50); resolviendo para y_0:

$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$
$$y_0 = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right) = (815 \text{ psi})\frac{3.068 \times 10^{-3} \text{ in.}^4}{104 \text{ lb} \cdot \text{in.}}$$
$$y_0 = 0.0240 \text{ in.}$$



PROBLEMA MODELO 4.8

Sabiendo que para el conector de hierro colado, que se ilustra en la figura, los esfuerzos permisibles son 30 MPa a tensión y 120 MPa a compresión, halle la máxima fuerza **P** que puede aplicarse al conector. (*Nota*: En el problema modelo 4.2 ya se había estudiado la sección en T del conector.)



Sección *a-a*

SOLUCIÓN

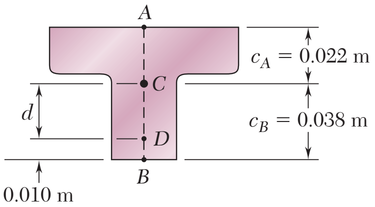
Propiedades de la sección transversal. Del problema modelo 4.2, se tiene

$$A = 3\,000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \qquad \overline{Y} = 38 \text{ mm} = 0.038 \text{ m}$$
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Ahora se escribe: $d = (0.038 \text{ m}) - (0.010 \text{ m}) = 0.028 \text{ m}$

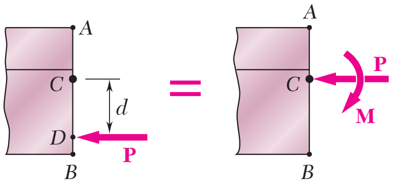
Fuerza y par en *C*. Se reemplaza **P** por un sistema equivalente fuerza-par en el centroide *C*.

$$P = P \qquad M = P(d) = P(0.028 \text{ m}) = 0.028\, P$$



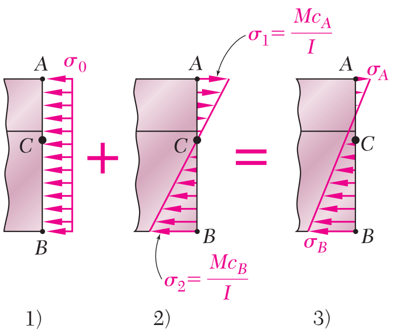
La fuerza **P** que actúa en el centroide causa una distribución de esfuerzo uniforme (figura 1). El par de flexión **M** produce una distribución de esfuerzo lineal (figura 2).

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333P \qquad \text{(Compresión)}$$
$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0.028P)(0.022)}{868 \times 10^{-9}} = 710P \qquad \text{(Tensión)}$$
$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0.028P)(0.038)}{868 \times 10^{-9}} = 1\,226P \qquad \text{(Compresión)}$$



Superposición. La distribución total de esfuerzos (figura 3) se encuentra superponiendo las distribuciones de esfuerzos causadas por la fuerza céntrica **P** y por el par **M**. Como la tensión es positiva y la compresión negativa, se tiene:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333P + 710P = +377P \qquad \text{(Tensión)}$$
$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333P - 1\,226P = -1\,559P \qquad \text{(Compresión)}$$



Fuerza máxima permisible. La magnitud de **P**, para la cual el esfuerzo de tensión en el punto *A* es igual al esfuerzo permisible de tensión de 30 MPa, se encuentra escribiendo:

$$\sigma_A = 377P = 30 \text{ MPa} \qquad P = 79.6 \text{ kN} \triangleleft$$

También se determina la magnitud de **P** para la cual el esfuerzo en *B* es igual al esfuerzo de compresión de 120 MPa.

$$\sigma_B = -1\,559P = -120 \text{ MPa} \qquad P = 77.0 \text{ kN} \triangleleft$$

La magnitud de la máxima fuerza que puede aplicarse en **P**, sin exceder alguno de los esfuerzos permisibles, es el menor de los dos valores encontrados.

$$P = 77.0 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.99 Determine el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *a*) para la carga que se muestra en la figura, *b*) si las cargas de 15 kip se aplican únicamente en los puntos 1 y 2.

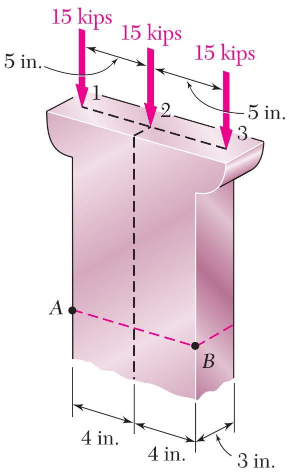


Figura P4.99 y P4.100

4.100 Determine el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *a*) para la carga que se muestra en la figura, *b*) si las cargas de 15 kip que se aplican en los puntos 2 y 3 son retiradas.

4.101 Dos fuerzas **P** pueden aplicarse por separado o al mismo tiempo sobre una placa que está soldada a una barra circular de radio *r*. Determine el esfuerzo de compresión máximo en la barra circular, *a*) cuando se aplican ambas fuerzas, *b*) cuando sólo se aplica una de las fuerzas.

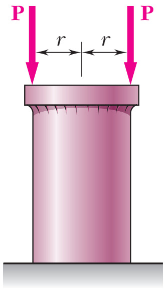


Figura P4.101

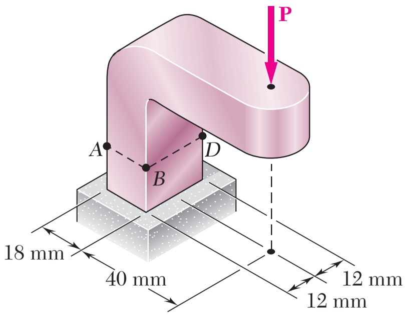


Figura *P4.102*

4.102 Si se sabe que la magnitud de la fuerza vertical **P** es de 2 kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.103 La porción vertical de la prensa que se muestra en la figura consta de un tubo rectangular con un espesor de pared $t = 10$ mm. Si se sabe que la prensa se ha apretado sobre unas planchas de madera que se pegaron hasta que $P = 20$ kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

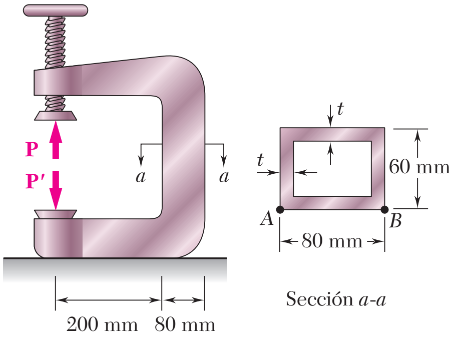


Figura P4.103

4.104 Retome el problema 4.103, y ahora suponga que $t = 8$ mm.

4.105 Las porciones de una barra cuadrada de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ in. se han doblado hasta formar los dos componentes de máquina que se muestran en la figura. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 15 ksi, determine la carga máxima que puede aplicarse a cada componente.

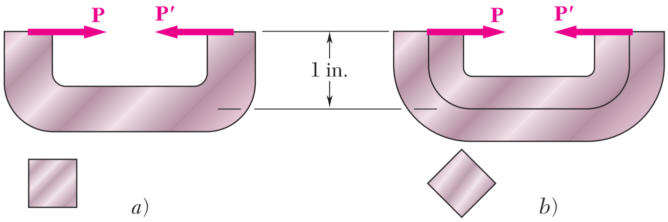


Figura P4.105

4.106 Las cuatro fuerzas que se muestran en la figura se aplican a una placa rígida que soporta un poste de acero con radio *a*. Si se sabe que $P = 100$ kN y $a = 40$ mm, determine el esfuerzo máximo en el poste cuando *a*) se retira la fuerza en *D*, *b*) se retiran las fuerzas en *C* y en *D*.

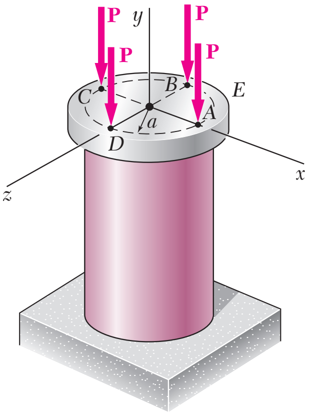


Figura P4.106

4.107 Mediante fresado se removió una porción de una barra sólida de sección cuadrada. Si se sabe que $a = 30$ mm, $d = 20$ mm y $\sigma_{\text{perm}} = 60$ MPa, determine la magnitud P de la fuerza mayor que puede aplicarse con seguridad en los centros de los extremos de la barra.

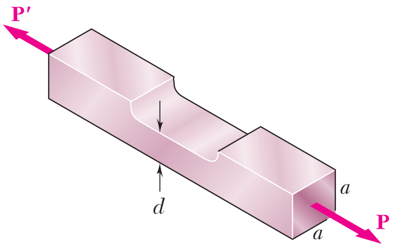


Figura P4.107 y P4.108

4.108 Mediante fresado se removió una porción de una barra sólida de sección cuadrada. Se aplicaron fuerzas de magnitud $P = 18$ kN en los centros de los extremos de la barra. Si se sabe que $a = 30$ mm y $\sigma_{\text{perm}} = 135$ MPa, determine la profundidad d mínima permisible de la porción fresada de la barra.

4.109 Es necesario realizar un doblez h en una varilla circular sólida con diámetro d. Si se sabe que el esfuerzo máximo después de que se produce el doblez no debe exceder 5 veces el esfuerzo en la varilla cuando estaba recta, determine el máximo doblez a realizar.

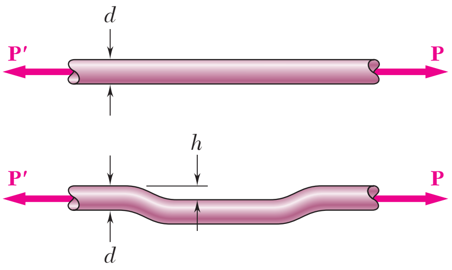


Figura *P4.109* y P4.110

4.110 Es necesario realizar un doblez h en un tubo de metal de 0.75 in. de diámetro exterior y 0.08 in. de grosor de pared. Si se sabe que el esfuerzo máximo después de que se produce el doblez no debe exceder 4 veces el esfuerzo en la varilla cuando estaba recta, determine el máximo doblez a realizar.

4.111 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección ABD es de 10 ksi, determine la máxima fuerza **P** que puede aplicarse a la ménsula mostrada en la figura.

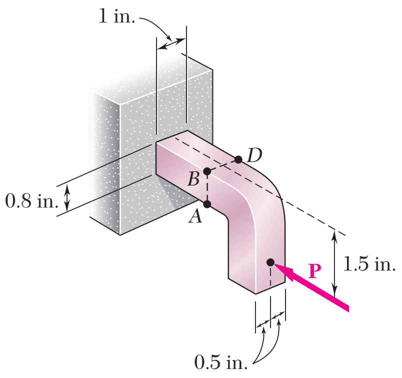


Figura *P4.111*

4.112 Una columna corta se fabrica clavando dos tablas de 1 × 4 in. a un madero de 4 × 4 in. Determine el esfuerzo máximo de compresión causado en la columna por una carga de 16 kip aplicada en el centro de la sección superior del madero como se muestra en la figura, si *a*) la columna es como se ha descrito, *b*) se retira la tabla 1, *c*) se retiran ambas tablas, *d*) se retiran las tablas 1, 2 y 3, *e*) se retiran todas las tablas.

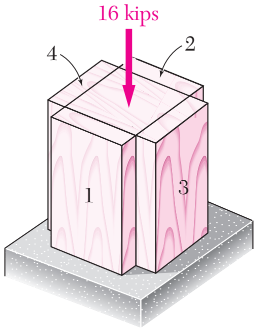


Figura *P4.112*

4.113 Si se sabe que la prensa mostrada se apretó sobre unas tablas de madera pegadas hasta que $P = 400$ N, determine en la sección *a-a*, *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el esfuerzo en el punto *D*, *c*) la localización del eje neutro.

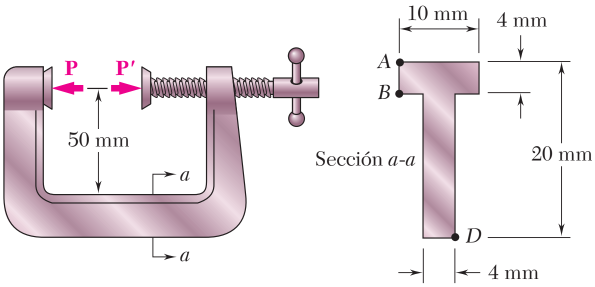


Figura P4.113

4.114 Tres placas de acero, cada una con sección transversal de 25 × 150 mm, se sueldan para formar una columna corta H. Luego, por razones arquitectónicas, se retira una tira de 25 mm de cada lado de una de las aletas. Si se sabe que la carga permanece céntrica respecto a la sección transversal original y que el esfuerzo permisible es de 100 MPa, determine la máxima fuerza **P**, que puede aplicarse a *a*) la columna original, *b*) la columna modificada.

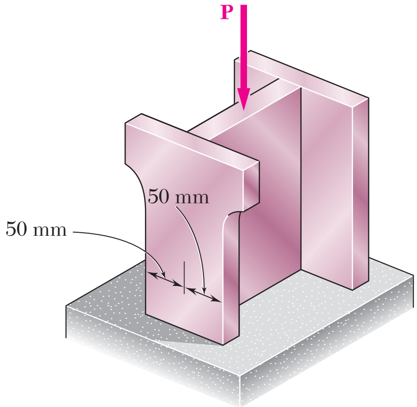


Figura P4.114

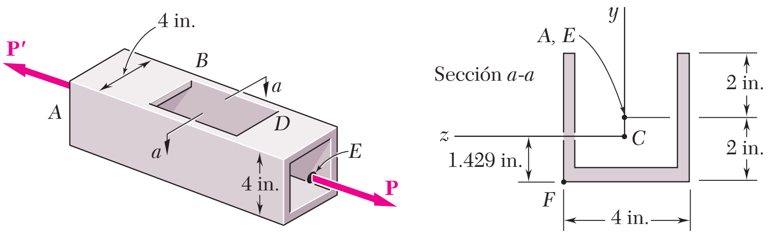


Figura *P4.115*

4.115 Con la intención de proporcionar acceso al interior de un tubo cuadrado hueco con un grosor de pared de 0.25 in., se ha removido la porción *CD* de un lado del tubo. Si se sabe que la carga del tubo es equivalente a las dos fuerzas iguales y opuestas de 15 kip que actúan en los centros geométricos *A* y *E* de los extremos del tubo, determine *a*) el esfuerzo máximo en la sección *a-a*, *b*) el esfuerzo en el punto *F*. *Dato*: el centroide de la sección transversal está en *C* e $I_z = 4.81$ in.^{4}

4.116 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección *a-a* de la prensa hidráulica mostrada en la figura es de 6 ksi en tensión y 12 ksi en compresión, determine la máxima fuerza **P** que puede ejercer la prensa.

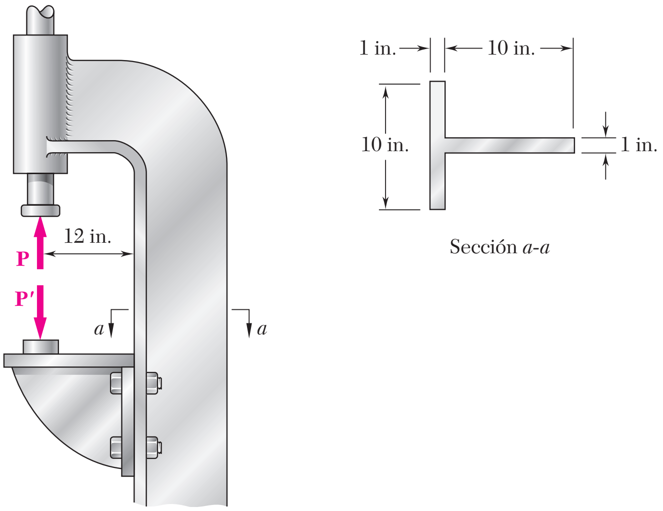


Figura P4.116

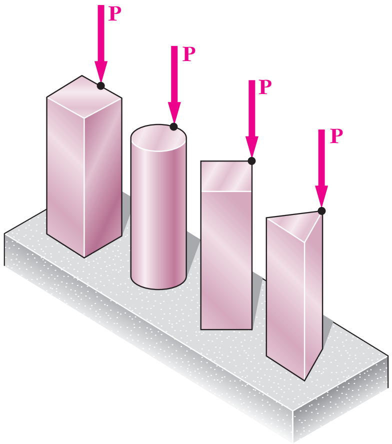


Figura P4.117

4.117 Las cuatro barras que se muestran en la figura tienen la misma área de sección transversal. Para las cargas dadas, muestre que *a*) los esfuerzos máximos de compresión tienen la razón 4:5:7:9, *b*) los esfuerzos máximos de tensión tienen la razón 2:3:5:3. (*Nota*: La sección transversal de la barra triangular es un triángulo equilátero.)

4.118 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección *a-a* del soporte mostrado en la figura es de 150 MPa, determine *a*) la máxima fuerza vertical **P** que puede aplicarse en el punto *A*, *b*) la localización correspondiente del eje neutro en la sección *a-a*.

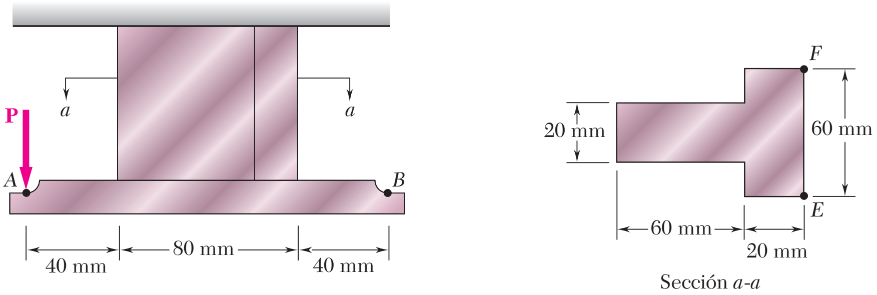


Figura P4.118

4.119 Retome el problema 4.118, y ahora suponga que la fuerza vertical **P** se aplica en el punto *B*.

4.120 La barra de acero con forma de C se utiliza como un dinamómetro para determinar la magnitud P de las fuerzas mostradas. Si se sabe que la sección transversal de la barra es un cuadrado con lado de 1.6 in. y que después de medir la deformación unitaria en el borde interior se encontró que era de 450 μ, determine la magnitud P de las fuerzas. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

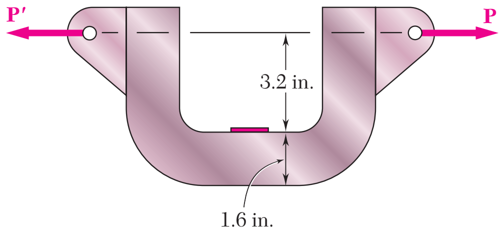


Figura P4.120

4.121 Un tramo corto de una columna de acero laminado soporta una placa rígida sobre la que se aplican dos cargas **P** y **Q**, como se muestra en la figura. Al medir las deformaciones unitarias en dos puntos A y B sobre la línea central de las caras externas de los patines se obtuvo

$$\epsilon_A = -400 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_B = -300 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la magnitud de cada carga.

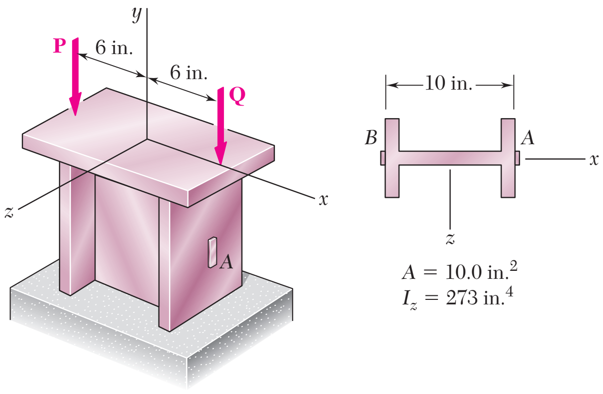


Figura P4.121

4.122 Una fuerza axial excéntrica **P** se aplica, como se muestra en la figura, a una barra de acero con sección transversal de 25 × 90 mm. Las deformaciones unitarias en A y B se midieron como

$$\epsilon_A = +350\ \mu \qquad \epsilon_B = -70\ \mu$$

Si se sabe que $E = 200$ GPa, determine *a*) la distancia d, *b*) la magnitud de la fuerza **P**.

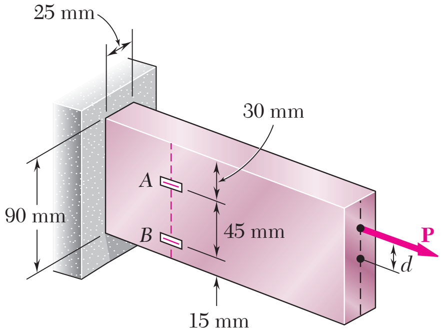


Figura P4.122

4.123 Retome el problema 4.122, y ahora suponga que las deformaciones unitarias medidas son

$$\epsilon_A = +600\ \mu \qquad \epsilon_B = +420\ \mu$$

4.124 La fuerza axial excéntrica **P** actúa en el punto D, que debe estar localizado 25 mm por debajo de la superficie superior de la barra de acero que se muestra en la figura. Para $P = 60$ kN, determine *a*) la profundidad d de la barra para la cual el esfuerzo de tensión en el punto A es máximo, *b*) el esfuerzo correspondiente en el punto A.

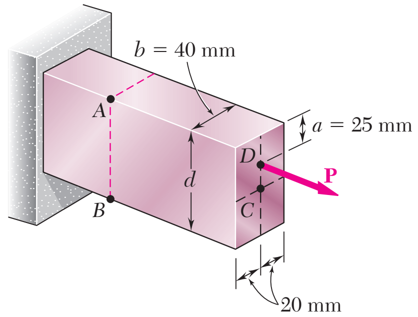
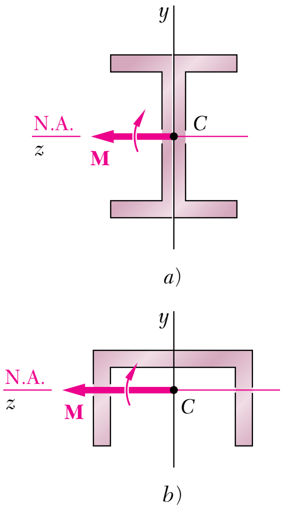


Figura *P4.124*

4.125 Para la barra y la carga del problema 4.124, determine *a*) la profundidad d de la barra para la cual el esfuerzo de compresión en el punto B es máximo, *b*) el esfuerzo correspondiente en el punto B.

4.13 FLEXIÓN ASIMÉTRICA



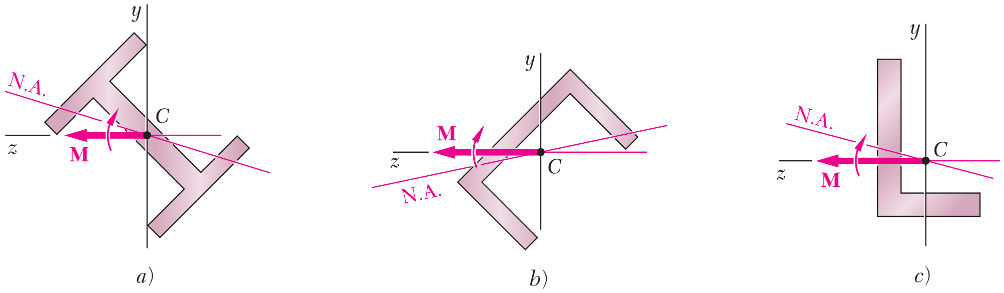
a)

b)

Figura 4.55

Hasta ahora, el estudio de la flexión pura se ha limitado a elementos que poseen por lo menos un plano de simetría y están sometidos a flexión en ese plano. Debido a la simetría de tales elementos y de sus cargas, se concluyó que éstos permanecían simétricos con respecto al plano de los pares, y que se flexionarían en dicho plano (vea la sección 4.3). Esto se ilustra en la figura 4.55: la parte *a* muestra la sección transversal de un elemento con dos planos de simetría, uno vertical y otro horizontal, y la parte *b* muestra la sección transversal de un elemento con un solo plano de simetría, vertical. En ambos casos el par actúa en el plano vertical de simetría del elemento y se representa mediante el vector horizontal **M**, y en los dos casos el eje neutro de la sección coincide con el eje del par.

Ahora se estudiarán casos en donde los pares de flexión *no* actúan en un plano de simetría del elemento, ya sea porque actúan en un plano diferente o porque el elemento carece de plano de simetría. En tales casos, no es posible suponer que el elemento se flexiona en el plano de los pares. Esto se ilustra en la figura 4.56. En cada parte de la figura, se supone que el par ejercido sobre la sección actúa en un plano vertical y se ha representado me-



a) *b*) *c*)

Figura 4.56

diante un momento horizontal **M**. Sin embargo, como el plano vertical no es de simetría, *no puede esperarse que el elemento se flexione en ese plano o que el eje neutro de la sección coincida con el eje del par*.

Se propone hallar las condiciones precisas para que el eje neutro de una sección transversal de forma arbitraria coincida con el eje del par **M** que representa las fuerzas que actúan en la sección. Tal sección se muestra en la figura 4.57 y tanto el vector **M** como el eje neutro se han supuesto dirigidos a lo largo del eje z. Recuerde, de la sección 4.2, que si se expresa que las fuerzas elementales internas $\sigma_x dA$ forman un sistema equivalente a **M**, se obtiene

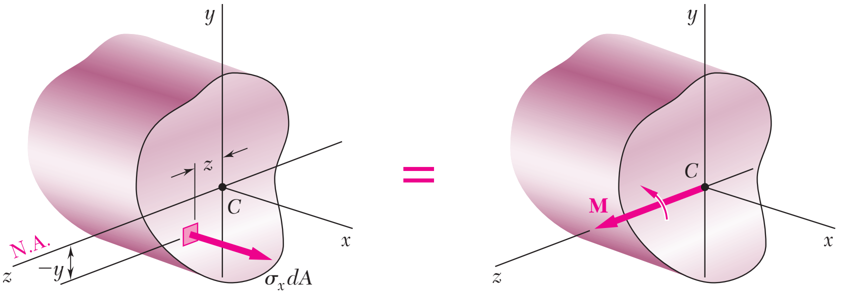


Figura 4.57

componentes en x: $\int \sigma_x dA = 0$ (4.1)

momentos con respecto al eje y: $\int z\sigma_x dA = 0$ (4.2)

momentos con respecto al eje z: $\int(-y\sigma_x dA) = M$ (4.3)

Como se analizó antes, si todos los esfuerzos están dentro del límite elástico, la primera ecuación conduce a la exigencia de que el eje neutro sea un eje centroidal, y la última, a la relación básica $\sigma_x = -My/I$. Como se había supuesto en la sección 4.2 que la sección transversal era simétrica con respecto al eje y, la ecuación (4.2) no se tomó en cuenta por trivial. Ahora que la sección es de forma arbitraria, la ecuación (4.2) se vuelve muy importante. Suponiendo que los esfuerzos permanecen dentro del límite de proporcionalidad del material, puede sustituirse $\sigma_x = -\sigma_m y/c$ en la ecuación (4.2) y escribir

$$\int z\left(-\frac{\sigma_m y}{c}\right) dA = 0 \qquad \text{o} \qquad \int yz\,dA = 0 \tag{4.51}$$

La integral $\int yz\,dA$ representa el producto de la inercia I_{yz} de la sección transversal con respecto a los ejes y y z, y será cero si estos ejes son los *ejes principales centroidales de la sección*.† Así es posible concluir que el eje neutro de la sección transversal coincidirá con el eje del par **M** que representa las fuerzas que actúan en esa sección *si, y sólo si, el vector* **M** *se dirige a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de dicha sección transversal*.

---

† Véase Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1987, o *Vector Mechanics for Engineers*, 7a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004, secciones 9.8-9.10.

Se observa que las secciones mostradas en la figura 4.55 son simétricas por lo menos con respecto a uno de los ejes coordenados. Se deduce que, en cada caso, los ejes y y z son los ejes principales centroidales de la sección. Como el vector **M** se dirige a lo largo de uno de los ejes centroidales principales, se verifica que el eje neutro coincide con el eje del par. También se nota que, si las secciones transversales giran 90° (figura 4.58), el vector par **M** todavía estará dirigido a lo largo del eje centroidal principal, y el eje neutro coincidirá de nuevo con el eje del par, aunque en el caso *b* el par *no* actúa en un plano de simetría del elemento.

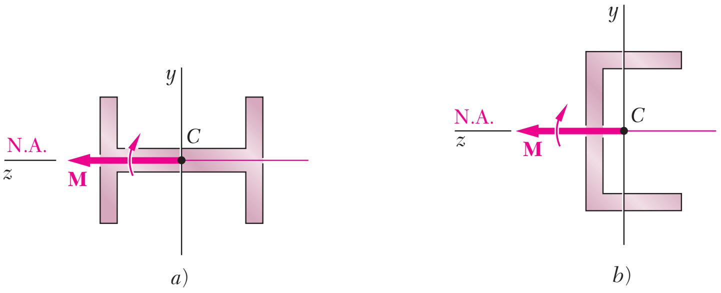


Figura 4.58

Por otra parte, en la figura 4.56 ninguno de los ejes coordenados es un eje de simetría de las secciones mostradas, y los ejes coordenados no son ejes principales. Así, el vector **M** no se dirige según un eje centroidal principal, y el eje neutro no coincide con el eje del par. Sin embargo, cualquier sección dada posee ejes centroidales principales, aun si es asimétrica, como la mostrada en la figura 4.56*c*, y estos ejes pueden determinarse analíticamente o usando el círculo de Mohr.† Si el vector **M** se dirige de acuerdo con uno de los ejes principales de la sección, el eje neutro coincidirá con el eje del par (figura 4.59) y las ecuaciones deducidas en las secciones 4.3 y 4.4, para elementos simétricos, también pueden utilizarse para calcular esfuerzos en este caso.

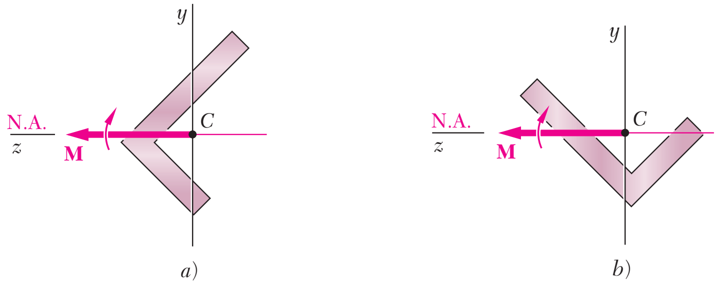


Figura 4.59

Como se verá, el principio de superposición es útil para determinar esfuerzos en los casos más generales de flexión asimétrica. Considere primero un elemento con un plano vertical de simetría, sometido a pares flectores **M** y **M**′ que actúan en un plano que forma un ángulo θ con el plano vertical (figura 4.60). El vector **M** que representa las fuerzas que operan en una sección dada formará el mismo ángulo θ con el eje z horizontal (véase figura 4.61). Descomponiendo **M** en sus componentes $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$ a lo largo de los ejes z y y respectivamente, se tiene

---

† Véase Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1987, o *Vector Mechanics for Engineers*, 7a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004, secciones 9.8-9.10.

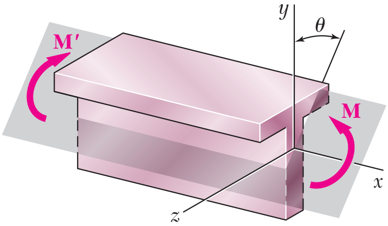


Figura 4.60

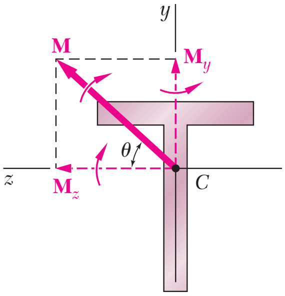


Figura 4.61

$$M_z = M \cos \theta \qquad M_y = M \operatorname{sen} \theta \tag{4.52}$$

Puesto que los ejes y y z son los ejes principales centroidales de la sección transversal, se utiliza la ecuación (4.16) para determinar los esfuerzos resultantes de la aplicación de cualquiera de los pares representados por $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$. El par $\mathbf{M}_z$ actúa en un plano vertical y flexiona el elemento en ese plano (figura 4.62). Los esfuerzos resultantes son

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{4.53}$$

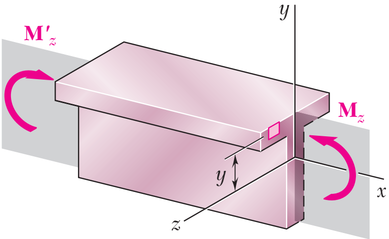


Figura 4.62

donde I_z es el momento de inercia de la sección con respecto al eje centroidal principal z. El signo negativo se debe a que se tiene compresión por encima del plano xz ($y > 0$) y tensión por debajo ($y < 0$). Por otra parte, el par $\mathbf{M}_y$ actúa en un plano horizontal y flexiona el miembro en ese plano (figura 4.63). Los esfuerzos son

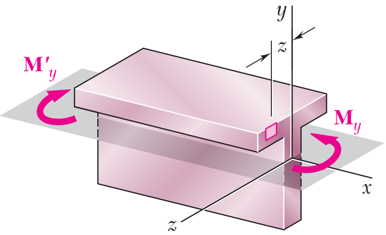


Figura 4.63

$$\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y} \tag{4.54}$$

donde I_y es el momento de inercia de la sección con respecto al eje principal centroidal y, y donde el signo positivo se debe a que se tiene tensión a la izquierda del plano vertical xy ($z > 0$) y compresión a su derecha ($z < 0$). La distribución de esfuerzos causada por el par original **M** se obtiene superponiendo la distribución de esfuerzos dados por las ecuaciones (4.53) y (4.54), respectivamente. Se tiene

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}} \tag{4.55}$$

Se nota que la expresión obtenida puede usarse también para calcular los esfuerzos en una sección asimétrica, tal como la de la figura 4.64, una vez que se han determinado los ejes principales centroidales y y z. Por otra parte, la ecuación (4.55) es válida sólo si las condiciones de aplicabilidad del principio de superposición se cumplen. En otras palabras, no puede utilizarse si los esfuerzos combinados exceden el límite de proporcionalidad del material, o si las deformaciones causadas por uno de los pares componentes afectan apreciablemente la distribución de esfuerzos debida a la otra.

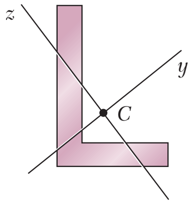


Figura 4.64

La ecuación (4.55) muestra que la distribución de esfuerzos causada por flexión asimétrica es lineal. Sin embargo, como se indicó antes en esta sección, el eje neutro de la sección transversal no coincidirá, en general, con el eje del par flector. Como el esfuerzo normal es 0 en cualquier punto del eje neutro, la ecuación que define ese eje puede obtenerse haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.55). Se escribe

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

o, resolviendo para y y sustituyendo M_z y M_y de las ecuaciones (4.52),

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \tan\theta\right) z \qquad (4.56)$$

La ecuación obtenida es la de una línea recta con pendiente $m = (I_z/I_y)\tan\theta$. Así, el ángulo ϕ que forma el eje neutro con el eje z (figura 4.65) se define por la relación

$$\boxed{\tan\phi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta} \qquad (4.57)$$

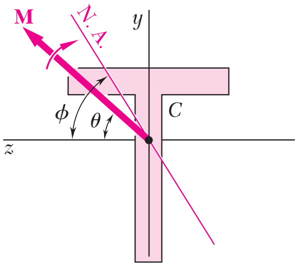


Figura 4.65

donde θ es el ángulo que forma el vector **M** con el mismo eje. Como I_z e I_y son positivos, ϕ y θ tienen el mismo signo. Además, note que $\phi > \theta$ cuando $I_z > I_y$, y $\phi < \theta$ cuando $I_z < I_y$. Así, el eje neutro se localiza siempre entre el vector **M** y el eje principal correspondiente al mínimo momento de inercia.

EJEMPLO 4.08

Se aplica un par de 1 600 lb · in. a una viga de madera, de sección rectangular 1.5 por 3.5 in., en un plano que forma 30° con la vertical (figura 4.66). Determine *a*) el esfuerzo máximo en la viga, *b*) el ángulo que forma la superficie neutra con el plano horizontal.

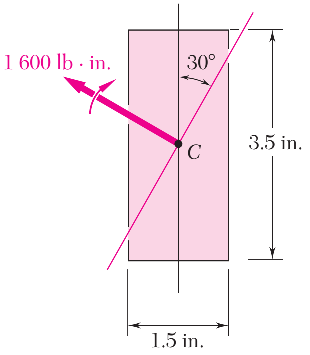


Figura 4.66

a) Esfuerzo máximo. Los componentes $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$ del par se hallan primero (figura 4.67).

$$M_z = (1\,600 \text{ lb} \cdot \text{in.}) \cos 30° = 1\,386 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = (1\,600 \text{ lb} \cdot \text{in.}) \operatorname{sen} 30° = 800 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

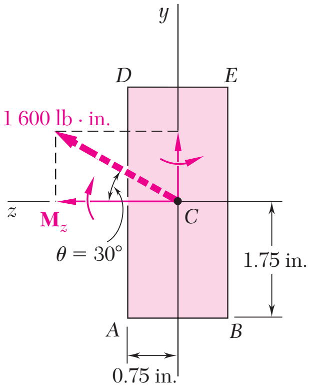


Figura 4.67

También se calculan los momentos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes *z* y *y*:

$$I_z = \tfrac{1}{12}(1.5 \text{ in.})(3.5 \text{ in.})^3 = 5.359 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(3.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})^3 = 0.9844 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(3.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})^3 = 0.9844 \text{ in.}^4$$

El mayor esfuerzo de tensión debido a $\mathbf{M}_z$ ocurre a lo largo de *AB* y es:

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(1\,386 \text{ lb} \cdot \text{in.})(1.75 \text{ in.})}{5.359 \text{ in.}^4} = 452.6 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de tensión debido a $\mathbf{M}_y$ ocurre a lo largo de *AD* y es

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(800 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.75 \text{ in.})}{0.9844 \text{ in.}^4} = 609.5 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de tensión debido a la carga combinada, ocurre en *A* y es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 452.6 + 609.5 = 1\,062 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de compresión tiene la misma magnitud y ocurre en *E*.

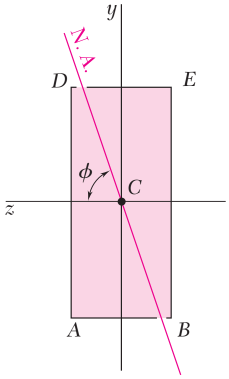


Figura 4.68

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{5.359 \text{ in.}^4}{0.9844 \text{ in.}^4} \tan 30° = 3.143$$

$$\phi = 72.4°$$

En la figura 4.69 se observa la distribución de esfuerzos en la sección.

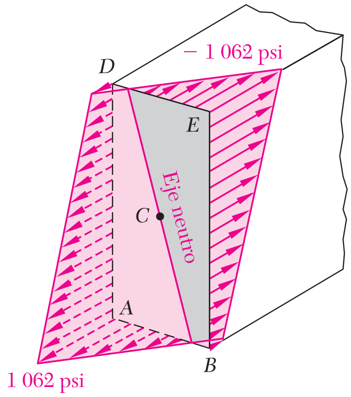


Figura 4.69

4.14 CASO GENERAL DE CARGA AXIAL EXCÉNTRICA

En la sección 4.12 se analizaron los esfuerzos producidos en un elemento por una carga axial excéntrica aplicada en un plano de simetría del elemento. Ahora se estudiará el caso más general, cuando la carga axial no se aplica en un plano de simetría.

Considere un elemento recto AB sometido a cargas axiales excéntricas iguales y opuestas **P** y **P′** (figura 4.70*a*), y sean a y b las distancias de la línea de acción de las fuerzas a los ejes principales centroidales de la sección transversal del elemento. La carga excéntrica **P** es estáticamente equivalente al sistema que consta de una fuerza céntrica **P** y de dos pares $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ de elementos $M_y = Pa$ y $M_z = Pb$ representados en la figura 4.70*b*. Análogamente, la fuerza excéntrica **P′** equivale a la fuerza céntrica **P′** y los pares $\mathbf{M}'_y$ y $\mathbf{M}'_z$.

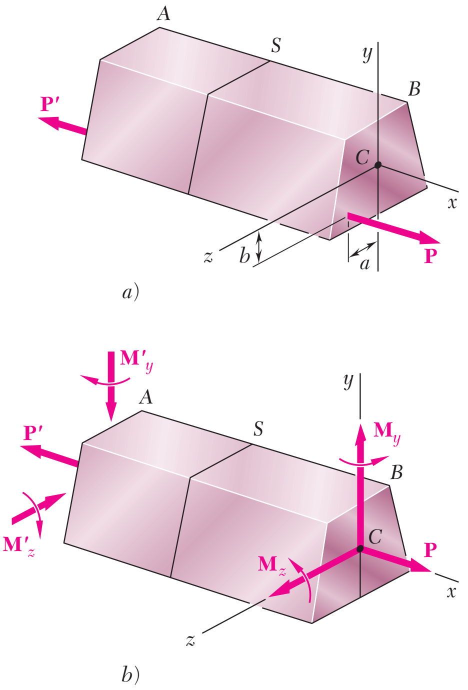


Figura 4.70

Gracias al principio de Saint-Venant (véase sección 2.17) puede reemplazarse la carga original de la figura 4.70*a* por la estáticamente equivalente de la figura 4.70*b* para determinar la distribución de esfuerzos en una sección S del elemento, siempre que dicha sección no esté muy cerca de un extremo del elemento. Además, los esfuerzos debidos a la carga de la figura 4.70*b* se obtienen superponiendo los esfuerzos correspondientes a la carga axial céntrica **P** y a los pares flectores $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, siempre que las condiciones del principio de superposición se satisfagan (véase sección 2.12). Los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** están dados por la ecuación (1.5), y los esfuerzos debidos a los pares flectores por la ecuación (4.55), ya que los vectores pares correspondientes se dirigen a lo largo de los ejes principales centroidales de la sección. Por tanto,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.58}$$

donde y y z se miden desde los ejes principales centroidales de la sección. La relación obtenida muestra que la distribución de esfuerzos en la sección es *lineal*.

Al calcular los esfuerzos combinados σ_x de la ecuación (4.58), debe tenerse cuidado con la determinación del signo de cada uno de los tres términos del lado derecho, puesto que cada uno puede ser positivo o negativo, dependiendo del sentido de las cargas **P** y **P′** y de la localización de su línea de acción con respecto a los ejes principales centroidales de la sección transversal. Dependiendo de la geometría de la sección transversal y de la localización de la línea de acción de **P** y **P′**, los esfuerzos combinados σ_x obtenidos de la ecuación (4.58), en diferentes partes de la sección, pueden tener el mismo signo, o algunos pueden ser positivos y otros negativos. En el último caso, habrá una línea en la sección a lo largo de la cual los esfuerzos serán nulos. Haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.58), se obtiene la ecuación de una recta, que representa el *eje neutro* de la sección:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$

EJEMPLO 4.09

Se aplica una carga vertical de 4.80 kN a un poste de madera, de sección rectangular, 80 por 120 mm (figura 4.71). *a*) Determine el esfuerzo en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. *b*) Localice el eje neutro de la sección transversal.

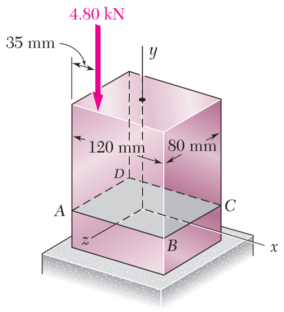


Figura 4.71

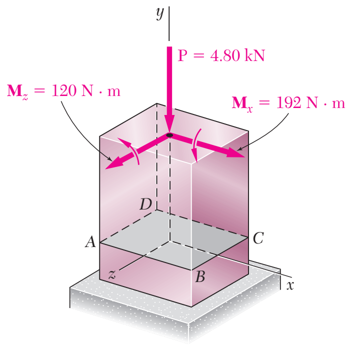


Figura 4.72

a) Esfuerzos. La carga excéntrica dada se reemplaza por un sistema equivalente que consta de una carga céntrica **P** y dos pares $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ representados por vectores dirigidos a lo largo de los ejes centroidales principales de la sección (figura 4.72). Se tiene

$$M_x = (4.80\ \text{kN})(40\ \text{mm}) = 192\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (4.80\ \text{kN})(60\ \text{mm} - 35\ \text{mm}) = 120\ \text{N} \cdot \text{m}$$

También se calcula el área y los momentos centroidales de inercia de la sección transversal.

$$A = (0.080\ \text{m})(0.120\ \text{m}) = 9.60 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$I_x = \tfrac{1}{12}(0.120\ \text{m})(0.080\ \text{m})^3 = 5.12 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_z = \tfrac{1}{12}(0.080\ \text{m})(0.120\ \text{m})^3 = 11.52 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

El esfuerzo σ_0 debido a la carga céntrica **P** es negativo y uniforme a través de la sección. Se tiene

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{-4.80\ \text{kN}}{9.60 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = -0.5\ \text{MPa}$$

Los esfuerzos debidos a los pares de flexión $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ se distribuyen linealmente en la sección, con valores máximos iguales respectivamente a

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\text{máx}}}{I_x} = \frac{(192\ \text{N} \cdot \text{m})(40\ \text{mm})}{5.12 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} = 1.5\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\text{máx}}}{I_z} = \frac{(120\ \text{N} \cdot \text{m})(60\ \text{mm})}{11.52 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} = 0.625\ \text{MPa}$$

Los esfuerzos en las esquinas de la sección son

$$\sigma_y = \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$$

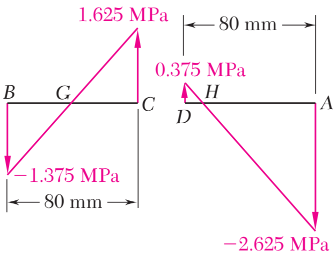
donde los signos deben obtenerse de la figura 4.72. Notando que los esfuerzos debidos a $\mathbf{M}_x$ son positivos en *C* y *D*, y negativos en *A* y *B*, y que los esfuerzos debidos a $\mathbf{M}_z$ son positivos en *B* y *C*, y negativos en *A* y *D*, se obtiene

$$\sigma_A = -0.5 - 1.5 - 0.625 = -2.625\ \text{MPa}$$

$$\sigma_B = -0.5 - 1.5 + 0.625 = -1.375\ \text{MPa}$$

$$\sigma_C = -0.5 + 1.5 + 0.625 = +1.625\ \text{MPa}$$

$$\sigma_D = -0.5 + 1.5 - 0.625 = +0.375\ \text{MPa}$$



a) *b*)

Figura 4.73

b) Eje neutro. Se descubre que el esfuerzo será cero en un punto *G* entre *B* y *C*, y en un punto *H* entre *D* y *A* (figura 4.73). Como la distribución de esfuerzos es lineal,

$$\frac{BG}{80\ \text{mm}} = \frac{1.375}{1.625 + 1.375} \qquad BG = 36.7\ \text{mm}$$

$$\frac{HA}{80\ \text{mm}} = \frac{2.625}{2.625 + 0.375} \qquad HA = 70\ \text{mm}$$

El eje neutro puede dibujarse por los puntos *G* y *H* (figura 4.74).

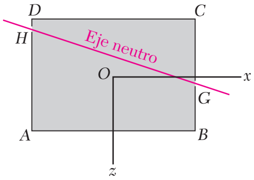


Figura 4.74

En la figura 4.75 se muestra la distribución de esfuerzos a través de la sección.

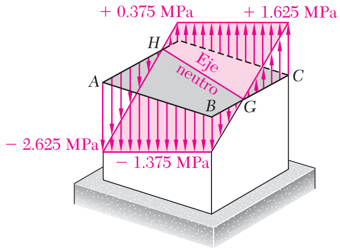
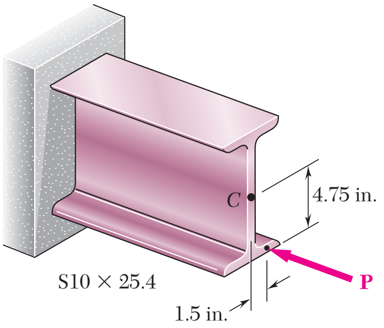
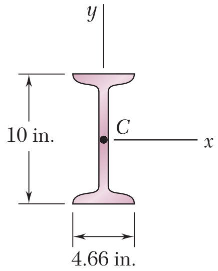


Figura 4.75



PROBLEMA MODELO 4.9

Se aplica una fuerza horizontal **P** a una sección corta de un elemento laminado de acero S10 × 25.4, como se indica en la figura. Si la compresión no debe pasar de 12 ksi, halle la **P** máxima permisible.



SOLUCIÓN

Propiedades de la sección transversal. Los datos siguientes provienen del apéndice C.

Área: $A = 7.46 \text{ in.}^2$

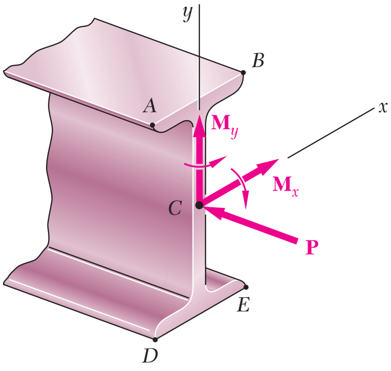
Módulos de la sección: $S_x = 24.7 \text{ in.}^3 \qquad S_y = 2.91 \text{ in.}^3$

Fuerza y par en *C*. Se reemplaza **P** por un sistema equivalente fuerza-par en el centroide *C* de la sección.

$$M_x = (4.75 \text{ in.})P \qquad M_y = (1.5 \text{ in.})P$$

Se observa que los vectores $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$ se dirigen según los ejes principales de la sección transversal.

Esfuerzos normales. Los valores absolutos de los esfuerzos en los puntos *A*, *B*, *D* y *E* debidos, respectivamente, a la carga céntrica **P** y a los pares $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$ son



$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{7.46 \text{ in.}^2} = 0.1340P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{S_x} = \frac{4.75P}{24.7 \text{ in.}^3} = 0.1923P$$

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{S_y} = \frac{1.5P}{2.91 \text{ in.}^3} = 0.5155P$$

Superposición. El esfuerzo total en cada punto se halla superponiendo los esfuerzos debidos a **P**, $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$. El signo se obtiene escribiendo cuidadosamente el esquema del sistema fuerza-par.

$$\sigma_A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P + 0.5155P = +0.574P$$

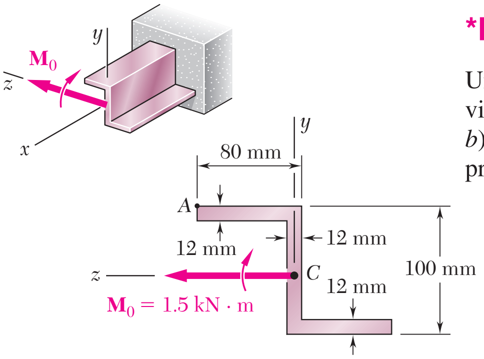
$$\sigma_B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P - 0.5155P = -0.457P$$

$$\sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P + 0.5155P = +0.189P$$

$$\sigma_E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P - 0.5155P = -0.842P$$

Máxima carga permisible. La compresión máxima ocurre en *E*. Recordando que $\sigma_{\text{perm}} = -12$ ksi,

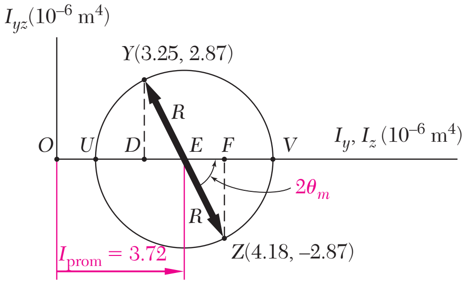
$$\sigma_{\text{perm}} = \sigma_E \qquad -12 \text{ ksi} = -0.842P \qquad P = 14.3 \text{ kips} \blacktriangleleft$$


y
M$_0$
z
x
80 mm
y
A
12 mm
12 mm
100 mm
C
12 mm
z
M$_0$ = 1.5 kN · m

*PROBLEMA MODELO 4.10

Un par de magnitud $M_0 = 1.5$ kN · m que actúa en un plano vertical se aplica a una viga cuya sección *Z* se muestra en la figura. Determine *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el ángulo que el eje neutro forma con el plano horizontal. Los momentos y los productos de inercia con respecto a los ejes *y* y *z* son los siguientes:

$$I_y = 3.25 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_z = 4.18 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_{yz} = 2.87 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$


$I_{yz}(10^{-6}\ \text{m}^4)$
Y(3.25, 2.87)
R
O
U
D
E
F
V
$I_y, I_z\ (10^{-6}\ \text{m}^4)$
$2\theta_m$
R
Z(4.18, –2.87)
$I_{\text{prom}} = 3.72$

SOLUCIÓN

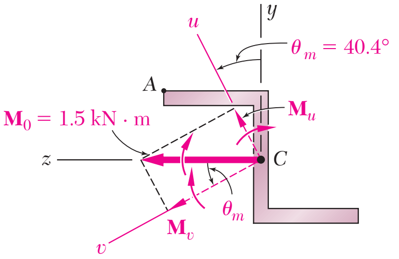
Ejes principales. Se dibuja el círculo de Mohr y se determina la orientación de los ejes principales y los correspondientes momentos de inercia.

$$\tan 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2.87}{0.465} \qquad 2\theta_m = 80.8° \qquad \theta_m = 40.4°$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0.465)^2 + (2.87)^2 \qquad R = 2.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_u = I_{\text{mín}} = OU = I_{\text{prom}} - R = 3.72 - 2.91 = 0.810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

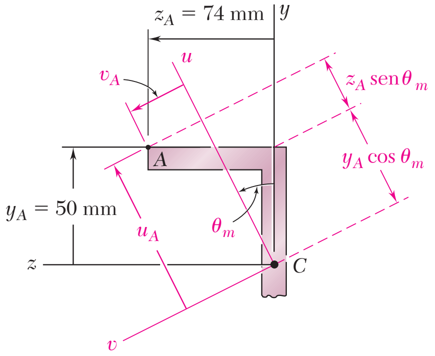
$$I_v = I_{\text{máx}} = OV = I_{\text{prom}} + R = 3.72 + 2.91 = 6.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$


y
u
$\theta_m = 40.4°$
A
M$_u$
M$_0$ = 1.5 kN · m
z
C
θ_m
M$_v$
v

Carga. Se descompone el momento aplicado $\mathbf{M}_0$ en sus componentes paralelas a los ejes principales.

$$M_u = M_0 \operatorname{sen} \theta_m = 1\,500 \operatorname{sen} 40.4° = 972\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1\,500 \cos 40.4° = 1\,142\ \text{N} \cdot \text{m}$$


z_A = 74 mm
y
u
v_A
$z_A \operatorname{sen} \theta_m$
A
$y_A \cos \theta_m$
y_A = 50 mm
u_A
θ_m
z
C
v

***a*) Esfuerzo en *A*.** Las distancias perpendiculares de cada eje principal al punto *A* son:

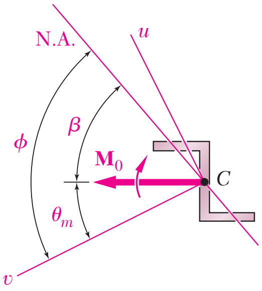
$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \operatorname{sen} \theta_m = 50 \cos 40.4° + 74 \operatorname{sen} 40.4° = 86.0\ \text{mm}$$

$$v_A = -y_A \operatorname{sen} \theta_m + z_A \cos \theta_m = -50 \operatorname{sen} 40.4° + 74 \cos 40.4° = 23.9\ \text{mm}$$

Considerando separadamente la flexión con respecto a cada eje principal, se nota que $\mathbf{M}_u$ produce un esfuerzo de tensión en el punto *A* mientras que $\mathbf{M}_v$ produce compresión en el mismo punto.

$$\sigma_A = +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = +\frac{(972\ \text{N} \cdot \text{m})(0.0239\ \text{m})}{0.810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} - \frac{(1\,142\ \text{N} \cdot \text{m})(0.0860\ \text{m})}{6.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4}$$

$$= +\ 28.68\ \text{MPa} - 14.81\ \text{MPa} \qquad \sigma_A = +13.87\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$


N.A.
u
ϕ
β
M$_0$
C
θ_m
v

***b*) Eje neutro.** El ángulo ϕ que el eje neutro forma con el eje v se halla por medio de la ecuación (4.57).

$$\tan \phi = \frac{I_v}{I_u} \tan \theta_m = \frac{6.63}{0.810} \tan 40.4° \qquad \phi = 81.8°$$

El ángulo β formado por los ejes neutro y horizontal es

$$\beta = \phi - \theta_m = 81.8° - 40.4° = 41.4° \qquad \beta = 41.4° \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.126 a *4.128* El par **M** se aplica a la viga cuya sección se muestra en la figura, en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto *B*, *c*) en el punto *D*.

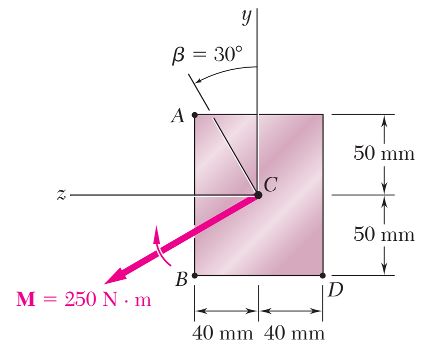

y
β = 30°
A
C
z
50 mm
50 mm
B
D
M = 250 N · m
40 mm
40 mm

Figura P4.126

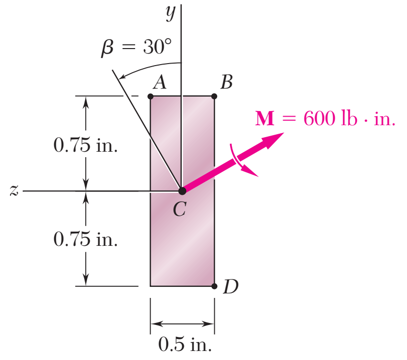

y
β = 30°
A
B
0.75 in.
z
C
0.75 in.
M = 600 lb · in.
D
0.5 in.

Figura P4.127

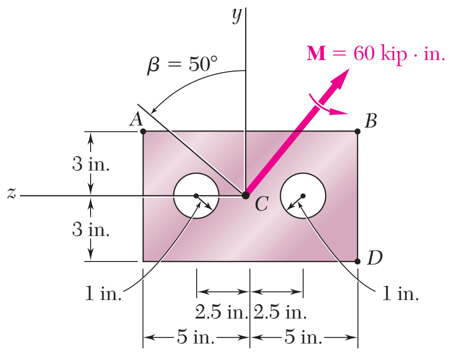

y
β = 50°
M = 60 kip · in.
A
B
3 in.
z
C
3 in.
D
1 in.
1 in.
2.5 in.
2.5 in.
5 in.
5 in.

Figura *P4.128*

4.129 a 4.131 El par **M** se aplica a la viga cuya sección se muestra en la figura, en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto *B*, *c*) en el punto *D*.

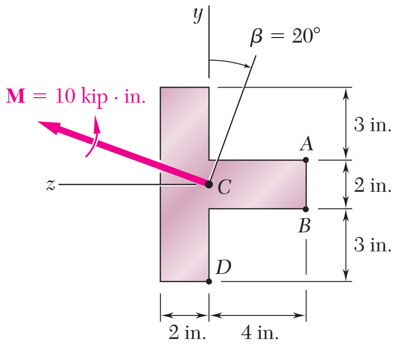

y
β = 20°
M = 10 kip · in.
3 in.
A
z
C
2 in.
B
3 in.
D
2 in.
4 in.

Figura P4.129

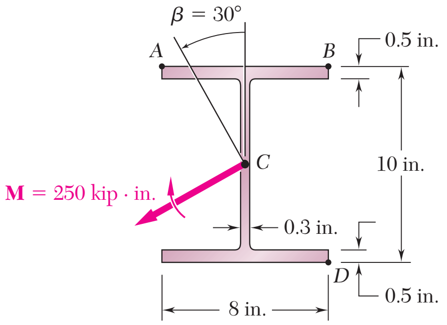

β = 30°
A
B
0.5 in.
C
10 in.
M = 250 kip · in.
0.3 in.
D
0.5 in.
8 in.

Figura *P4.130*

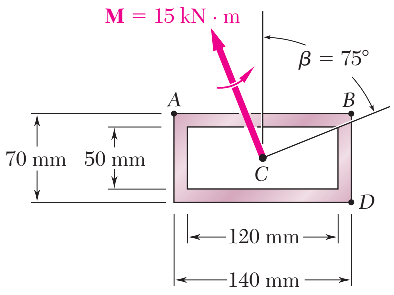

M = 15 kN · m
β = 75°
A
B
70 mm
50 mm
C
D
120 mm
140 mm

Figura P4.131

4.132 El par **M**, que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga orientada tal como se muestra en la figura. Determine *a*) el ángulo que forma el eje neutro con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.

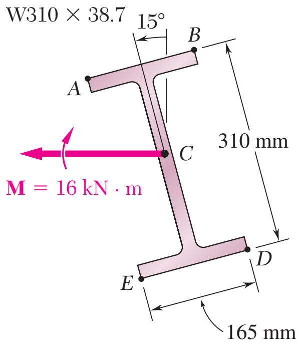

W310 × 38.7
15°
B
A
310 mm
C
M = 16 kN · m
D
E
165 mm

Figura P4.132

***4.133* y 4.134** El par **M**, que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga orientada tal como se muestra en la figura. Determine *a*) el ángulo que forma el eje neutro con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.

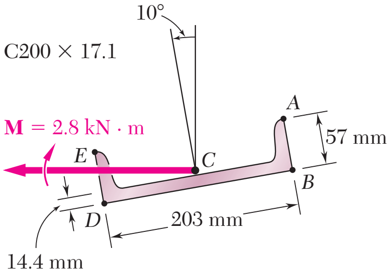

10°
C200 × 17.1
A
57 mm
M = 2.8 kN · m
E
C
B
D
203 mm
14.4 mm

Figura *P4.133*

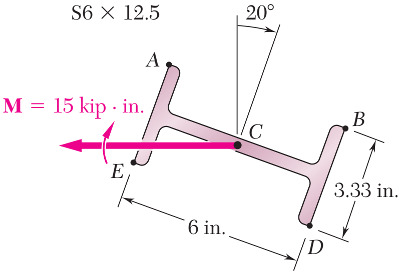
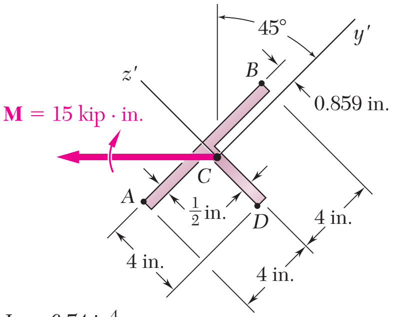

S6 × 12.5
20°
A
M = 15 kip · in.
C
B
E
3.33 in.
6 in.
D

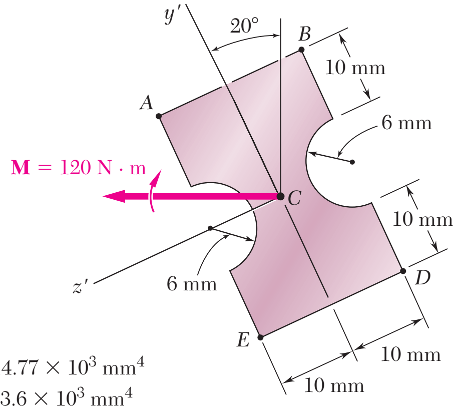
Figura P4.134

4.135 y 4.136 El par **M**, que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga orientada como se muestra en la figura. Determine *a*) el ángulo que el eje neutro forma con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.


45°
y'
z'
B
M = 15 kip · in.
0.859 in.
C
A
1/2 in.
D
4 in.
4 in.
4 in.

$I_{y'} = 6.74 \text{ in}^4$
$I_{z'} = 21.4 \text{ in}^4$

Figura P4.135


y'
20°
B
10 mm
A
6 mm
M = 120 N · m
C
10 mm
z'
6 mm
D
E
10 mm
10 mm

$I_{y'} = 14.77 \times 10^3 \text{ mm}^4$
$I_{z'} = 53.6 \times 10^3 \text{ mm}^4$

Figura P4.136

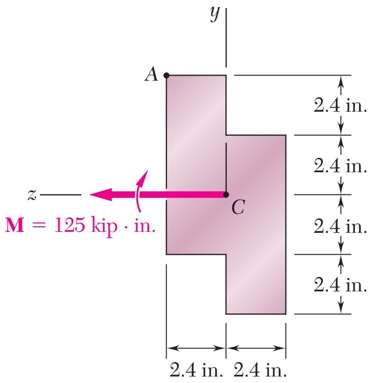
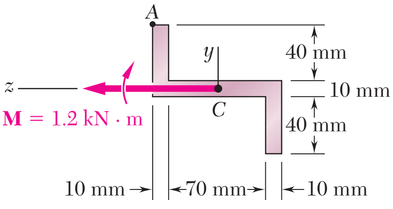

y
A
2.4 in.
2.4 in.
z
C
M = 125 kip · in.
2.4 in.
2.4 in.
2.4 in.
2.4 in.

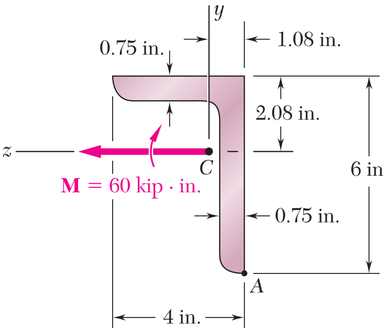
Figura P4.137

4.137 a **4.139 El par **M** actúa en un plano vertical y se aplica a una viga orientada como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo en el punto *A*.


A
y
40 mm
z
10 mm
M = 1.2 kN · m
C
40 mm
10 mm
70 mm
10 mm

$I_y = 1.894 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$I_z = 0.614 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$I_{yz} = +0.800 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Figura P4.138


y
0.75 in.
1.08 in.
2.08 in.
z
6 in.
C
M = 60 kip · in.
0.75 in.
A
4 in.

$I_y = 8.7 \text{ in}^4$
$I_z = 24.5 \text{ in}^4$
$I_{yz} = +8.3 \text{ in}^4$

Figura *P4.139*

4.140 Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *b*) el punto donde el eje neutro interseca la línea *ABD*.

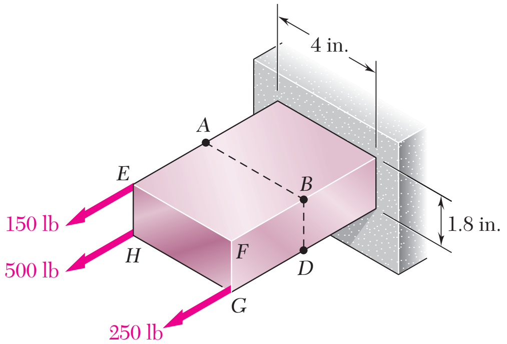


Figura P4.140

4.141 Retome el problema 4.140, y ahora suponga que la magnitud de la fuerza aplicada en *G* se incrementa de 250 lb a 400 lb.

4.142 El tubo que se muestra en la figura tiene un grosor de pared uniforme de 12 mm. Para las cargas dadas, determine *a*) el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *b*) el punto donde el eje neutro interseca la línea *ABD*.

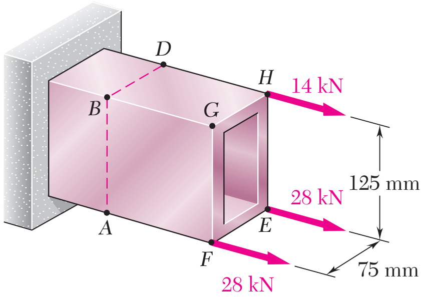


Figura P4.142

4.143 Retome el problema 4.142, y ahora suponga que se retira la fuerza de 28 kN en el punto *E*.

4.144 Una carga axial **P** de 50 kN de magnitud se aplica, como se muestra en la figura, a una sección corta de un elemento W150 × 24 de acero laminado. Determine la máxima distancia *a* para la que el esfuerzo de compresión máxima no excede 90 MPa.

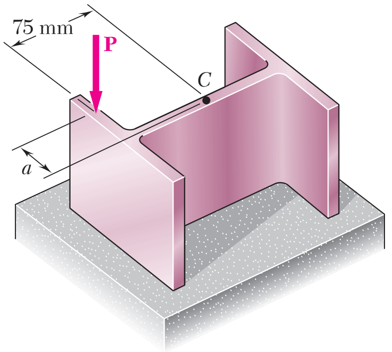


Figura P4.144

4.145 Una carga horizontal **P** de 100 kN de magnitud se aplica a la viga mostrada en la figura. Determine la distancia máxima a para la cual el esfuerzo de tensión máximo en la viga no excede 75 MPa.

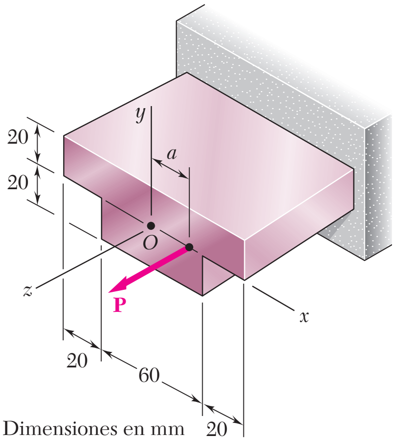


Figura ***P4.145***

4.146 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 del par si el esfuerzo máximo en la viga no debe exceder 12 ksi. *Datos*: $I_y = I_z = 11.3$ in.^{4}, $A = 4.75$ in.^{2}, $k_{\text{mín}} = 0.983$ in. (*Sugerencia*: Por razones de simetría, los ejes principales forman un ángulo de 45° con los ejes coordenados. Utilice las relaciones $I_{\text{mín}} = Ak^2_{\text{mín}}$ e $I_{\text{mín}} + I_{\text{máx}} = I_y + I_z$.)

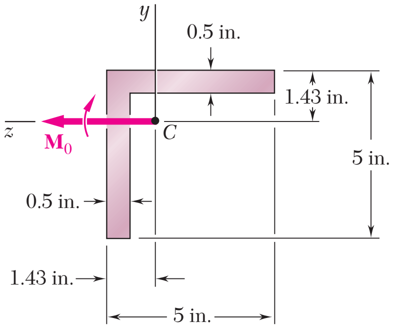


Figura P4.146

4.147 Retome el problema 4.146, y ahora suponga que el par $\mathbf{M}_0$ actúa en un plano horizontal.

4.148 La sección Z que se muestra en la figura se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 del par si el esfuerzo máximo no debe exceder 80 MPa. *Datos*: $I_{\text{máx}} = 2.28 \times 10^{-6}$ mm^4, $I_{\text{mín}} = 0.23 \times 10^{-6}$ mm^4, ejes principales 25.7°∢ y 64.3°∡.

4.149 Retome el problema 4.148, y ahora suponga que el par $\mathbf{M}_0$ actúa en un plano horizontal.

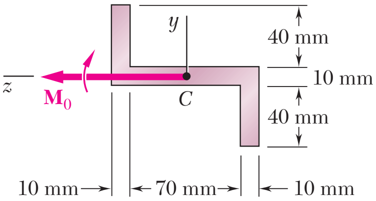


Figura P4.148

4.150 Una viga que tiene la sección transversal que se muestra en la figura se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el máximo valor permisible del momento M_0 del par si el esfuerzo máximo no debe exceder 100 MPa. *Datos*: $I_y = I_z = b^4/36$ e $I_{yz} = b^4/72$.

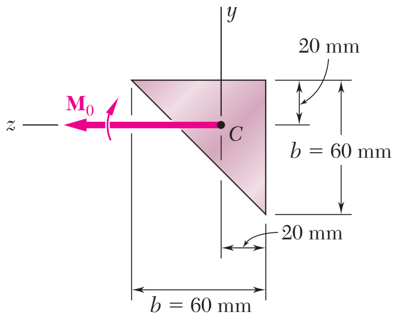


Figura P4.150

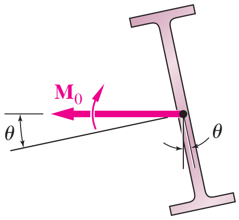


Figura P4.151

4.151 Un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical se aplica a una viga W12 × 16 de acero laminado, cuya alma forma un ángulo θ con la vertical. Denote con σ_0 el esfuerzo máximo en la viga cuando $\theta = 0$ y determine el ángulo de inclinación θ de la viga para el cual el esfuerzo máximo es $2\sigma_0$.

4.152 Una viga de sección transversal asimétrica se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical xy. Demuestre que el esfuerzo en el punto A, de coordenadas y y z es

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z$$

donde I_y, I_z e I_{yz} denotan los momentos y el producto de inercia de la sección transversal respecto a los ejes coordenados y M_z el momento del par.

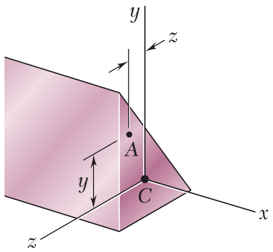


Figura P4.152 y P4.153

4.153 Una viga de sección transversal asimétrica se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical xz. Demuestre que el esfuerzo en el punto A, de coordenadas y y z es

$$\sigma_A = \frac{zI_z - yI_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y$$

donde I_y, I_z e I_{yz} denotan los momentos y el producto de inercia de la sección transversal respecto a los ejes coordenados y M_y el momento del par.

4.154 *a*) Muestre que el esfuerzo en la esquina A del elemento prismático que se muestra en la figura P4.154*a* será cero si la fuerza vertical **P** se aplica en un punto localizado sobre la línea

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

b) Muestre además que, si no ocurre ningún esfuerzo de tensión en el elemento, la fuerza **P** debe aplicarse en un punto localizado dentro del área bordeada por la línea que se encontró en el inciso *a*) y las tres líneas similares correspondientes a la condición de cero esfuerzo en B, C y D respectivamente. Esta área, que se muestra en la figura P4.154*b*, se conoce como el *corazón* de la sección transversal.

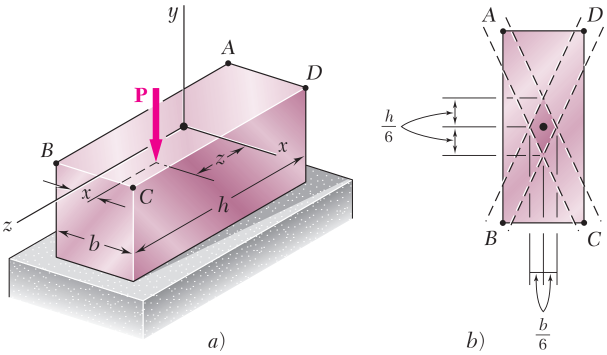


Figura P4.154

4.155 *a*) Muestre que, si se aplica una fuerza vertical **P** en el punto A de la sección mostrada en la figura, la ecuación del eje neutro BD es

$$\left(\frac{x_A}{k_z^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{k_x^2}\right)z = -1$$

donde k_z y k_x denotan los radios de giro de la sección transversal respecto al eje z y al eje x, respectivamente. *b*) Muestre además que, si se aplica una fuerza vertical **Q** en cualquier punto localizado en la línea BD, el esfuerzo en el punto A será cero.

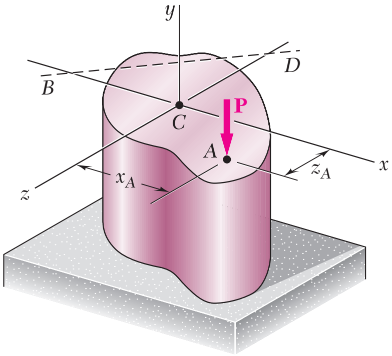


Figura P4.155

*4.15 FLEXIÓN DE ELEMENTOS CURVOS

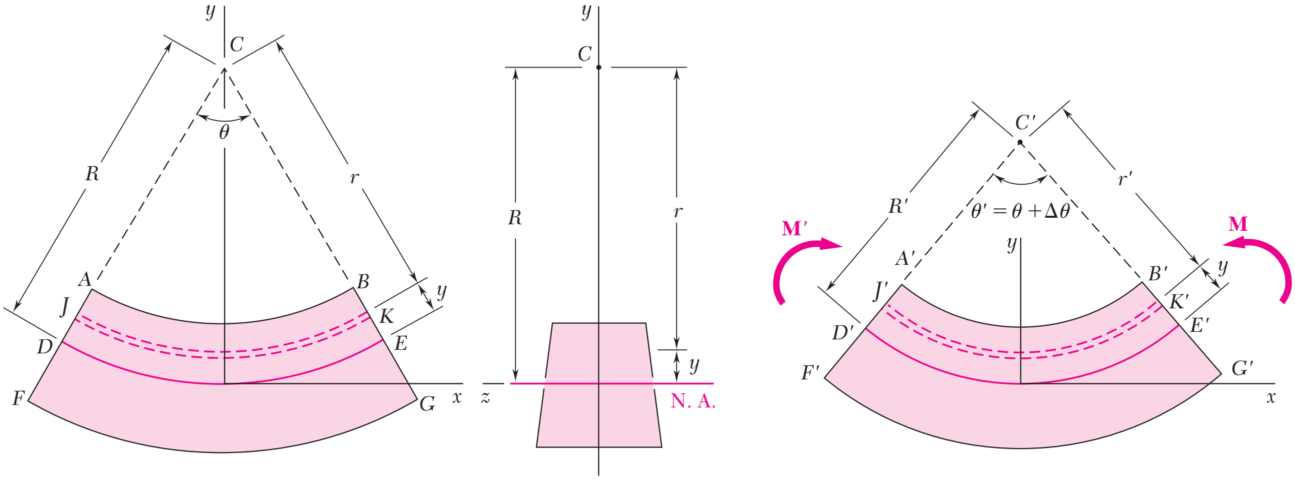
El análisis de esfuerzos debidos a flexión se ha restringido a elementos rectos. En esta sección se considerarán los esfuerzos causados por la aplicación de pares iguales y opuestos a elementos inicialmente curvos. Este estudio se limitará a elementos curvos de sección transversal uniforme con un plano de simetría, en el cual actúan los pares flectores, y se supondrá que todos los esfuerzos permanecen por debajo del límite de proporcionalidad.

Si la curvatura inicial del elemento es pequeña, es decir, si su radio de curvatura es grande comparado con la altura de la sección, puede obtenerse una buena aproximación si se supone que el elemento es recto y se usan las ecuaciones de las secciones 4.3 y 4.4.† Sin embargo, cuando el radio de curvatura y las dimensiones de la sección transversal son del mismo orden de magnitud, debe utilizarse un método diferente de análisis, el cual fue introducido por el ingeniero alemán E. Winkler (1835-1888).

---

† Vea el problema 4.185.

Se estudiará el elemento curvo de sección transversal uniforme de la figura 4.76. Su sección transversal es simétrica con respecto al eje y (figura 4.76*b*) y, en su estado no esforzado, sus superficies superior e inferior intersecan el plano vertical xy según los arcos de círculo AB y FG centrados en C (figura 4.76*a*). Ahora se aplican dos pares iguales y opuestos **M** y **M′** en el plano de simetría del elemento (figura 4.76*c*). Un razonamiento similar al de la sección 4.3 mostraría que cualquier sección plana transversal que contenga a C permanecerá plana, y que los diversos arcos de círculo indicados en la figura 4.76*a* se transformarán en arcos circulares y concéntricos con un centro C' diferente de C. Más específicamente, si los pares **M** y **M′** se dirigen como se muestra, la curvatura de los diferentes arcos de círculo aumentará, esto es $A'C' < AC$. También se nota que los pares **M** y **M′** harán disminuir la longitud de la superficie superior del elemento ($A'B' < AB$) y la de la superficie inferior aumentará ($F'G' > FG$). Se concluye que debe existir una *superficie neutra* en el elemento, cuya longitud permanece constante. En la figura 4.76*a* se ha representado la intersección de la *superficie neutra* con el plano xy por el arco DE de radio R, y en la figura 4.76*c* por el arco $D'E'$ de radio R'. Si θ y θ' son los ángulos centrales correspondientes a DE y $D'E'$, se dice que la longitud de la superficie neutra permanece constante



a) *b*) *c*)

Figura 4.76

$$R\theta = R'\theta' \tag{4.59}$$

Considerando ahora el arco del círculo JK localizado a una distancia y sobre la superficie neutra y designando por r y r' el radio de este arco antes de aplicar la flexión y después de ella se expresa el alargamiento de JK como

$$\delta = r'\theta' - r\theta \tag{4.60}$$

Observando en la figura 4.76 que

$$r = R - y \qquad r' = R' - y \tag{4.61}$$

y sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.60), se escribe

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

o, recordando la ecuación (4.59) y haciendo $\theta' - \theta = \Delta\theta$,

$$\delta = -y\,\Delta\theta \tag{4.62}$$

La deformación normal ϵ_x en los elementos de *JK* se obtiene dividiendo el alargamiento δ entre la longitud original $r\theta$ del arco *JK*.

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y\,\Delta\theta}{r\theta}$$

o, recordando la primera de las relaciones (4.61),

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta}\,\frac{y}{R - y} \tag{4.63}$$

La relación obtenida muestra que, mientras cada sección transversal permanece plana, la deformación normal ϵ_x *no varía linealmente* con la distancia *y* desde la superficie neutra.

El esfuerzo normal σ_x puede obtenerse mediante la ley de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, sustituyendo ϵ_x en la ecuación (4.63). Se tiene

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{y}{R - y} \tag{4.64}$$

o, alternativamente, recordando la primera de las ecuaciones (4.61)

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R - r}{r} \tag{4.65}$$

La ecuación (4.64) muestra que, como ϵ_x, el esfuerzo normal σ_x *no varía linealmente* con la distancia y desde la superficie neutra. Graficando σ_x contra *y*, se obtiene un arco de hipérbole (figura 4.77).

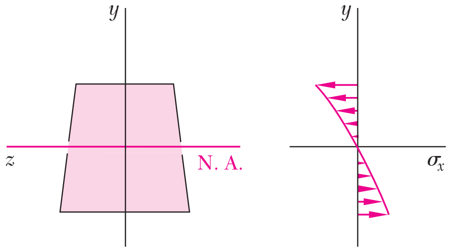


Figura 4.77

Para determinar la localización de la superficie neutra en el elemento y el valor del coeficiente $E\,\Delta\theta/\theta$, utilizado en las ecuaciones (4.64) y (4.65), recuerde ahora que las fuerzas elementales que actúan en cualquier sección transversal deben ser estáticamente equivalentes al momento flector **M**. Expresando, como lo hicimos en la sección 4.2 para un elemento recto, que la suma de las fuerzas elementales que actúan en la sección es cero, y que la suma de sus momentos con respecto al eje transversal z debe ser igual al momento flector M, se tiene

$$\int \sigma_x\,dA = 0 \tag{4.1}$$

y

$$\int (-y\sigma_x\,dA) = M \tag{4.3}$$

Sustituyendo σ_x de la ecuación (4.65) en la ecuación (4.1), se escribe

$$-\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R-r}{r}\,dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r}\,dA = 0$$

$$R\int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

de donde se sigue que la distancia R desde el centro de curvatura C a la superficie neutra se da por la relación

$$\boxed{R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}}} \tag{4.66}$$

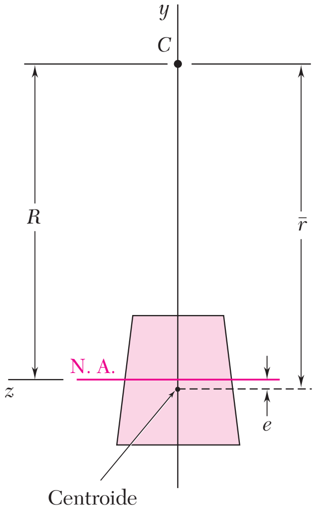


Figura 4.78

Advierta que el valor obtenido para R no es igual a la distancia $\bar{r}$ desde C al centroide de la sección transversal pues $\bar{r}$ se define por una relación diferente, específicamente:

$$\bar{r} = \frac{1}{A}\int r\,dA \tag{4.67}$$

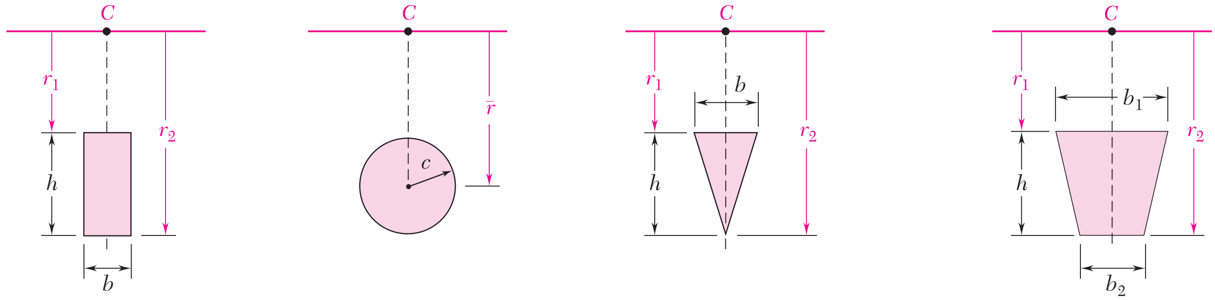
Se concluye así que, en un elemento curvo, *el eje neutro de una sección transversal no pasa por el centroide de la sección* (figura 4.78).† En el ejemplo 4.10 y en los problemas 4.207 a 4.209 se deducirán expresiones para el radio R de la superficie neutra, para algunas formas específicas. Por conveniencia, estas expresiones se muestran en la figura 4.79.

---

† Sin embargo, puede notarse una propiedad interesante de la superficie neutra si se escribe la ecuación (4.66) en la forma alternativa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A}\int \frac{1}{r}\,dA \tag{4.66'}$$

La ecuación (4.66′) muestra que, si se divide el elemento en un gran número de fibras de área transversal dA, la curvatura $1/R$ de la superficie neutra será igual al valor promedio de la curvatura $1/r$ de las diferentes fibras.



Rectángulo

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Círculo

$$R = \tfrac{1}{2}\left(\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$$

Triángulo

$$R = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{h}\ln\frac{r_2}{r_1} - 1}$$

Trapecio

$$R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1)\ln\frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

Figura 4.79 Radios de superficies neutras para varios tipos de secciones.

Sustituyendo ahora σ_x de la ecuación (4.65) en la ecuación (4.3),

$$\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R - r}{r}\,y\,dA = M$$

o, como $y = R - r$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\int \frac{(R - r)^2}{r}\,dA = M$$

Desarrollando el cuadrado en el integrando, después de las simplificaciones, se obtiene:

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\left[R^2\int\frac{dA}{r} - 2RA + \int r\,dA\right] = M$$

Recordando las ecuaciones (4.66) y (4.67) se nota que el primer término entre paréntesis es igual a RA mientras el último es igual a $\bar{r}A$. Se tiene, entonces,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}(RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

y, despejando a $E\,\Delta\theta/\theta$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \tag{4.68}$$

Refiriéndose a la figura 4.76, se observa que $\Delta\theta > 0$ para $M > 0$. Se sigue que $\bar{r} - R > 0$, o $R < \bar{r}$, sin importar la forma de la sección. Así, el eje neutro de una sección transversal siempre se ubica entre el centroide de la sección y el centro de curvatura del elemento (figura 4.78). Haciendo $\bar{r} - R = e$, la ecuación (4.68) se escribe en la forma

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \tag{4.69}$$

Sustituyendo por $E\,\Delta\theta/\theta$ de (4.69) en las ecuaciones (4.64) y (4.65) se obtiene la siguiente expresión alternativa para el esfuerzo normal σ_x en una viga curva:

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R - y)} \tag{4.70}$$

y

$$\sigma_x = \frac{M(r - R)}{Aer} \tag{4.71}$$

Debe notarse que el parámetro e en las ecuaciones de arriba es una cantidad pequeña obtenida restando dos longitudes de tamaños comparables, R y $\bar{r}$. Para calcular σ_x con un grado razonable de precisión, es necesario calcular R y $\bar{r}$ con mucha precisión, particularmente cuando ambas cantidades son grandes, es decir, cuando la curvatura del elemento es pequeña. Sin embargo, como se indicó antes, es posible, en tal caso, obtener una buena aproximación para σ_x usando la fórmula $\sigma_x = -My/I$ desarrollada para elementos rectos.

Ahora hay que determinar el cambio de curvatura de la superficie neutra causado por el momento flector M. Resolviendo la ecuación (4.59) para la curvatura $1/R'$ de la superficie neutra en el elemento deformado, se obtiene:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\frac{\theta'}{\theta}$$

o, haciendo $\theta' = \theta + \Delta\theta$ y recordando la ecuación (4.69),

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{M}{EAe}\right)$$

de donde se sigue que el cambio de curvatura de la superficie neutra es:

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \tag{4.72}$$

EJEMPLO 4.10

Una barra curva rectangular tiene radio medio $\bar{r} = 6$ in., una sección de ancho $b = 2.5$ in. y la altura $h = 1.5$ in. (figura 4.80). Determine la distancia e entre el centroide y el eje neutro de la sección transversal.

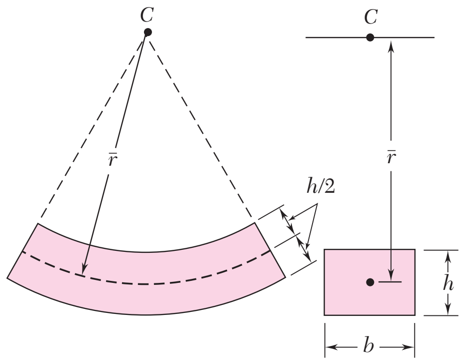


Figura 4.80

Primero se obtendrá la expresión para el radio R de la superficie neutra. Llamando r_1 y r_2, respectivamente, a los radios interior y exterior de la barra (figura 4.81) usamos la ecuación (4.66) y se escribe

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{b\,dr}{r}} = \frac{h}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}}$$

$$R = \frac{h}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} \tag{4.73}$$

Para los datos, se tiene

$$r_1 = \bar{r} - \tfrac{1}{2}h = 6 - 0.75 = 5.25 \text{ in.}$$

$$r_2 = \bar{r} + \tfrac{1}{2}h = 6 + 0.75 = 6.75 \text{ in.}$$

Sustituyendo por h, r_1 y r_2 en la ecuación (4.73),

$$R = \frac{h}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{1.5 \text{ in.}}{\ln\dfrac{6.75}{5.25}} = 5.9686 \text{ in.}$$

La distancia entre el centroide y el eje neutro de la sección transversal (figura 4.82) es, entonces,

$$e = \bar{r} - R = 6 - 5.9686 = 0.0314 \text{ in.}$$

Note que fue necesario calcular R con cinco cifras significativas para obtener e con el grado común de precisión.

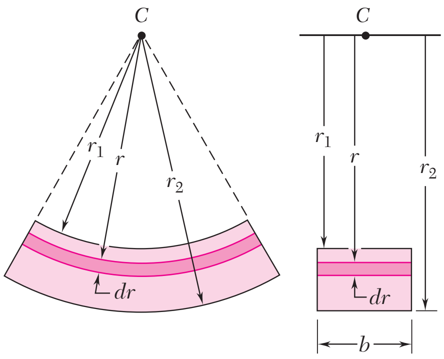


Figura 4.81

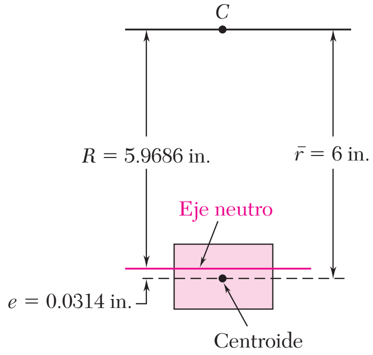


Figura 4.82

EJEMPLO 4.11

Para la barra del ejemplo 4.10, determine los mayores esfuerzos de tensión y de compresión considerando que el momento flector M en la barra es $M = 8$ kips · in.

Se utilizará la ecuación (4.71) con los datos dados

$$M = 8 \text{ kips} \cdot \text{in.} \qquad A = bh = (2.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in}) = 3.75 \text{ in.}^2$$

y los valores obtenidos en el ejemplo 4.10 para R y e,

$$R = 5.969 \qquad e = 0.0314 \text{ in.}$$

Haciendo primero $r = r_2 = 6.75$ in. en la ecuación (4.71), se escribe

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M(r_2 - R)}{Aer_2}$$

$$= \frac{(8 \text{ kips} \cdot \text{in.})(6.75 \text{ in.} - 5.969 \text{ in.})}{(3.75 \text{ in.}^2)(0.0314 \text{ in.})(6.75 \text{ in.})}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 7.86 \text{ ksi}$$

Haciendo ahora $r = r_1 = 5.25$ in. en la ecuación (4.71),

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1}$$

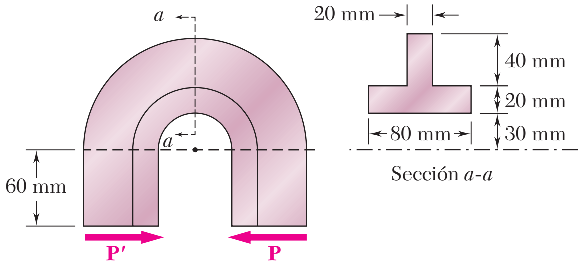
$$= \frac{(8 \text{ kips} \cdot \text{in.})(5.25 \text{ in.} - 5.969 \text{ in.})}{(3.75 \text{ in.}^2)(0.0314 \text{ in.})(5.25 \text{ in.})}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = -9.30 \text{ ksi}$$

Nota: Los valores obtenidos para $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ pueden compararse con el resultado que se obtendría en una barra recta. Usando la ecuación (4.15) de la sección 4.4,

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \pm\frac{Mc}{I}$$

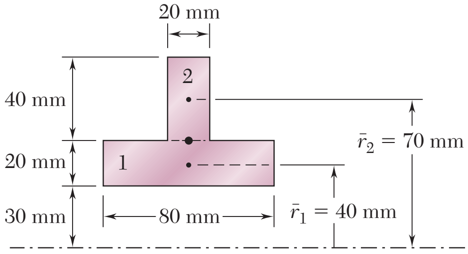
$$= \pm\frac{(8 \text{ kips} \cdot \text{in.})(0.75 \text{ in.})}{\frac{1}{12}(2.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})^3} = \pm 8.53 \text{ ksi}$$



PROBLEMA MODELO 4.11

Una componente de máquina tiene una sección transversal en T y está cargada como se indica en la figura. Sabiendo que el esfuerzo de compresión permisible es de 50 MPa, halle la máxima fuerza **P** que puede aplicarse a la componente.

SOLUCIÓN



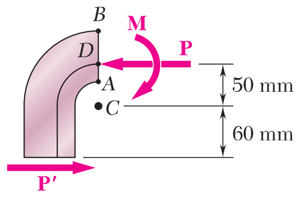
Centroide de la sección transversal. Se localiza el centroide D de la sección transversal.

	A_i, mm^2	$\bar{r}_i$, mm	$\bar{r}_i A_i$, mm^3
1	$(20)(80) = 1\,600$	40	64×10^3
2	$(40)(20) = 800$	70	56×10^3
	$\Sigma A_i = 2\,400$		$\Sigma \bar{r}_i A_i = 120 \times 10^3$

$\bar{r}\Sigma A_i = \Sigma \bar{r}_i A_i$

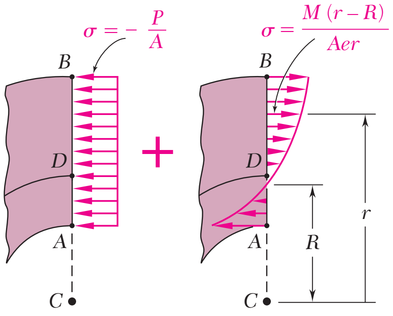
$\bar{r}(2\,400) = 120 \times 10^3$

$\bar{r} = 50 \text{ mm} = 0.050 \text{ m}$



Fuerza y par en *D*. Las fuerzas internas en la sección *a-a* son equivalentes a una fuerza **P** que actúa en D y un par **M** de momento

$$M = P(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm}) = (0.110 \text{ m})P$$



Superposición. La fuerza céntrica **P** causa un esfuerzo de compresión uniforme en la sección *a-a*. El momento flector **M** crea una distribución variable de esfuerzos [véase ecuación (4.71)]. Se observa que **M** tiende a aumentar la curvatura del elemento y es, por tanto, positivo (figura 4.76). El esfuerzo total de un punto de la sección *a-a* localizado a una distancia r del centro de curvatura C es

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r-R)}{Aer} \tag{1}$$

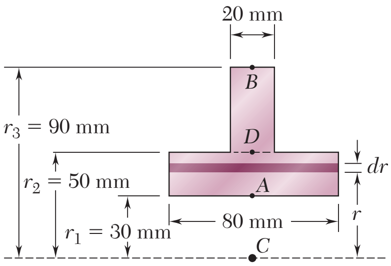
Radio de la superficie neutra. Ahora se calcula el radio R de la superficie neutra usando la ecuación (4.66).

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} = \frac{2\,400 \text{ mm}^2}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm})\,dr}{r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{(20 \text{ mm})\,dr}{r}}$$

$$= \frac{2\,400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2\,400}{40.866 + 11.756} = 45.61 \text{ mm}$$

$$= 0.04561 \text{ m}$$

También se calcula $e = \bar{r} - R = 0.05000 \text{ m} - 0.04561 \text{ m} = 0.00439 \text{ m}$



Carga permisible. Se observa que el esfuerzo máximo de compresión ocurrirá en el punto A, donde $r = 0.030$ m. Recordando que $\sigma_{\text{perm}} = 50$ MPa y usando la ecuación (1),

$$-50 \times 10^6 \text{ Pa} = -\frac{P}{2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(0.110\text{ P})(0.030 \text{ m} - 0.04561 \text{ m})}{(2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0.00439 \text{ m})(0.030 \text{ m})}$$

$$-50 \times 10^6 = -417P - 5\,432P$$

$P = 8.55$ kN ◀

PROBLEMAS

4.156 Para la barra curva que se muestra en la figura, determine el esfuerzo en el punto A cuando a) $r_1 = 1.2$ in., b) $r_1 = 2$ in.

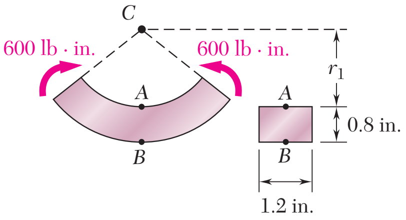


Figura P4.156 y P4.157

4.157 Para la barra curva que se muestra en la figura, determine el esfuerzo en los puntos A y B cuando $r_1 = 1.6$ in.

4.158 Para la barra curva y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo en los puntos A y B cuando $h = 55$ mm.

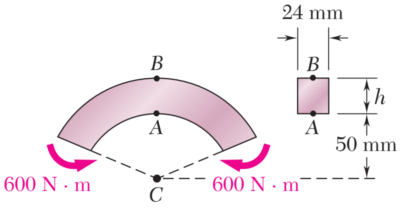


Figura P4.158 y *P4.159*

4.159 Para la barra curva y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo en el punto A cuando a) $h = 50$ mm, b) $h = 60$ mm.

4.160 La porción curva de la barra que se muestra en la figura tiene un radio interno de 20 mm. Si se sabe que el esfuerzo permisible en la barra es de 150 MPa, determine la distancia máxima permisible a desde la línea de acción de la fuerza de 3 kN hasta el plano vertical que contiene el centro de curvatura de la barra.

4.161 La porción curva de la barra que se muestra en la figura tiene un radio interno de 20 mm. Si se sabe que la línea de acción de la fuerza de 3 kN se localiza a una distancia $a = 60$ mm del plano vertical que contiene el centro de curvatura de la barra, determine el esfuerzo máximo de compresión en la barra.

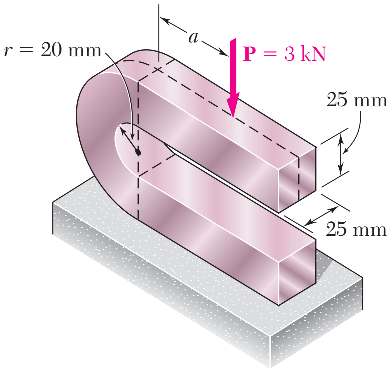


Figura P4.160 y *P4.161*

4.162 Para el anillo dividido que se muestra en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

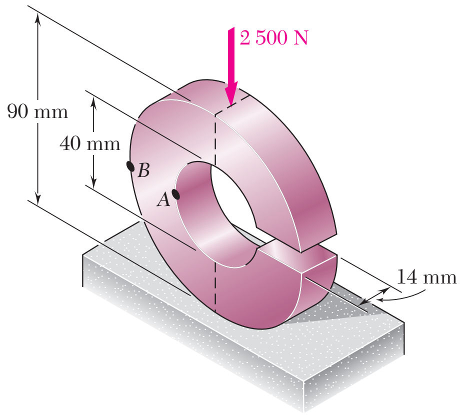

2 500 N
90 mm
40 mm
B
A
14 mm

Figura P4.162

4.163 Los eslabones de acero que tiene la sección transversal mostrada en la figura se encuentran disponibles con diferentes ángulos centrales β. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 12 ksi, determine la fuerza máxima **P** que puede aplicarse a un eslabón para el que $\beta = 90°$.

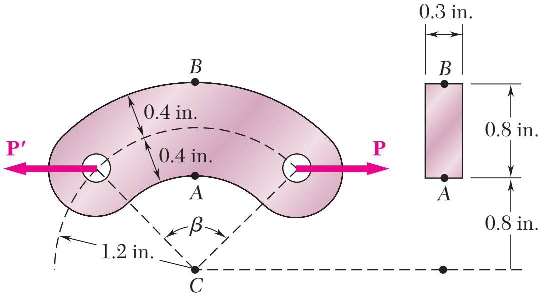

0.3 in.
B
B
0.4 in.
0.4 in.
P′
P
A
A
0.8 in.
0.8 in.
β
1.2 in.
C

Figura P4.163

4.164 Retome el problema 4.163, y ahora suponga que $\beta = 60°$.

4.165 Tres placas se sueldan para formar la viga curva que se muestra en la figura. Para la carga dada, determine la distancia *e* entre el eje neutro y el centroide de la sección transversal.

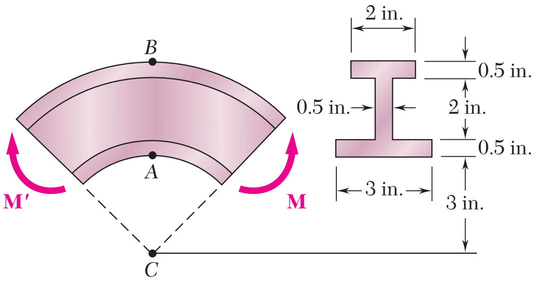

2 in.
B
0.5 in.
0.5 in.
2 in.
0.5 in.
A
M′
M
3 in.
3 in.
C

Figura *P4.165* y P4.166

4.166 Tres placas se sueldan para formar la viga curva que se muestra en la figura. Para $M = 8$ kip · in., calcule el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*, *c*) el centroide de la sección transversal.

4.167 y 4.168 Si se sabe que $M = 20$ kN · m, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

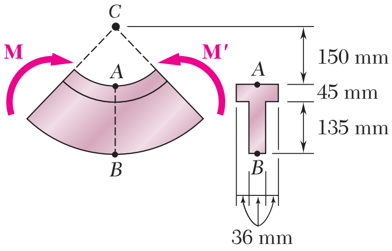


Figura P4.167

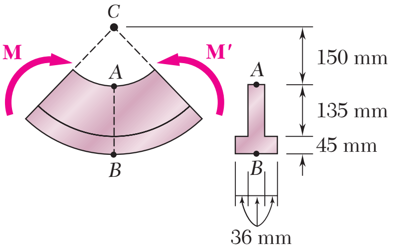


Figura P4.168

4.169 El anillo dividido que se muestra en la figura tiene un radio interior $r_1 = 20$ mm y una sección transversal *circular* con diámetro $d = 32$ mm. Para la carga mostrada en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

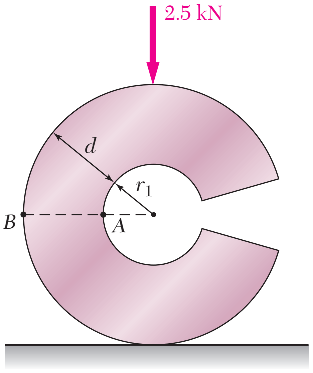


Figura P4.169 y P4.170

4.170 El anillo dividido que se ilustra en la figura tiene un radio interior $r_1 = 16$ mm y una sección transversal *circular* con diámetro $d = 32$ mm. Para la carga mostrada en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.171 El anillo dividido que se muestra en la figura tiene un radio interior $r_1 = 0.8$ in. y una sección transversal *circular* de diámetro $d = 0.6$ in. Si se sabe que cada una de las fuerzas de 120 lb se aplica en el centroide de la sección transversal, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

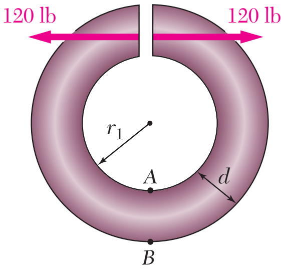


Figura P4.171

4.172 Retome el problema 4.171, y ahora suponga que el anillo tiene un radio interno $r_1 = 0.6$ in. y una sección transversal con diámetro $d = 0.8$ in.

4.173 Para el gancho mostrado en la figura, determine el esfuerzo máximo de tensión en la sección *a-a*.

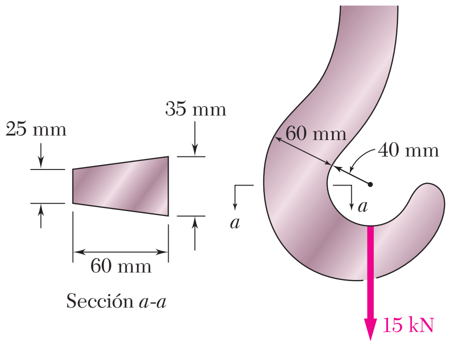

25 mm
35 mm
60 mm
40 mm
a
a
60 mm
Sección a-a
15 kN

Figura *P4.173*

4.174 Para la viga curva y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

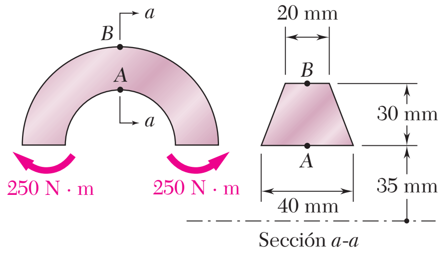

a
B
A
a
250 N · m
250 N · m
20 mm
B
30 mm
A
35 mm
40 mm
Sección a-a

Figura P4.174

4.175 Si se sabe que el componente de máquina mostrado en la figura tiene una sección transversal trapezoidal con $a = 3.5$ in. y $b = 2.5$ in., determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

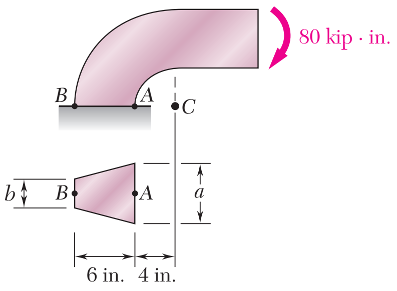

80 kip · in.
B
A
C
b
B
A
a
6 in.
4 in.

Figura *P4.175* y P4.176

4.176 Si se sabe que el componente de máquina mostrado en la figura tiene una sección transversal trapezoidal con $a = 2.5$ in. y $b = 3.5$ in., determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.177 y *4.178* Si se sabe que $M = 5$ kip · in., determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

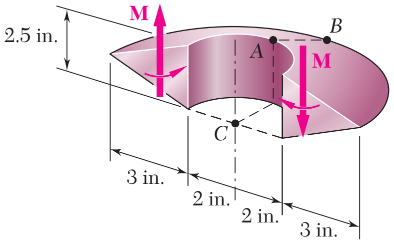

2.5 in.
M
B
A
M
C
3 in.
2 in.
2 in.
3 in.

Figura P4.177

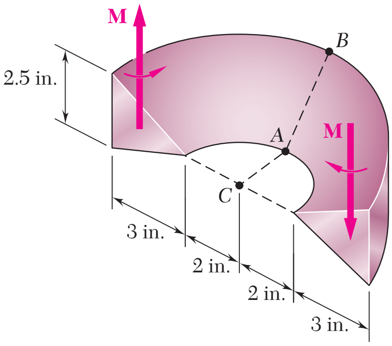

M
B
2.5 in.
A
M
C
3 in.
2 in.
2 in.
3 in.

Figura *P4.178*

4.179 Demuestre que si la sección transversal de una viga curva consta de dos o más rectángulos, el radio *R* de la superficie neutra se expresa como:

$$R = \frac{A}{\ln\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{b_1}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{b_2}\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{b_3}\right]}$$

donde *A* es el área total de la sección.

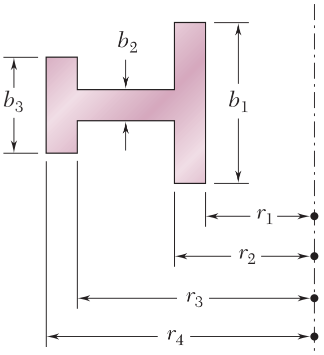

b_2
b_3
b_1
r_1
r_2
r_3
r_4

Figura P4.179

4.180 a 4.182 Mediante la ecuación (4.66) deduzca la expresión para *R* dada en la figura 4.79 para

- ***4.180** Una sección transversal circular.
- **4.181** Una sección transversal trapezoidal.
- **4.182** Una sección transversal triangular.

***4.183** Para una barra curva de sección rectangular sometida a un momento flector **M**, demuestre que el esfuerzo radial en la superficie neutra es

$$\sigma_r = \frac{M}{Ae}\left(1 - \frac{r_1}{R} - \ln\frac{R}{r_1}\right)$$

y calcule el valor de σ_r para la barra curva de los ejemplos 4.10 y 4.11. (*Sugerencia*: Considere el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga situada encima de la superficie neutra.)

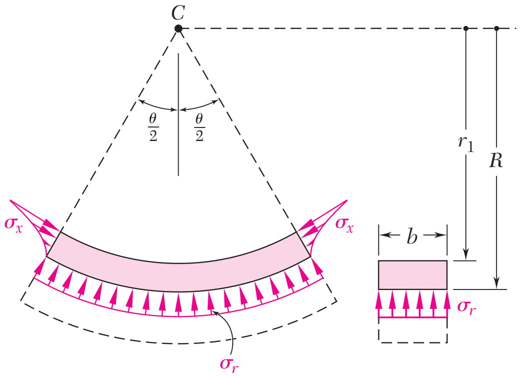

C
$\frac{\theta}{2}$
$\frac{\theta}{2}$
r_1
R
σ_x
σ_x
b
σ_r
σ_r

Figura P4.183

REPASO Y RESUMEN
DEL CAPÍTULO 4

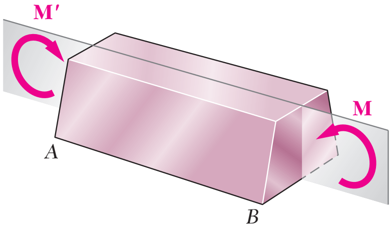


Figura 4.1

Deformación normal en la flexión

Este capítulo estuvo dedicado al análisis de elementos sometidos a *flexión pura*. Se han considerado los esfuerzos y deformaciones de elementos sometidos a pares iguales y opuestos **M** y **M**′ que actúan en el mismo plano longitudinal (figura 4.1).

Primero se estudiaron elementos con un plano de simetría, sometidos a pares que actúan en ese plano. Al considerar las posibles deformaciones del elemento, se demostró que las *secciones transversales permanecen planas* cuando el elemento es deformado [sección 4.3]. Entonces se observó que un elemento sometido a flexión pura tiene una *superficie neutra* a lo largo de la cual las deformaciones y los esfuerzos normales son nulos y que la *deformación longitudinal normal* ϵ_x *varía linealmente* con la distancia y a la superficie neutra:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

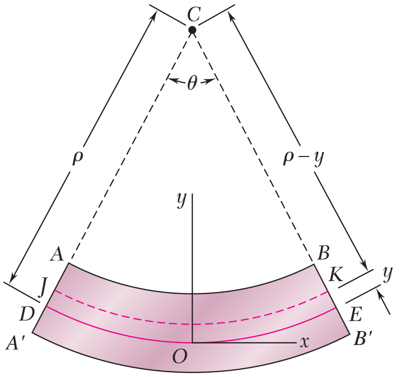


Figura 4.12*a*

donde ρ es el *radio de curvatura* de la superficie neutra (figura 4.12*a*). La intersección de la superficie neutra con una sección transversal se conoce como *eje neutro* de la sección.

Esfuerzo normal en el rango elástico

Para elementos hechos de un material que cumple la ley de Hooke [sección 4.4] se halló que el *esfuerzo normal* σ_x *varía linealmente* con la distancia al eje neutro (figura 4.13). Si σ_m es el esfuerzo máximo,

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.12}$$

donde c es la mayor distancia del eje neutro a un punto de la sección.

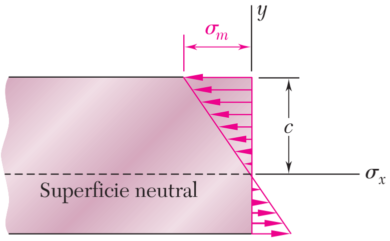


Figura 4.13

Haciendo la suma de las fuerzas elementales $\sigma_x\,dA$ igual a cero, se probó que el *eje neutro pasa por el centroide* de la sección de un elemento sujeto a flexión pura. Luego, haciendo la suma de los momentos de las fuerzas elementales igual al momento flector, se dedujo la *ecuación de la flexión elástica* para el esfuerzo máximo normal

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

en donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro. También se obtuvo el esfuerzo normal a cualquier distancia y desde el eje neutro:

Ecuación de flexión elástica

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

Módulo elástico de la sección

Notando que I y c sólo dependen de la geometría de la sección transversal, se introdujo el concepto de *módulo elástico de la sección*

$$S = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

y luego se utilizó el módulo de la sección para escribir una expresión alternativa para el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{4.18}$$

Curvatura del elemento

Recordando que la curvatura de un elemento es el inverso de su radio de curvatura, se expresó la *curvatura* del elemento como:

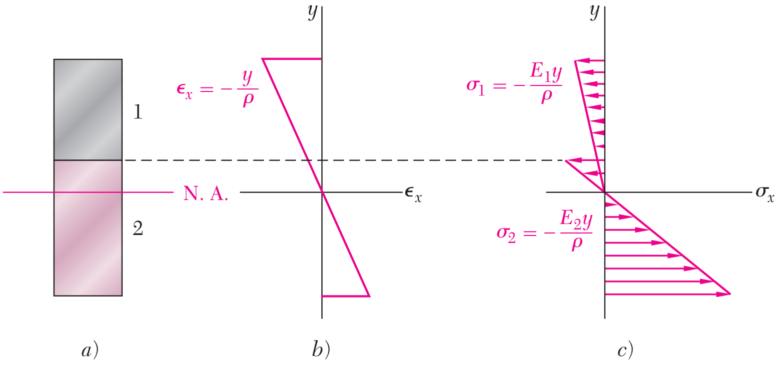
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

Curvatura anticlástica

En la sección 4.5 se completó el estudio de la flexión de elementos homogéneos con un plano de simetría notando que las deformaciones ocurren en el plano de la sección transversal y producen una *curvatura anticlástica* de los elementos.

Elementos hechos de varios materiales

Después se estudió la flexión de elementos hechos de varios materiales con *módulos de elasticidad diferentes* [sección 4.6]. Mientras las secciones transversales permanecen planas, se halló que, en general, *el eje neutro no pasa por el centroide* de la sección transversal compuesta (figura 4.24). Usando la relación entre los módulos de elasticidad de los materiales, se obtuvo una *sección transformada* correspondiente a un elemento equivalente, hecho enteramente de un solo material. Después se utilizaron los métodos previamente desarrollados para determinar los esfuerzos en este elemento homogéneo equivalente (figura 4.26), y luego se usó, de nuevo, la relación entre los módulos de elasticidad para hallar los esfuerzos en la viga compuesta (véanse problemas modelo 4.3 y 4.4).


1
2
N. A.
$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$
y
ϵ_x
y
$\sigma_1 = -\frac{E_1 y}{\rho}$
$\sigma_2 = -\frac{E_2 y}{\rho}$
σ_x

a) *b*) *c*)

Figura 4.24

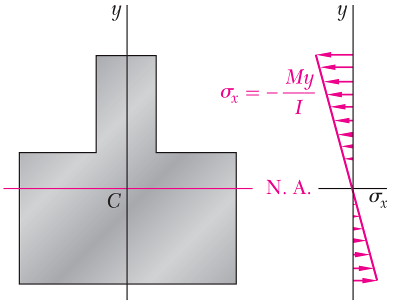


Figura 4.26

Concentraciones de esfuerzos

En la sección 4.7 se discutieron las *concentraciones de esfuerzos* que se producen en elementos sometidos a flexión pura y se dieron gráficos de factores de concentración de esfuerzos para barras planas con soldadura de filete y ranuras en las figuras 4.31 y 4.32.

Después se estudiaron elementos hechos de materiales que no cumplen la ley de Hooke [sección 4.8]. Se analizó una viga rectangular, hecha de un *material elastoplástico* (figura 4.39), a medida que la magnitud del momento flector se aumentaba. El *máximo momento elástico* M_Y ocurría cuando se iniciaba la fluencia en la viga (figura 4.40). Al incrementar aún más el momento flector, se desarrollaban zonas plásticas y el tamaño del núcleo elástico disminuía [sección 4.9]. Finalmente la viga se volvía completamente plástica y se obtenía el máximo momento o *momento plástico* M_p. En la sección 4.11 se encontró que después de retirar las cargas que produjeron fluencia, se presentan en el elemento *deformaciones permanentes y esfuerzos residuales*.

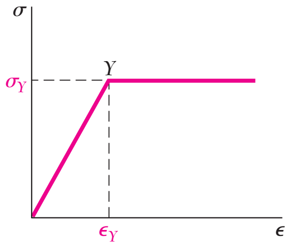
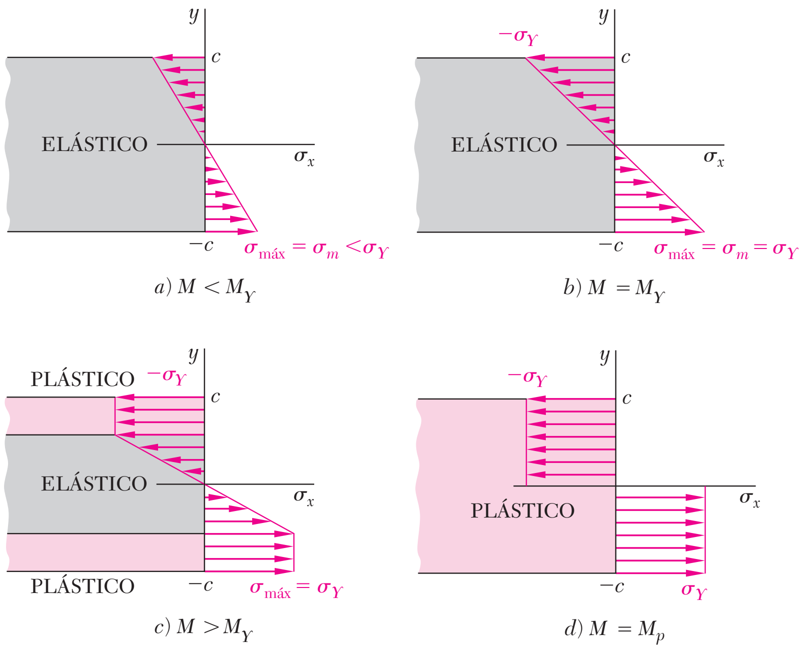


Figura 4.39

Deformaciones plásticas


y
c
ELÁSTICO
σ_x
−c
σ_máx = σ_m < σ_Y
y
−σ_Y
c
ELÁSTICO
σ_x
−c
σ_máx = σ_m = σ_Y
y
PLÁSTICO
−σ_Y
c
ELÁSTICO
σ_x
PLÁSTICO
−c
σ_máx = σ_Y
y
−σ_Y
c
PLÁSTICO
σ_x
−c
σ_Y

a) $M < M_Y$ *b*) $M = M_Y$ *c*) $M > M_Y$ *d*) $M = M_p$

Figura 4.40

Carga axial excéntrica

En la sección 4.12 se estudiaron los esfuerzos en elementos cargados *excéntricamente en un plano de simetría*. En este análisis se usaron métodos desarrollados antes. Se reemplazó la *carga excéntrica* por un sistema fuerza-par localizado en el centroide de la sección transversal (figura 4.48*b*) y luego se superpusieron los esfuerzos debidos a carga céntrica y al par flector (figura 4.51):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

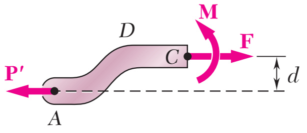


Figura 4.48*b*

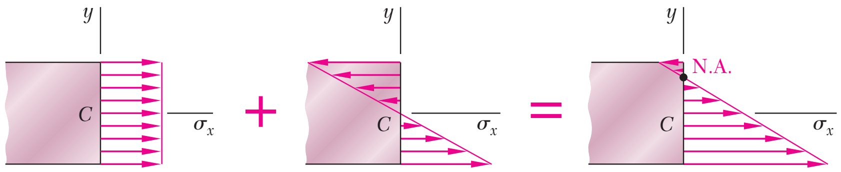

y
C
σ_x
+
y
C
σ_x
=
y
N.A.
C
σ_x

Figura 4.51

Flexión asimétrica

Se estudió luego la flexión de elementos de *sección asimétrica* [sección 4.13]. Se observó que la ecuación de flexión puede usarse siempre que el vector **M** se dirija a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de la sección. Cuando fue necesario se descompuso **M** en componentes a lo largo de los ejes principales y se superpusieron los esfuerzos debidos a los pares componentes (véanse figuras 4.60 y 4.61).

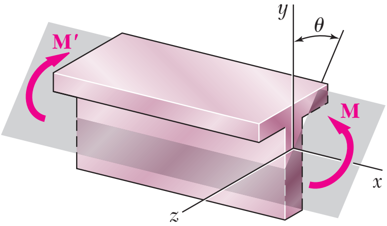


Figura 4.60

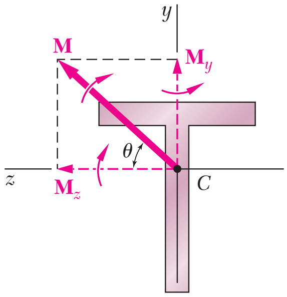


Figura 4.61

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (4.55)$$

Para el par **M** mostrado en la figura 4.65, se determinó la orientación del eje neutro escribiendo

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \qquad (4.57)$$

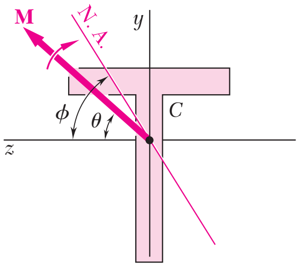


Figura 4.65

Caso general de carga axial excéntrica

El caso general de *carga axial excéntrica* se analizó en la sección 4.14, en donde nuevamente se reemplazó la carga por un sistema fuerza-par localizado en el centroide. Luego se superpusieron los esfuerzos debidos a la carga excéntrica con los de los dos pares componentes dirigidos según los ejes principales:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (4.58)$$

Elementos curvos

El capítulo concluyó con el análisis de esfuerzos en *elementos curvos* (figura 4.76*a*). Mientras las secciones transversales permanecen planas, cuando el elemento está sometido a flexión, se halló que los *esfuerzos no varían linealmente* y que la superficie neutra no pasa por el centroide de la sección. La distancia R del centro de curvatura del elemento a la superficie neutra, se encontró que era

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} \qquad (4.66)$$

donde A es el área de la sección transversal. El esfuerzo normal a una distancia y de la superficie neutra se expresó como

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R - y)} \qquad (4.70)$$

donde M es el momento flector y e la distancia del centroide de la sección al eje neutro.

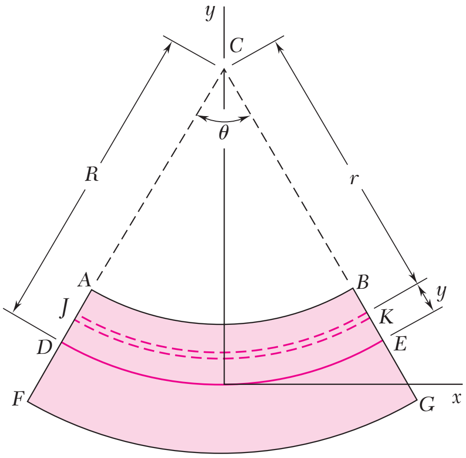


Figura 4.76*a*

PROBLEMAS DE REPASO

4.184 y *4.185* Dos secciones laminadas W4 × 13 se unen con soldadura como se indica en la figura. Si se sabe que para la aleación de acero utilizada $\sigma_Y = 36$ ksi y $\sigma_U = 58$ ksi con un factor de seguridad de 3.0, determine el máximo par que puede aplicarse cuando el ensamble se flexiona alrededor del eje z.

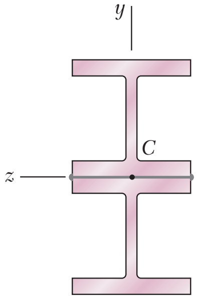


Figura P4.184

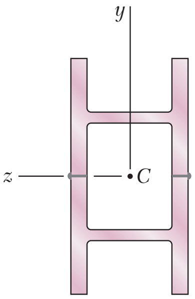


Figura *P4.185*

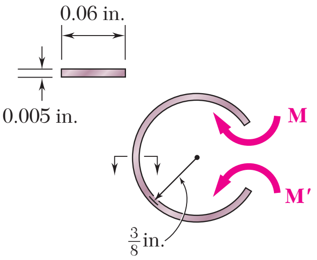


Figura P4.186

4.186 Se observa que una tira delgada de acero con 0.06 in. de ancho puede doblarse en un círculo de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro sin que se produzca ninguna deformación permanente. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el esfuerzo máximo sobre la tira flexionada, *b*) la magnitud de los pares requeridos para doblar la tira.

4.187 Una barra que tiene la sección transversal mostrada en la figura se ha formado al unir fuertemente piezas de latón y aluminio. Con los datos que se presentan a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra compuesta se flexiona alrededor de un eje horizontal.

	Aluminio	**Latón**
Módulo de elasticidad	70 GPa	105 GPa
Esfuerzo permisible	100 MPa	160 MPa

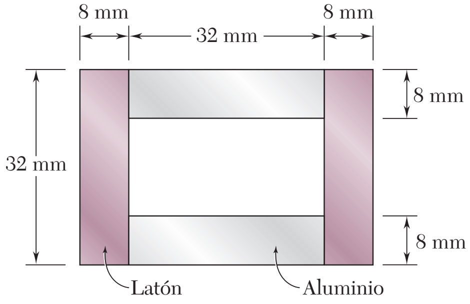


Figura P4.187

4.188 Para la barra compuesta del problema 4.187, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra se flexiona alrededor de un eje vertical.

4.189 Al extremo de un perfil W8 × 21 de acero laminado pueden aplicarse hasta tres cargas axiales, cada una de magnitud $P = 10$ kips. Determine el esfuerzo en el punto A, *a*) para la carga indicada, *b*) si sólo se aplican cargas en los puntos 1 y 2.

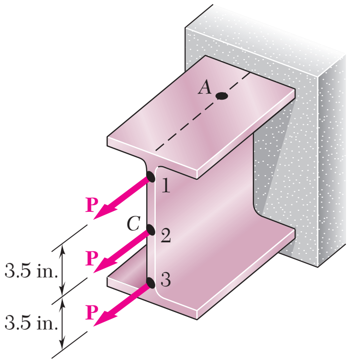


Figura P4.189

4.190 Tres placas de acero de 120 × 10 mm se soldaron para formar la viga mostrada en la figura. Si se sabe que el acero es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa, determine *a*) el momento flector para el que las zonas plásticas en las partes superior e inferior de la viga son de 40 mm de espesor, *b*) el radio de curvatura correspondiente en la viga.

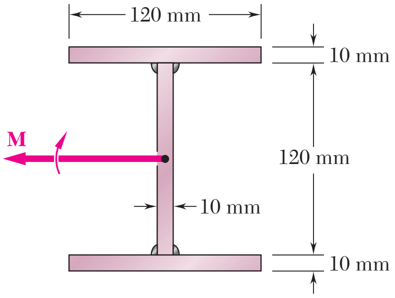


Figura P4.190

4.191 Una fuerza vertical **P** con magnitud de 20 kips se aplica en un punto C localizado en el eje de simetría de la sección transversal de una columna corta. Si se sabe que $y = 5$ in., determine *a*) el esfuerzo en el punto A, *b*) el esfuerzo en el punto B, *c*) la localización del eje neutro.

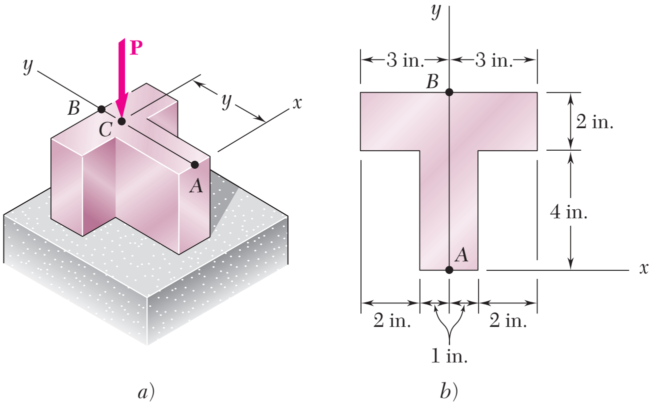


Figura *P4.191*

4.192 El perfil que se muestra en la figura se formó doblando una placa delgada de acero. Si se supone que el espesor t es pequeño comparado con la longitud a del lado del perfil, determine el esfuerzo a) en A, b) en B, c) en C.

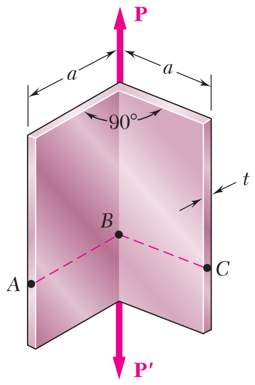


Figura P4.192

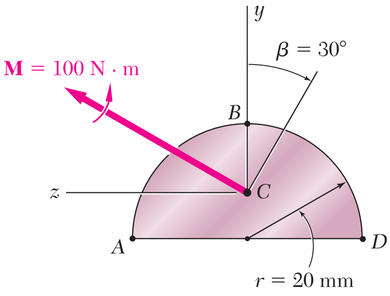


Figura P4.193

4.193 El par **M** se aplica a la viga cuya sección se muestra en la figura, en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo a) en el punto A, b) en el punto B, c) en el punto D.

4.194 Una placa circular rígida con un radio de 125 mm se sujeta a un poste sólido rectangular de 150 × 200 mm, con el centro de la placa directamente encima del centro del poste. Si se aplica una fuerza **P** de 4 kN en E con $\theta = 30°$, determine a) el esfuerzo en el punto A, b) el esfuerzo en el punto B, c) el punto donde el eje neutro interseca la línea ABD.

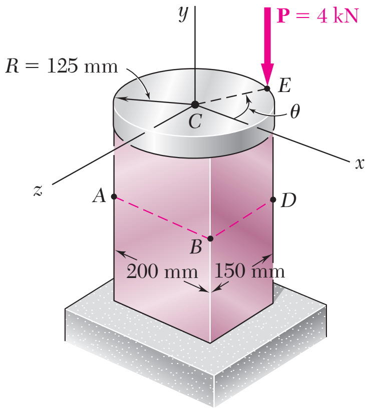


Figura *P4.194*

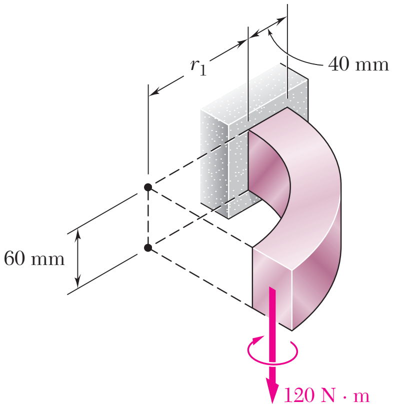


Figura P4.195

4.195 La barra curva que se muestra en la figura tiene una sección transversal de 40 × 60 mm y un radio interno r_1 = 15 mm. Para la carga mostrada en la figura, determine los esfuerzos máximos a tensión y a compresión en la barra.

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas fueron diseñados para resolverse con ayuda de una computadora.

4.C1 Dos tiras de aluminio y una tira de acero se unieron para formar un elemento compuesto con ancho $b = 60$ mm y altura $h = 40$ mm. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 75 GPa para el aluminio. Sabiendo que $M =$ 1 500 N · m, escriba un programa para computadora que calcule el esfuerzo máximo en el aluminio y el acero para valores de a de 0 a 20 mm utilizando incrementos de 2 mm. Utilice incrementos apropiados más pequeños y determine *a*) el esfuerzo máximo que puede ocurrir en el acero, *b*) el valor correspondiente de a.

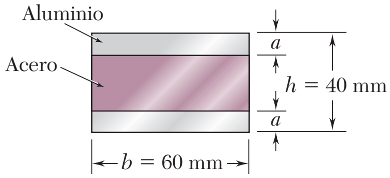


Figura P4.C1

4.C2 Una viga con la sección transversal mostrada, hecha de un acero que se supone elastoplástico con resistencia a la fluencia σ_Y y módulo de elasticidad E, se flexiona alrededor del eje x. *a*) Denotando por y_Y la mitad del espesor del núcleo elástico, escriba un programa para computadora que calcule el momento flector M y el radio de curvatura ρ para valores de y_Y que vayan de $\frac{1}{2}d$ hasta $\frac{1}{6}d$ utilizando decrementos iguales a $\frac{1}{2}t_f$. Ignore los efectos de los filetes. *b*) Utilice este programa para resolver el problema 4.190.

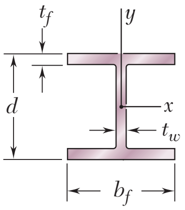


Figura P4.C2

4.C3 Un par **M** de 8 kips · in. se aplica a una viga con la sección transversal mostrada en la figura en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Tomando en cuenta que el centroide de la sección transversal se localiza en C, y que los ejes y y z son los principales, escriba un programa de computadora que calcule el esfuerzo en A, B, C y D para valores de β de 0 a 180° utilizando incrementos de 10°. (*Datos*: $I_y = 6.23$ in.^{4} e $I_z = 1.481$ in.^{4})

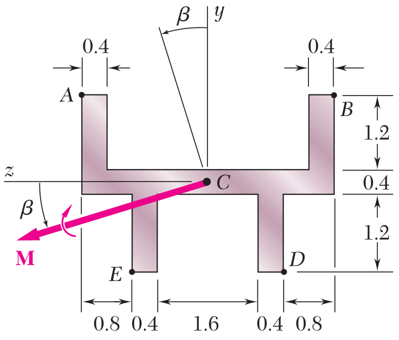


Figura P4.C3 Dimensiones en pulgadas

4.C4 Pares con momento $M = 2\text{ kN}\cdot\text{m}$ se aplican como se muestra en la figura a una barra curva que tiene una sección transversal rectangular con $h = 100$ mm y $b = 25$ mm. Escriba un programa de computadora y utilícelo para calcular los esfuerzos en los puntos A y B para valores de la razón r_1/h de 10 hasta 1 utilizando decrementos de 1, y de 1 a 0.1 empleando decrementos de 0.1. Usando incrementos apropiados más pequeños, determine la razón r_1/h para la que el esfuerzo máximo en la barra curva es un 50% mayor que el esfuerzo máximo en una barra recta con la misma sección transversal.

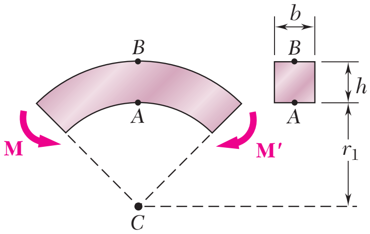


Figura P4.C4

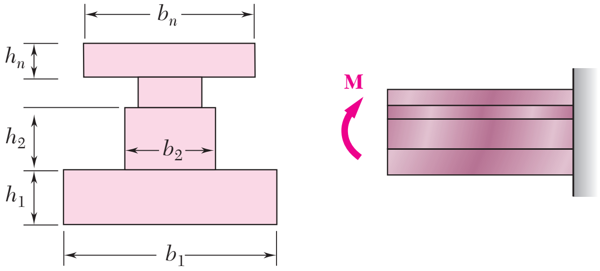


Figura P4.C5

4.C5 El par **M** se aplica a una viga de sección transversal como la que se muestra en la figura. *a*) Escriba un programa de computadora que, para cargas expresadas en el SI o en el sistema inglés, pueda emplearse para calcular los esfuerzos máximos a tensión y a compresión en la viga. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 4.7, 4.8 y 4.9.

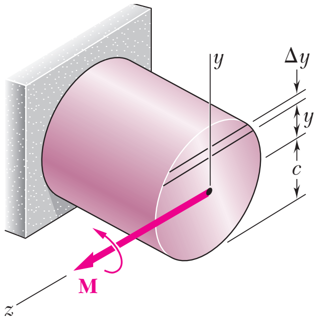


Figura P4.C6

4.C6 Una barra sólida con radio $c = 1.2$ in. está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 29\,000$ ksi y $\sigma_Y = 42$ ksi. La barra se somete a un par con momento M que se incrementa desde cero hasta el momento máximo elástico M_Y y de ahí al momento plástico M_p. Denotando por y_Y la mitad del espesor del núcleo elástico, escriba un programa de cómputo y úselo para calcular el momento flector M y el radio de curvatura ρ para valores de y_Y de 1.2 in. a 0 utilizando decrementos de 0.2 in. (*Sugerencia*: Divida la sección transversal en 80 elementos horizontales de 0.03 in. de altura.)

4.C7 El elemento de máquina del problema 4.178 debe rediseñarse eliminando parte de la sección transversal triangular. Se cree que la remoción de una pequeña área triangular de ancho a reducirá el esfuerzo máximo en el elemento. Para verificar este concepto de diseño, escriba un programa de cómputo que calcule el esfuerzo máximo en el elemento para valores de a de 0 a 1 in. utilizando incrementos de 0.1 in. Utilice incrementos apropiadamente menores y determine la distancia a para la que el esfuerzo máximo sea tan pequeño como sea posible y el valor correspondiente del esfuerzo máximo.

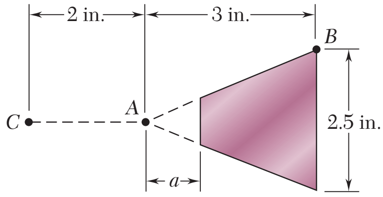


Figura P4.C7

CAPÍTULO

5

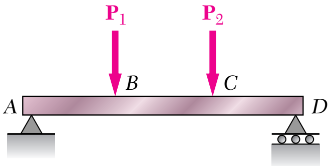
Análisis y diseño de vigas para flexión

Las vigas que soportan el sistema de grúas viajeras múltiples mostrado en la figura están sometidas a cargas transversales que provocan la flexión de las vigas. Los esfuerzos normales resultantes de tales cargas se estudiarán en este capítulo.

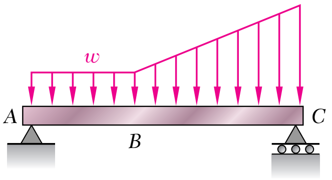
5.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo y la mayor parte del siguiente se dedicarán al análisis y diseño de *vigas*, es decir, de elementos estructurales que soportan cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento. Las vigas son comúnmente elementos prismáticos largos y rectos, como se observa en la fotografía de la página anterior. Las vigas de acero y de aluminio juegan un papel importante tanto en la ingeniería estructural como en la mecánica. Las vigas de madera se emplean, sobre todo, en la construcción residencial (figura 5.1). En la mayor parte de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga. Tales *cargas transversales* sólo causan flexión y corte en la viga. Cuando las cargas no se encuentran en ángulo recto con la viga, también producen cargas axiales en ella.

Figura 5.1



a) Cargas concentradas

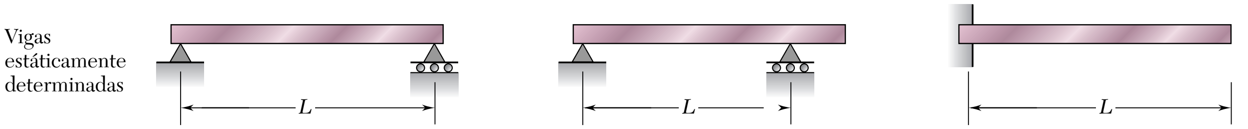


b) Carga distribuida

Figura 5.2

La carga transversal de una viga puede consistir en *cargas concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kips (figura 5.2*a*), en una *carga distribuida* w, expresada en N/m, kN/m, lb/ft o kips/ft (figura 5.2*b*), o una combinación de ambas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante a lo largo de parte de la viga (como entre A y B en la figura 5.2*b*), se dice que la carga está *uniformemente distribuida* en dicha parte de la viga.

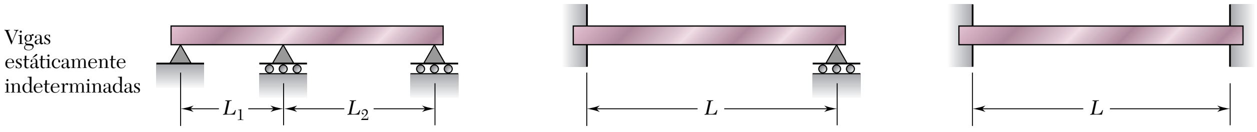
Las vigas se clasifican de acuerdo con la manera en la que se encuentran apoyadas. Varios tipos de vigas utilizadas con frecuencia se presentan en la figura 5.3. La distancia L mostrada en distintas partes de la figura se denomina el *claro*. Note que las reacciones en los soportes de las vigas en las partes *a*, *b* y *c* de la figura involucran un total de sólo tres incógnitas y, por



a) Viga simplemente apoyada

b) Viga con un tramo en voladizo

c) Viga en voladizo



d) Viga continua

e) Viga empotrada en un extremo
y simplemente apoyada
en el otro extremo

f) Viga empotrada

Figura 5.3

lo tanto, pueden determinarse empleando métodos estáticos. Tales vigas se conocen como *estáticamente determinadas* y se estudiarán en este capítulo y en el siguiente. Por otra parte, las reacciones en los apoyos de las vigas en las partes *d*, *e* y *f* de la figura 5.3 involucran más de tres incógnitas y no pueden determinarse únicamente por métodos estáticos. Las propiedades de las vigas con respecto a su resistencia a las deformaciones debe tomarse en cuenta. Tales vigas se denominan *estáticamente indeterminadas* y su explicación se aplazará hasta el capítulo 9, donde se estudiarán las deformaciones en vigas.

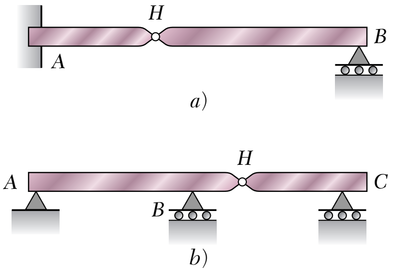


Figura 5.4

En ocasiones dos o más vigas se conectan por bisagras para formar una estructura continua única. Dos ejemplos de vigas con bisagra en un punto *H* se muestran en la figura 5.4. Se observará que las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógnitas y no pueden determinarse del diagrama de cuerpo libre del sistema de dos vigas. Pueden obtenerse, sin embargo, considerando el diagrama de cuerpo libre de cada viga por separado; se encuentran involucradas seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la bisagra), y se encuentran disponibles seis ecuaciones.

Se mostró en la sección 4.1 que, si se efectúa un corte en un punto *C* de una viga en voladizo que soporta una carga concentrada **P** en su extremo (figura 4.6), se encuentra que las fuerzas internas en el corte consisten de una fuerza cortante **P**′ igual y opuesta a la carga **P** y en un momento flector **M** cuyo momento es igual al momento de **P** alrededor de *C*. Una situación análoga prevalece para otros tipos de apoyos y cargas. Considere, por ejemplo, una viga simplemente apoyada *AB* que porte dos cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida (figura 5.5*a*). Para determinar las fuerzas internas en un corte a través del punto *C*, primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de toda la viga para obtener las reacciones en los apoyos (figura 5.5*b*). Haciendo un corte a través de *C*, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de *AC* (figura 5.5*c*), del que se obtiene la fuerza cortante **V** y el par flector **M**.

El par flector **M** crea *esfuerzos normales* en la sección transversal, mientras que la fuerza cortante **V** produce *esfuerzos cortantes* en dicha sección. En la mayoría de los casos el criterio dominante en el diseño por resistencia de una viga es el valor máximo del esfuerzo normal en la viga. La determinación de los esfuerzos normales en una viga será el tema de este capítulo, mientras que los esfuerzos cortantes se analizarán en el capítulo 6.

Debido a que la distribución de los esfuerzos normales en una sección dada depende sólo del valor del momento flector *M* en dicha sección y de la geometría de la sección,† las fórmulas de flexión elástica deducidas en la sección 4.4 pueden utilizarse para determinar el esfuerzo máximo, así como el esfuerzo en cualquier punto dado, en la sección. Se escribe‡

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \qquad \sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad (5.1, 5.2)$$

donde *I* es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano del par, *y* es la distancia desde la super-

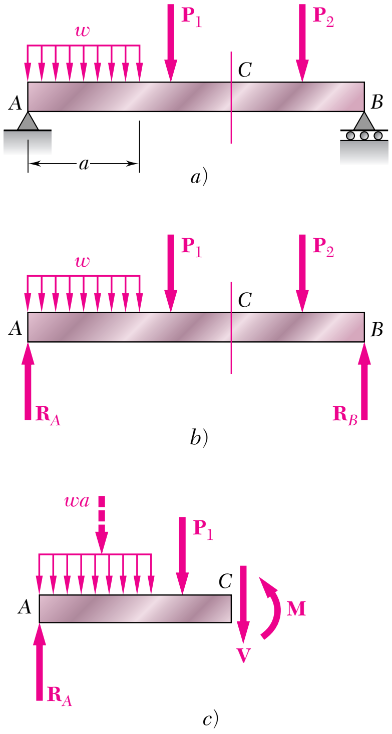


Figura 5.5

---

†Se supone que la distribución de los esfuerzos normales en una sección transversal dada no se ve afectada por las deformaciones causadas por los esfuerzos cortantes. Esta hipótesis será verificada en la sección 6.5.

‡Recuerde que en la sección 4.2 se vio que *M* puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la concavidad de la viga en el punto considerado es hacia arriba o hacia abajo. Así, en el caso considerado aquí de una carga transversal, el signo de *M* puede variar a lo largo de la viga. Como, por otra parte, σ_m es una cantidad positiva, el valor absoluto de *M* se utiliza en la ecuación (5.1).

ficie neutra y c es el valor máximo de dicha distancia (figura 4.13). También se recuerda, de la sección 4.4, que introduciendo el módulo de sección elástico $S = I/c$ de la viga, el valor máximo σ_m del esfuerzo normal en la sección puede expresarse como

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} \tag{5.3}$$

El hecho de que σ_m sea inversamente proporcional a S subraya la importancia de seleccionar vigas con un módulo de sección grande. Los módulos de sección de varios perfiles de acero laminado se dan en el apéndice C, en tanto que el módulo de sección de un perfil rectangular puede expresarse, como se mostró en la sección 4.4, como

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2 \tag{5.4}$$

donde b y h son, respectivamente, el ancho y el espesor de la sección transversal.

La ecuación (5.3) también muestra que, para una viga con sección transversal uniforme, σ_m es proporcional a $|M|$. Por lo tanto, el valor máximo del esfuerzo normal en la viga ocurre en la sección donde $|M|$ es más grande. De lo anterior, se deduce que una de las partes más importantes del diseño de una viga para una condición dada de carga es la localización y la magnitud del momento flector máximo.

Esta tarea se facilita si se dibuja un *diagrama de momento flector*, es decir, si el valor del momento flector M se determina en varios puntos de la viga y se grafica contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Y se facilita aún más si se dibuja un *diagrama de cortante* al mismo tiempo que se grafica la fuerza cortante V contra x.

La convención de signos utilizada para registrar los valores de la fuerza cortante y del momento flector se estudiará en la sección 5.2. Los valores de V y M serán obtenidos, entonces, en varios puntos de la viga dibujando diagramas de cuerpo libre de porciones sucesivas de ella. En la sección 5.3, las relaciones entre carga, cortante y momento flector se deducirán y utilizarán para obtener los diagramas de cortante y de momento flector. Este enfoque facilita la obtención del máximo valor absoluto del momento flector y, por lo tanto, de la determinación del esfuerzo normal máximo en la viga.

En la sección 5.4 se aprenderá a diseñar una viga para la flexión, es decir, una viga en la que su momento normal máximo no exceda el valor permisible. Como se indicó antes, éste es el criterio dominante en el diseño de una viga.

Otro método para la determinación de los valores máximos del cortante y del momento flector, basado en la expresión de V y de M en términos de *funciones de singularidad*, se analizará en la sección 5.5. Este enfoque se presta bien al uso de computadoras y se explicará con mayor profundidad en el capítulo 9 para facilitar la obtención de la pendiente y de la deflexión en vigas.

Finalmente, el diseño de *vigas no prismáticas*, esto es, vigas con sección transversal variable, se examinará en la sección 5.6. Seleccionando la forma y el tamaño de la sección transversal variable de tal manera que el módulo de sección elástico $S = I/c$ varíe a lo largo de la longitud de la viga de la misma manera que $|M|$, es posible diseñar vigas para las que el esfuerzo normal máximo en cada sección sea igual al esfuerzo permisible del material. Tales vigas se conocen como vigas de *resistencia constante*.

5.2 DIAGRAMAS DE CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

Como se indicó en la sección 5.1, la determinación de los valores absolutos máximos del cortante y del momento flector en una viga se facilitan mucho si V y M se grafican contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Además, como se verá en el capítulo 9, el conocimiento de M como una función de x es esencial para la determinación de la flexión de una viga.

En los ejemplos y problemas modelo de esta sección, los diagramas de cortante y de momento flector se obtendrán determinando los valores de V y de M en puntos selectos de la viga. Estos valores se calcularán de la manera habitual, es decir, efectuando un corte a través del punto donde deben ser determinados (figura 5.6*a*) y considerando el equilibrio de la porción de viga localizada en cualquiera de los lados de la sección (figura 5.6*b*). Ya que las fuerzas cortantes $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ tienen sentidos opuestos, el registrar el corte en el punto C con una flecha hacia arriba o hacia abajo no tendría significado, a menos que se indicase al mismo tiempo cuál de los cuerpos libres AC y CB se está considerando. Por esta razón, el corte V se registrará con un signo: un *signo positivo* si las fuerzas cortantes se dirigen como se observa en la figura 5.6*b*, y un *signo negativo* en el caso contrario. Una convención similar se aplicará al momento flector M. Se considerará positivo si los pares flectores se dirigen como se muestra en dicha figura, y negativos en el caso contrario.† Resumiendo las convenciones de signos presentados, se enuncia:

El cortante V y el momento flector M en un punto dado de una viga se consideran positivos cuando las fuerzas internas y los pares que actúan en cada porción de la viga se dirigen como se indica en la figura 5.7a.

Estas convenciones pueden recordarse más fácilmente si se advierte que

1. *El cortante en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas* **externas** *(cargas y reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar la viga en ese punto como se indica en la figura 5.7b.*
2. *El momento flector en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas* **externas** *que actúan sobre la viga tienden a flexionar la viga en ese punto como se muestra en la figura 5.7c.*

Otra forma de recordar las conversiones es advertir que la situación descrita en la figura 5.7, en la que los valores del cortante y del momento flector son positivos, es precisamente la situación que ocurre en la mitad izquierda de una viga simplemente apoyada que lleve una carga única concentrada en su centro. Este caso particular se analiza por completo en el siguiente ejemplo.

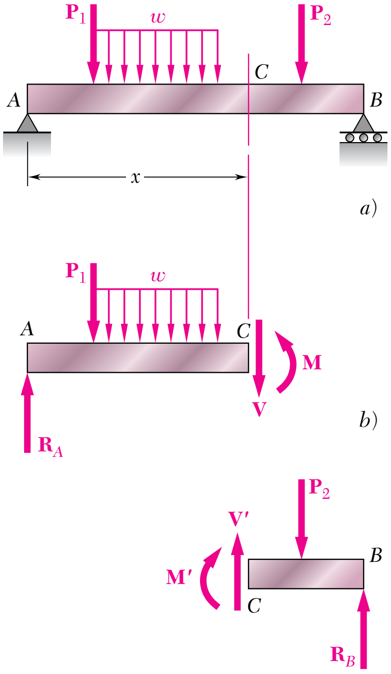
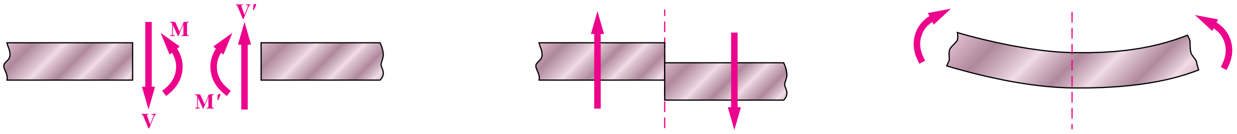


Figura 5.6



a) Fuerzas internas
(corte positivo y momento flector positivo)

b) Efecto de las fuerzas externas
(corte positivo)

c) Efecto de las fuerzas externas
(momento flector positivo)

Figura 5.7

---

†Advierta que esta convención es la misma que se utilizó anteriormente en la sección 4.2.

EJEMPLO 5.01

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para una viga simplemente apoyada *AB* con claro *L* sometida a una carga única concentrada **P** en su centro *C* (figura 5.8).

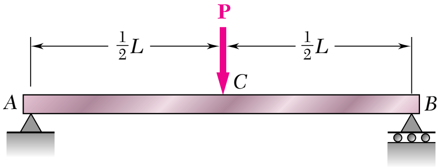

P
$\frac{1}{2}L$
$\frac{1}{2}L$
C
A
B

Figura 5.8

Primero se obtienen las reacciones en los soportes a partir del diagrama de cuerpo libre de la viga entera (figura 5.9*a*); se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

A continuación se corta la viga en un punto *D* entre *A* y *C* y se dibujan los diagramas de cuerpo libre de *AD* y de *DB* (figura 5.9*b*). *Suponiendo que el corte y el momento flector son positivos*, se dirigen las fuerzas internas **V** y **V′** y los pares internos **M** y **M′** como se indica en la figura 5.7*a*. Considerando el cuerpo libre *AD* y escribiendo que la suma de las componentes verticales y que la suma de momentos alrededor de *D* de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son cero, se encuentra que $V = +P/2$ y que $M = +Px/2$. Tanto el cortante como el momento flector son, por lo tanto, positivos. Esto puede verificarse observando que la reacción en *A* tiende a cortar y a flexionar la viga en *D* como se indica en las figuras 5.7*b* y *c*. Ahora se grafican *V* y *M* entre *A* y *C* (figuras 5.9*d* y *e*); el cortante tiene un valor constante $V = P/2$ mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.

Cortando ahora la viga en el punto *E* entre *C* y *B* y considerando el diagrama de cuerpo libre *EB* (figura 5.9*c*) se escribe que la suma de los componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a *E* actuando en el cuerpo libre son cero. Se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. El cortante es, por lo tanto, negativo y el momento flector, positivo. Esto puede verificarse observando que la reacción en *B* flexiona a la viga en *E* como se indica en la figura 5.7*c* pero que tiende a cortarla en una manera opuesta a la mostrada en la figura 5.7*b*. Ahora es posible completar los diagramas de cortante y de momento flector de las figuras 5.9*d* y *e*; el corte tiene un valor constante $V = -P/2$ entre *C* y *B*, mientras que el momento flector disminuye linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

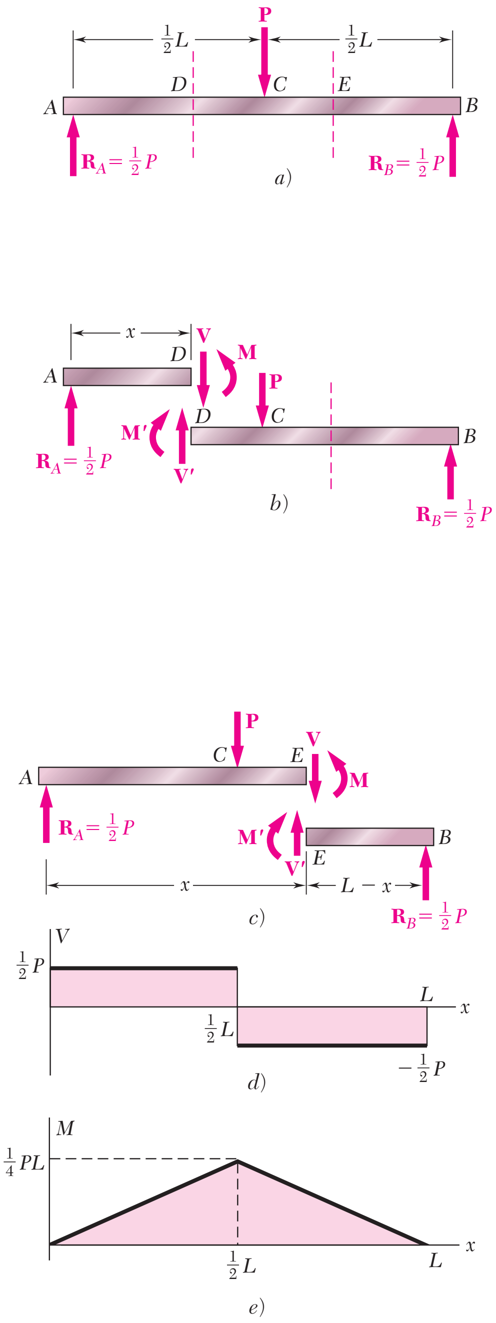

P
$\frac{1}{2}L$
$\frac{1}{2}L$
D
C
E
A
B
$\mathbf{R}_A = \frac{1}{2}P$
$\mathbf{R}_B = \frac{1}{2}P$
a)
x
V
M
D
A
P
M′
D
C
B
$\mathbf{R}_A = \frac{1}{2}P$
V′
b)
$\mathbf{R}_B = \frac{1}{2}P$
P
C
E
V
A
M
$\mathbf{R}_A = \frac{1}{2}P$
M′
B
V′
E
x
$L - x$
c)
$\mathbf{R}_B = \frac{1}{2}P$
V
$\frac{1}{2}P$
L
x
$\frac{1}{2}L$
$-\frac{1}{2}P$
d)
M
$\frac{1}{4}PL$
x
$\frac{1}{2}L$
L
e)

Figura 5.9

Advierta que, del ejemplo anterior, cuando una viga se somete únicamente a cargas concentradas, el cortante es constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre las cargas. En tales situaciones, por lo tanto, es posible dibujar con facilidad los diagramas de cortante y de momento flector, una vez que los valores de V y de M se han obtenido en secciones seleccionadas justo a la izquierda y justo a la derecha de los puntos donde las cargas y las reacciones se aplican (véase problema modelo 5.1).

EJEMPLO 5.02

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para una viga AB en voladizo con un claro L que soporta una carga uniformemente distribuida w (figura 5.10).

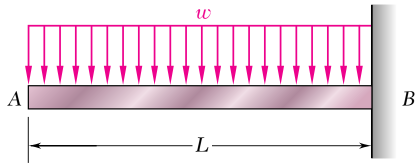


Figura 5.10

Se corta la viga en un punto C entre A y B y se dibuja el diagrama de cuerpo libre de AC (figura 5.11a) dirigiendo **V** y **M** como se muestra en la figura 5.7a. Denotando con x la distancia de A a C y reemplazando la carga distribuida sobre AC por su resultante wx aplicada en el punto medio de AC, se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -wx - V = 0 \qquad V = -wx$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_C = 0: \qquad wx\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \qquad M = -\frac{1}{2}wx^2$$

Se observa que el diagrama de cortante se representa con una línea recta oblicua (figura 5.11b) y el diagrama de momento flector con una parábola (5.11c). Los valores máximos de V y M ocurren, ambos, en B, donde se tiene

$$V_B = -wL \qquad M_B = -\tfrac{1}{2}wL^2$$

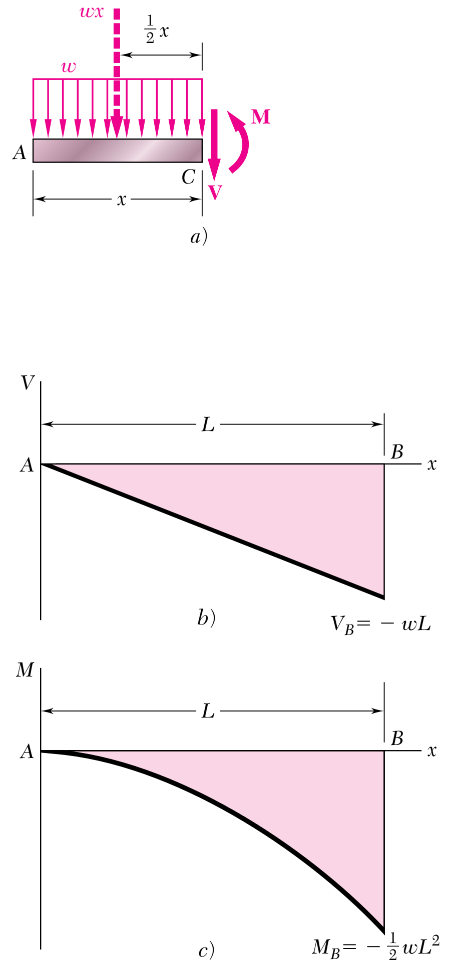
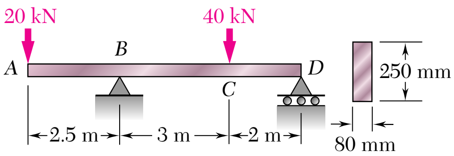
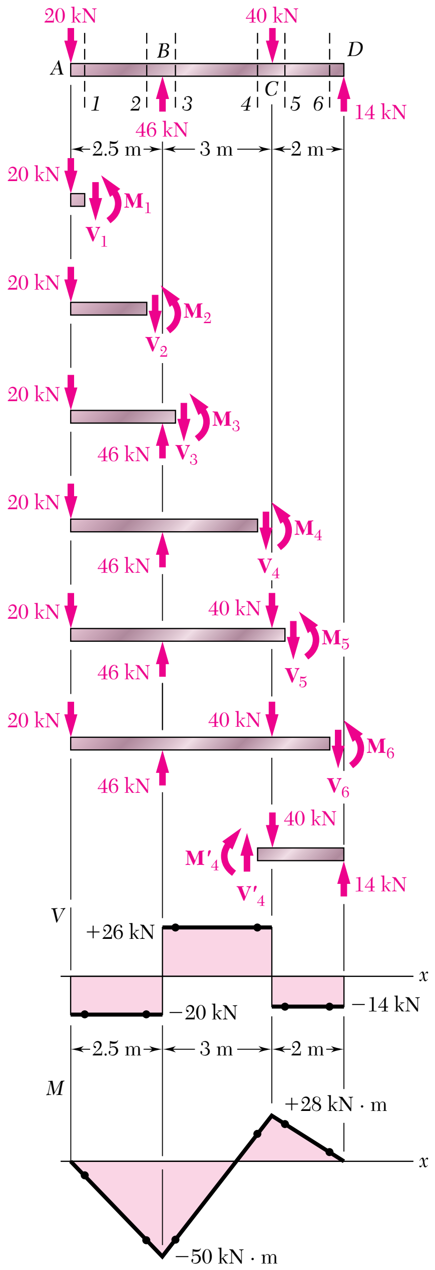


Figura 5.11



PROBLEMA MODELO 5.1

Para la viga de madera cargada que muestra la figura, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga entera como cuerpo libre, se encuentra que

$$\mathbf{R}_B = 40\ \text{kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\ \text{kN}\uparrow$$

Diagramas de cortante y de momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN en A. Considerando al muñón de viga a la izquierda del corte *1* como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivas (de acuerdo con la convención estándar), se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -20\text{ kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_1 = 0: \qquad (20\text{ kN})(0\text{ m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$$

A continuación se considera como cuerpo libre la porción de la viga a la izquierda del corte 2 y se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -20\text{ kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_2 = 0: \qquad (20\text{ kN})(2.5\text{ m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$

El cortante y el momento flector en los cortes *3*, *4*, *5* y *6* se determinan de manera similar a los diagramas de cuerpo libre que se muestran. Se obtiene

$$\begin{aligned} V_3 &= +26\text{ kN} & M_3 &= -50\text{ kN}\cdot\text{m} \\ V_4 &= +26\text{ kN} & M_4 &= +28\text{ kN}\cdot\text{m} \\ V_5 &= -14\text{ kN} & M_5 &= +28\text{ kN}\cdot\text{m} \\ V_6 &= -14\text{ kN} & M_6 &= 0 \end{aligned}$$

Para las últimas secciones, los resultados pueden obtenerse más fácilmente considerando como cuerpo libre la porción de la viga a la derecha del corte. Por ejemplo, para la porción de la viga a la derecha del corte *4*, se tiene

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad V_4 - 40\text{ kN} + 14\text{ kN} = 0 \qquad V_4 = +26\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_4 = 0: \qquad -M_4 + (14\text{ kN})(2\text{ m}) = 0 \qquad M_4 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con estos datos, es posible graficar los seis puntos mostrados en los diagramas de cortante y de momento flector. Como se indicó anteriormente en esta sección, el cortante tiene valor constante entre cargas concentradas, y el momento flector varía linealmente; se obtienen, por lo tanto, los diagramas de cortante y de momento flector mostrados.

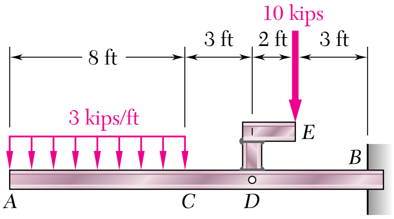
Esfuerzo normal máximo. Ocurre en B, donde $|M|$ es máximo. Se utiliza la ecuación (5.4) para obtener el módulo de sección

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}(0.080\text{ m})(0.250\text{ m})^2 = 833.33 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

Sustituyendo este valor y $|M| = |M_B| = 50 \times 10^3\text{ N}\cdot\text{m}$ en la ecuación (5.3):

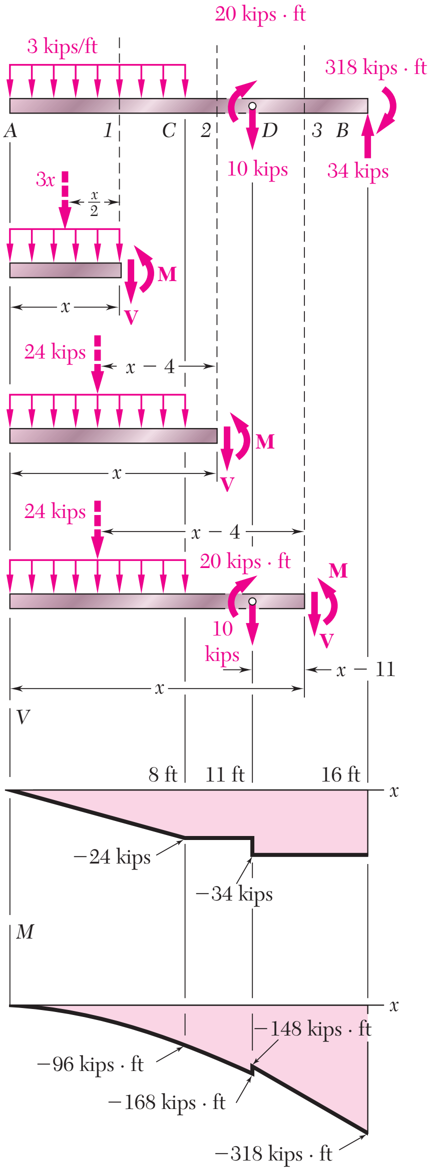
$$\sigma_m = \frac{|M_B|}{S} = \frac{(50 \times 10^3\text{ N}\cdot\text{m})}{833.33 \times 10^{-6}} = 60.00 \times 10^6\text{ Pa}$$

Esfuerzo normal máximo en la viga = 60.0 MPa ◀



PROBLEMA MODELO 5.2

La estructura mostrada en la figura consiste de una viga W10 × 112 de acero laminado *AB* y de dos elementos cortos soldados y añadidos a la viga. *a*) Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y la carga dada. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo en las secciones justo a la izquierda y justo a la derecha del punto *D*.



SOLUCIÓN

Carga equivalente de la viga. La carga de 10 kips se reemplaza por un sistema equivalente de fuerza-par en *D*. La reacción en *B* se determina considerando la viga como un cuerpo libre.

a) Diagramas de cortante y de momento flector

De A a C. Se determinan las fuerzas internas a una distancia *x* del punto *A* considerando la porción de la viga a la izquierda del corte *1*. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su resultante, y se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -3x - V = 0 \qquad V = -3x \text{ kips}$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_1 = 0: \qquad 3x(\tfrac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = -1.5x^2 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$

Como el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura puede utilizarse para todos los valores de *x* menores de 8 ft, las expresiones obtenidas para *V* y *M* son válidas en la región $0 < x < 8$ ft.

De C a D. Considerando la porción de la viga a la izquierda del corte *2* y reemplazando nuevamente la carga distribuida por su resultante, se obtiene

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -24 - V = 0 \qquad V = -24 \text{ kips}$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_2 = 0: \qquad 24(x - 4) + M = 0 \qquad M = 96 - 24x \quad \text{kip} \cdot \text{ft}$$

Estas expresiones son válidas en la región 8 ft $< x <$ 11 ft.

De D a B. Utilizando la posición de la viga a la izquierda del corte *3*, se obtiene para la región 11 ft $< x <$ 16 ft

$$V = -34 \text{ kips} \qquad M = 226 - 34x \quad \text{kip} \cdot \text{ft}$$

Ahora es posible graficar los diagramas de cortante y de momento flector para toda la viga. Se advierte que el par con momento 20 kips · ft aplicado en el punto *D* introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector.

***b*) Máximo esfuerzo normal a la izquierda y a la derecha del punto *D*.** Del apéndice C se encuentra que para un perfil W10 × 112 de acero laminado, $S = 126$ in.^{3} alrededor del eje *X-X*.

A la izquierda de D: Se tiene $|M| = 168$ kips · ft $= 2\,016$ kips · in. Sustituyendo $|M|$ y *S* en la ecuación (5.3), se escribe

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{2\,016 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{126 \text{ in.}^3} = 16.00 \text{ ksi} \qquad \sigma_m = 16.00 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

A la derecha de D: Se tiene $|M| = 148$ kips · ft $= 1\,776$ kips · in. Sustituyendo $|M|$ y *S* en la ecuación (5.3), se tiene

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{1\,776 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{126 \text{ in.}^3} = 14.10 \text{ ksi} \qquad \sigma_m = 14.10 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

5.1 a 5.6 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, *a*) dibuje los diagramas de cortante y de momento flector, *b*) determine las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector.

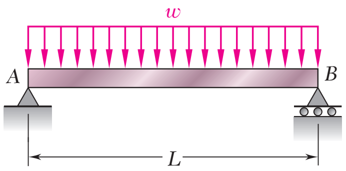


Figura P5.1

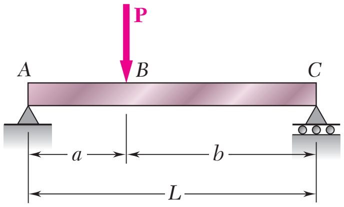


Figura P5.2

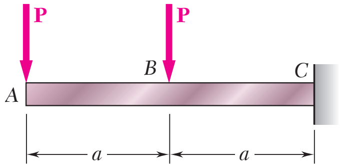


Figura P5.3

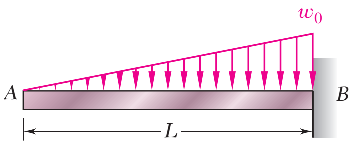


Figura P5.4

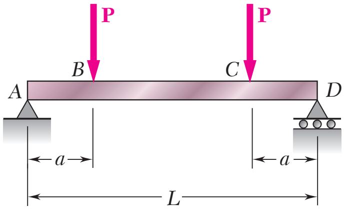


Figura P5.5

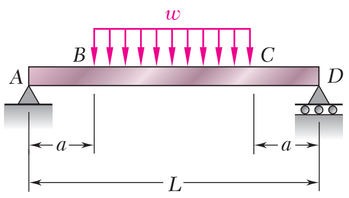
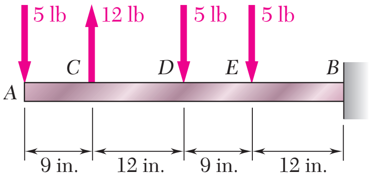


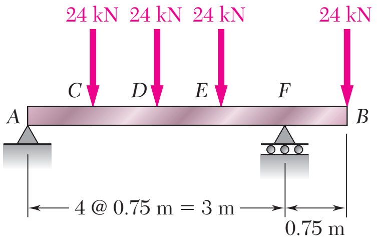
Figura P5.6

5.7 y 5.8 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.



5 lb
12 lb
5 lb
5 lb
A
C
D
E
B
9 in.
12 in.
9 in.
12 in.

Figura P5.7



24 kN
24 kN
24 kN
24 kN
A
C
D
E
F
B
4 @ 0.75 m = 3 m
0.75 m

Figura P5.8

5.9 y 5.10 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas mostradas en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

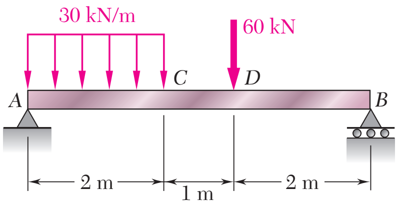

30 kN/m
60 kN
A
C
D
B
2 m
1 m
2 m

Figura P5.9

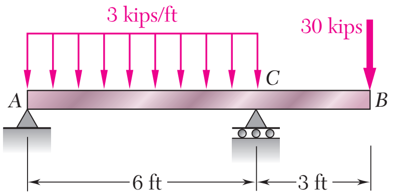

3 kips/ft
30 kips
A
C
B
6 ft
3 ft

Figura P5.10

***5.11* y 5.12** Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

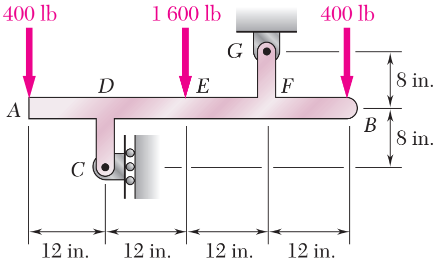

400 lb
1 600 lb
400 lb
G
8 in.
D
E
F
A
B
8 in.
C
12 in.
12 in.
12 in.
12 in.

Figura *P5.11*

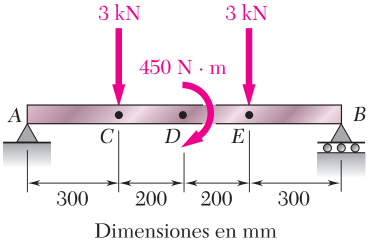

3 kN
3 kN
450 N · m
A
B
C
D
E
300
200
200
300
Dimensiones en mm

Figura P5.12

5.13 y *5.14* Si se supone que la reacción del suelo está uniformemente distribuida, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga *AB* y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

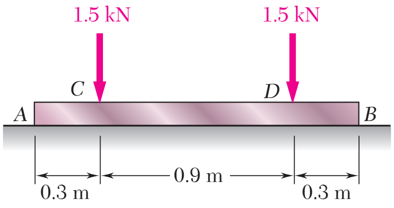

1.5 kN
1.5 kN
C
D
A
B
0.3 m
0.9 m
0.3 m

Figura P5.13

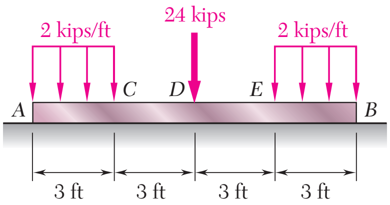

24 kips
2 kips/ft
2 kips/ft
C
D
E
A
B
3 ft
3 ft
3 ft
3 ft

Figura *P5.14*

5.15 y *5.16* Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre un corte transversal en C.

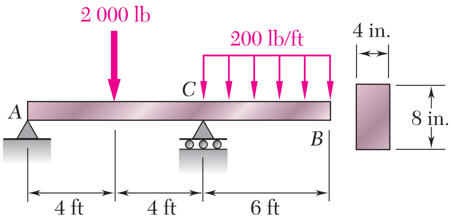

2 000 lb
200 lb/ft
4 in.
C
A
8 in.
B
4 ft
4 ft
6 ft

Figura P5.15

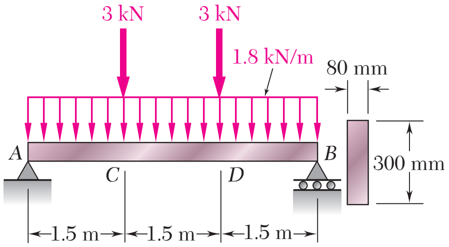

3 kN
3 kN
1.8 kN/m
80 mm
A
B
C
D
300 mm
1.5 m
1.5 m
1.5 m

Figura *P5.16*

5.17 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre un corte transversal en C.

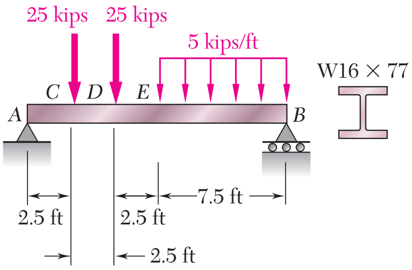

25 kips
25 kips
5 kips/ft
W16 × 77
C
D
E
A
B
2.5 ft
2.5 ft
7.5 ft
2.5 ft

Figura P5.17

5.18 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre la sección *a-a*.

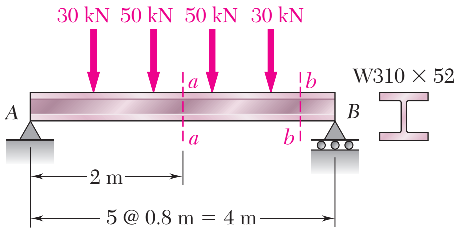

30 kN
50 kN
50 kN
30 kN
a
b
W310 × 52
A
B
a
b
2 m
5 @ 0.8 m = 4 m

Figura P5.18

***5.19* y 5.20** Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión sobre un corte transversal en C.

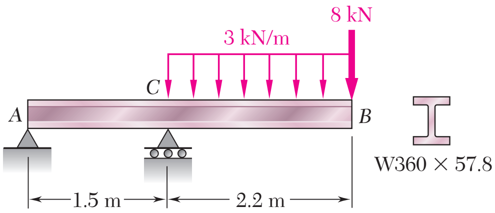

8 kN
3 kN/m
C
A
B
W360 × 57.8
1.5 m
2.2 m

Figura *P5.19*

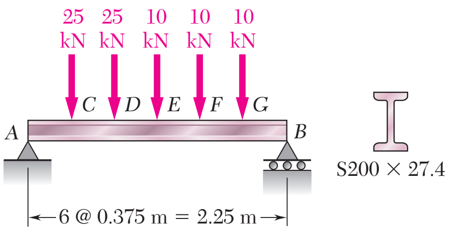

25 kN
25 kN
10 kN
10 kN
10 kN
C
D
E
F
G
A
B
S200 × 27.4
6 @ 0.375 m = 2.25 m

Figura P5.20

5.21 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

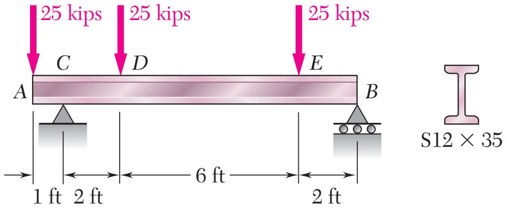

25 kips
25 kips
25 kips
C
D
E
A
B
S12 × 35
1 ft
2 ft
6 ft
2 ft

Figura P5.21

5.22 y *5.23* Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas mostradas en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

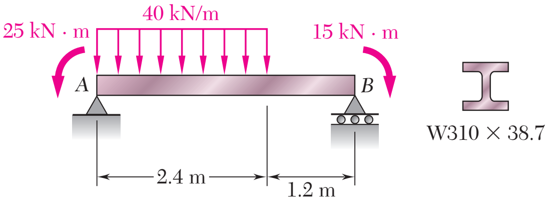

25 kN · m
40 kN/m
15 kN · m
A
B
W310 × 38.7
2.4 m
1.2 m

Figura P5.22

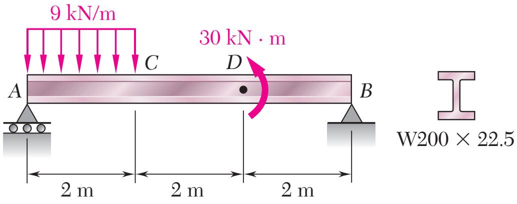

9 kN/m
30 kN · m
A
C
D
B
W200 × 22.5
2 m
2 m
2 m

Figura *P5.23*

5.24 y 5.25 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas mostradas en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

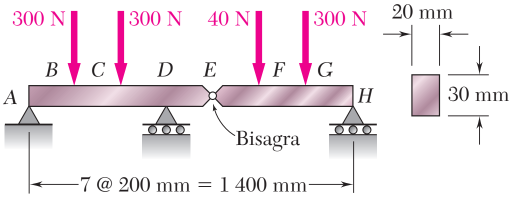

300 N
300 N
40 N
300 N
20 mm
B
C
D
E
F
G
A
H
30 mm
Bisagra
7 @ 200 mm = 1 400 mm

Figura P5.24

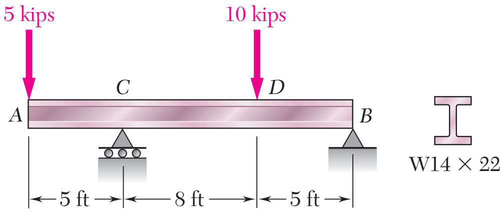

5 kips
10 kips
C
D
A
B
W14 × 22
5 ft
8 ft
5 ft

Figura P5.25

5.26 Si se sabe que $W = 12$ kN, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga AB y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

5.27 Determine *a*) la magnitud del contrapeso W tal que el máximo valor absoluto del momento flector en la viga sea lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente debido a la flexión. (*Sugerencia*: Dibuje el diagrama de momento flector e iguale los valores absolutos de los máximos momentos flectores, positivo y negativo, obtenidos.)

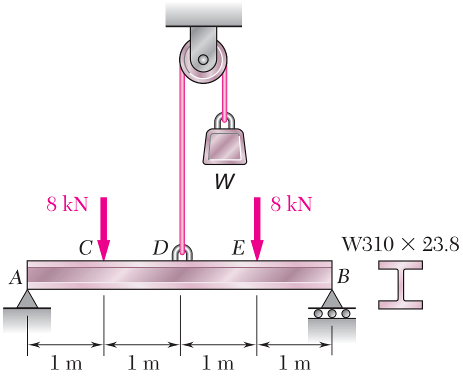


Figura ***P5.26*** **y P5.27**

5.28 Si se sabe que $P = Q = 480$ N, determine *a*) la distancia a para la cual el máximo valor absoluto del momento flector sobre la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

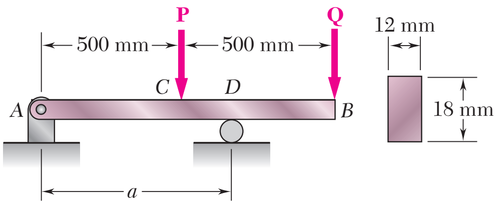


Figura P5.28

5.29 Retome el problema 5.28, y ahora suponga que $P = 480$ N y $Q = 320$ N.

5.30 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el máximo valor absoluto del momento flector sobre la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

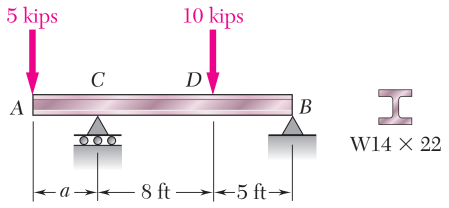


Figura *P5.30*

5.31 Determine *a*) la distancia *a* para la cual el máximo valor absoluto del momento flector sobre la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión. (Vea la sugerencia del problema 5.27.)

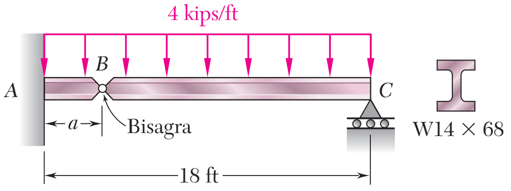


Figura P5.31

5.32 Una varilla sólida de acero con diámetro *d* está apoyada como se indica en la figura. Si se sabe que para el acero $\gamma = 490$ lb/ft^3, determine el diámetro *d* mínimo que puede utilizarse si el esfuerzo normal debido a la flexión no debe exceder 4 ksi.

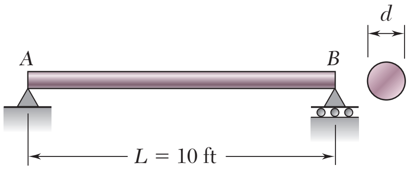


Figura P5.32

5.33 Una barra sólida de acero tiene una sección cuadrada de lado *b* y está apoyada como se observa en la figura. Si se sabe que para el acero $\rho = 7\,860$ kg/m^3, determine la dimensión *b* de la barra para la cual el esfuerzo normal máximo debido a la flexión es *a*) 10 MPa, *b*) 50 MPa.

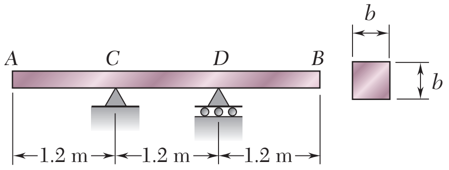


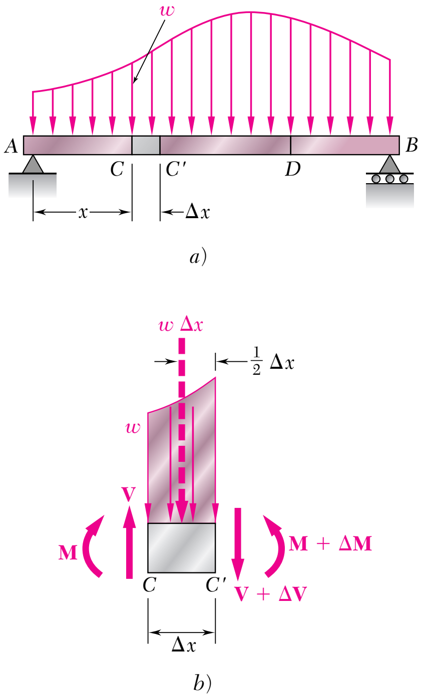
Figura P5.33

5.3 RELACIONES ENTRE LA CARGA, EL CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR

Cuando una viga lleva más de dos o tres cargas concentradas, o cuando lleva cargas distribuidas, el método explicado en la sección 5.2 para graficar el cortante y el momento flector resulta muy complicado. La construcción del diagrama de cortante y, especialmente, del diagrama de momento flector se facilitará en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, el cortante y el momento flector.

Considere una viga simplemente apoyada *AB* que lleva una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 5.12*a*), y sean C y C' dos puntos en la viga a una distancia Δx uno del otro. El cortante y el momento flector en C se denotarán por V y por M, respectivamente, y se supondrán positivos; el cortante y el momento flector en C' se denotarán por $V + \Delta V$ y por $M + \Delta M$.

Ahora se desprende la porción de viga CC' y se dibuja su diagrama de cuerpo libre (figura 5.12*b*). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w\,\Delta x$ y fuerzas y pares internos en C y en C'. Ya que el corte y el momento flector se han supuesto positivos, las fuerzas y pares se dirigirán como se indica en la figura.



a)

b)

Figura 5.12

Relaciones entre la carga y el cortante. Escribiendo que la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' son cero, se tiene que

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre Δx y haciendo que Δx se aproxime a cero, se tiene que

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{5.5}$$

La ecuación (5.5) indica que, para una viga cargada como se muestra en la figura 5.12*a*, la pendiente dV/dx de la curva de cortante es negativa; el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

Integrando la ecuación (5.5) entre los puntos C y D, se escribe

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \tag{5.6}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{5.6$'$}$$

Advierta que este resultado también podría haberse obtenido considerando el equilibrio de la porción de viga CD, ya que el área bajo la curva de carga representa el total de la carga aplicada entre C y D.

Debe también observarse que la ecuación (5.5) no es válida en un punto donde se aplique una carga concentrada; la curva de cortante es discontinua en tal punto, como se vio en la sección 5.2. De manera similar, las ecuaciones (5.6) y (5.6′) dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, debido a que no consideran el cambio súbito en el cortante causado por la carga concentrada. Por lo tanto, las ecuaciones (5.6) y (5.6′) deberán aplicarse sólo entre cargas concentradas sucesivas.

Relaciones entre el cortante y el momento flector. Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 5.12*b*, y escribiendo ahora que la suma de momentos alrededor de C' es cero, se tiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{C'} = 0: \qquad (M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \frac{1}{2} w\,(\Delta x)^2$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre Δx y haciendo que Δx se aproxime a cero, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{5.7}$$

La ecuación (5.7) indica que la pendiente dM/dx de la curva de momento flector es igual al valor del cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde el cortante tenga un valor bien definido, esto es, en cualquier punto donde no se encuentre aplicada una carga concentrada. La ecuación (5.7) también muestra que $V = 0$ en puntos donde M es máximo. Esta propiedad facilita la determinación de los puntos donde es posible que la viga falle bajo flexión.

Integrando la ecuación (5.7) entre los puntos C y D, se escribe

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \tag{5.8}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de cortante entre } C \text{ y } D \tag{5.8$'$}$$

Note que el área bajo la curva de cortante deberá considerarse positiva donde el esfuerzo cortante es positivo y negativa donde el esfuerzo cortante es negativo. Las ecuaciones (5.8) y (5.8′) son válidas aun cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, en tanto la curva de cortante haya sido correctamente dibujada. Las ecuaciones dejan de ser válidas, sin embargo, si un par se aplica en un punto entre C y D, ya que no toman en consideración el cambio súbito en momento cortante causado por un par (véase problema modelo 5.6).

EJEMPLO 5.03

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 5.13 y obtenga el máximo valor del momento flector.

Del diagrama de cuerpo libre de la viga completa, se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos.

$$R_A = R_B = \tfrac{1}{2}wL$$

A continuación, se dibuja el diagrama de cortante. Cerca del extremo A de la viga, el cortante es igual a R_A, es decir, a $\frac{1}{2}wL$, como puede verificarse considerando como diagrama de cuerpo libre una muy pequeña porción de la viga. Utilizando la ecuación

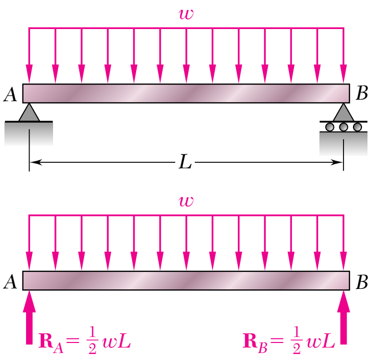

w
A
B
L
w
A
B
$\mathbf{R}_A = \frac{1}{2}wL$
$\mathbf{R}_B = \frac{1}{2}wL$

Figura 5.13

(5.6), se determina entonces el cortante V a cualquier distancia x desde A, escribiendo

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \tfrac{1}{2}wL - wx = w(\tfrac{1}{2}L - x)$$

La curva de corte es, por tanto, una recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ (figura 5.14*a*). Considerando, ahora, el momento flector, primero se observa que $M_A = 0$. El valor M del momento flector a cualquier distancia x desde A puede obtenerse de la ecuación (5.8); se tiene

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx$$

$$M = \int_0^x w(\tfrac{1}{2}L - x)\,dx = \tfrac{1}{2}w(Lx - x^2)$$

La curva del momento flector es una parábola. El máximo valor del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, ya que V (y por tanto dM/dx) es cero para tal valor de x. Sustituyendo $x = L/2$ en la última ecuación, se obtiene $M_{\text{máx}} = wL^2/8$ (véase figura 5.14*b*).

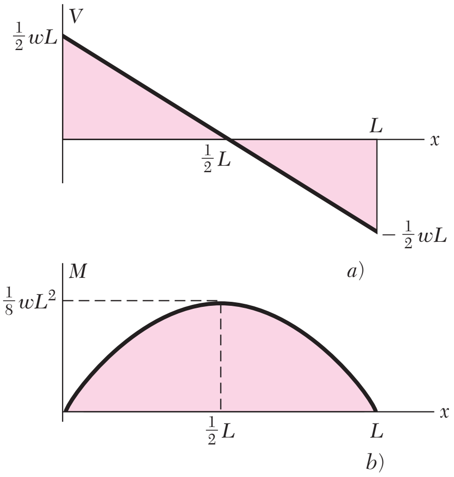
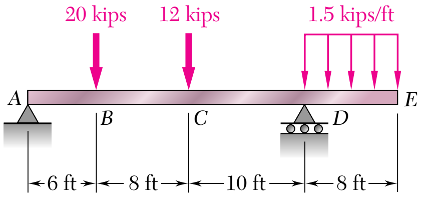


Figura 5.14

En la mayoría de las aplicaciones ingenieriles, se necesita saber el valor del momento flector sólo en unos cuantos puntos específicos. Una vez que se ha dibujado el diagrama de cortante, y después de que ha sido determinado M en uno de los extremos de la viga, el valor del momento flector puede obtenerse en cualquier punto dado calculando el área bajo la curva de cortante y utilizando la ecuación (5.8′). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga del ejemplo 5.03, el valor máximo del momento flector para esa viga se obtiene sencillamente midiendo el área del triángulo sombreado en el diagrama de cortante de la figura 5.14*a*. Se tiene

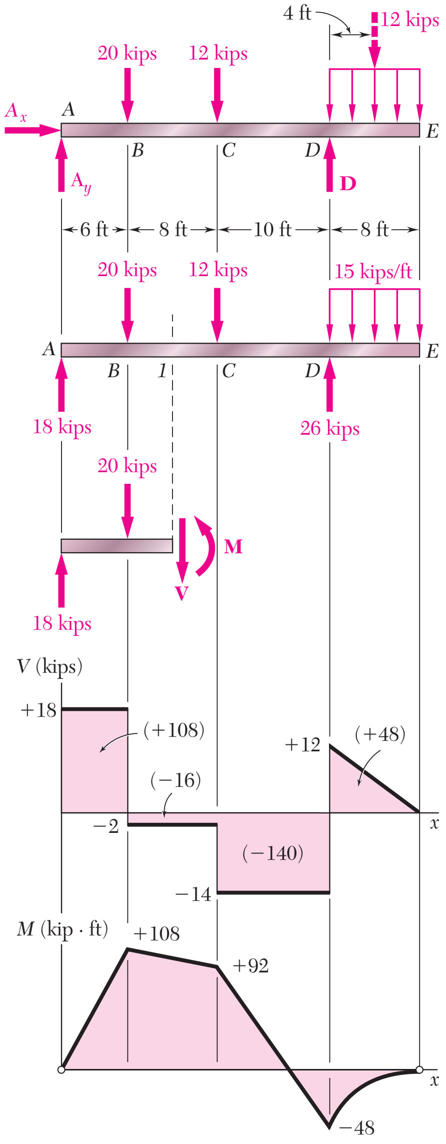
$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

Se advierte que, en este ejemplo, la curva de carga es una recta horizontal, la curva de cortante es una recta oblicua y la curva del momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiese sido una recta oblicua (primer grado), la curva de cortante habría sido una parábola (segundo grado) y la curva del momento flector una cúbica (tercer grado). Las curvas de cortante y de momento flector siempre serán, respectivamente, uno y dos grados más altas que la curva de carga. Con esto en mente, es posible bosquejar los diagramas de cortante y de momento flector sin determinar, en realidad, las funciones $V(x)$ y $M(x)$, una vez que se han calculado algunos valores del cortante y del momento flector. Los bosquejos obtenidos serán más exactos si se utiliza el hecho de que, en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de corte es igual a $-w$ y la pendiente de la curva de momento flector es igual a V.



PROBLEMA MODELO 5.3

Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y carga representadas en la figura.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga entera como cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0:$$

$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$

$$D = +26 \text{ kips} \qquad \mathbf{D} = 26 \text{ kips}\uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$$

$$A_y = +18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 18 \text{ kips}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$$

También se advierte que tanto en *A* como en *E* el momento flector es cero; de esta manera, dos puntos (indicados por puntos gruesos) se obtienen en el diagrama de momento flector.

Diagrama de cortante. Ya que $dV/dx = -w$, se encuentra que entre las cargas concentradas y las reacciones la pendiente del diagrama de cortante es cero (es decir, el esfuerzo cortante es constante). El cortante en cualquier punto se determina dividiendo la viga en dos partes y considerando cualquiera de las partes como cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la porción de la viga a la izquierda del esfuerzo cortante *1*, se obtiene el corte entre *B* y *C*:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad +18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0 \qquad V = -2 \text{ kips}$$

También se encuentra que el esfuerzo cortante es de +12 kips justo a la derecha de *D* y cero en el extremo *E*. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre *D* y *E*, el diagrama de cortante entre estos dos puntos es una línea recta.

Diagrama de momento flector. Recuerde que el área bajo la curva de cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre los mismos dos puntos. Por conveniencia, el área de cada porción del diagrama de cortante se calcula e indica entre paréntesis en el diagrama. Debido a que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es cero, se escribe

$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +108 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$

$$M_C - M_B = -16 \qquad M_C = +92 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$

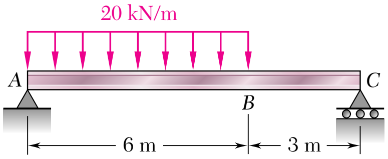
$$M_D - M_C = -140 \qquad M_D = -48 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$

$$M_E - M_D = +48 \qquad M_E = 0$$

Ya que M_E es cero, se obtiene una verificación de los cálculos.

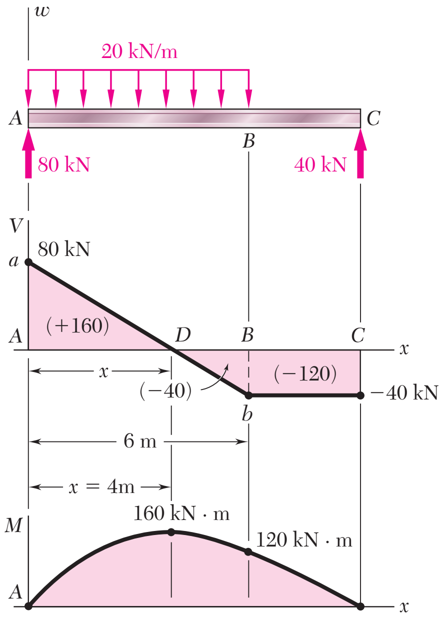
Entre las cargas concentradas y las reacciones el cortante es constante; por tanto, la pendiente dM/dx es constante y el diagrama de momento flector se dibuja conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre *D* y *E*, donde el diagrama de cortante es una recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

De los diagramas de *V* y de *M* se advierte que $V_{\text{máx}} = 18$ kips y $M_{\text{máx}} = 108$ kips · ft.



PROBLEMA MODELO 5.4

La viga W360 × 79 de acero laminado *AC* está simplemente apoyada y porta la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y determine la localización y magnitud del esfuerzo normal máximo debido a la flexión.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga entera como cuerpo libre, se encuentra que

$$\mathbf{R}_A = 80 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de cortante. El cortante justo a la derecha de *A* es $V_A = +80$ kN. Como el cambio en el cortante entre dos puntos es igual al valor *negativo* del área bajo la curva de carga entre los dos mismos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

Siendo la pendiente $dV/dx = -w$ constante entre *A* y *B*, el diagrama de cortante entre estos dos puntos se representa por una recta. Entre *B* y *C*, el área bajo la curva de carga es cero; por tanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

y el corte es constante entre *B* y *C*.

Diagrama de momento flector. Se advierte que el momento flector en cada extremo de la viga es cero. Para determinar el momento flector máximo, se localiza el corte *D* de la viga donde $V = 0$. Se tiene

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80 \text{ kN} = -(20 \text{ kN/m})\,x$$

y, despejando *x*: $x = 4 \text{ m}$ ◀

El momento flector máximo ocurre en el punto *D*, donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Las áreas de las diversas porciones del diagrama de cortante se calculan y dan (entre paréntesis) en el diagrama. Como el área del diagrama de cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre los mismos dos puntos, se escribe

$$\begin{aligned} M_D - M_A &= +160 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_D &= +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_B - M_D &= -\ \ 40 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_B &= +120 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_C - M_B &= -120 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_C &= 0 \end{aligned}$$

El diagrama de momento flector consiste en un arco de parábola seguido de un segmento de recta. La pendiente de la parábola en *A* es igual al valor de *V* en ese punto.

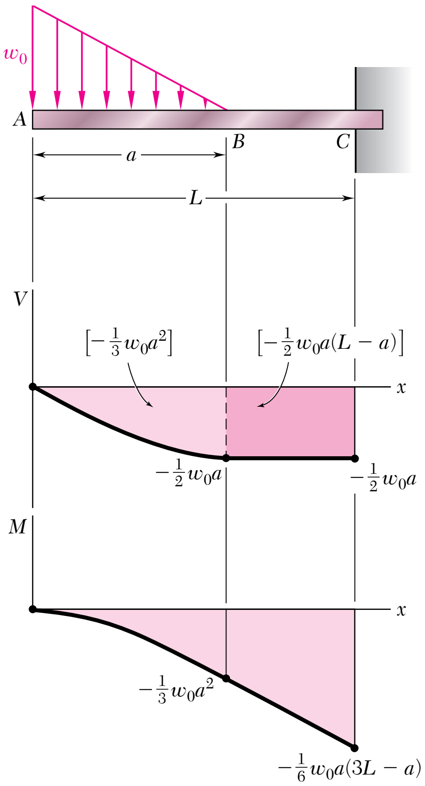
Esfuerzo normal máximo. Ocurre en *D*, donde $|M|$ es máximo. Del apéndice C se encuentra que para un perfil de acero laminado W360 × 79, $S = 1\,280 \text{ mm}^3$ alrededor de un eje horizontal. Sustituyendo este valor y $|M| = |M_D| = 160 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$ en la ecuación (5.3), se escribe

$$\sigma_m = \frac{|M_D|}{S} = \frac{160 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{1\,280 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 125.0 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Esfuerzo normal máximo en la viga = 125.0 MPa ◀

PROBLEMA MODELO 5.5

Bosqueje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga en voladizo que se muestra en la figura.



SOLUCIÓN

Diagrama de cortante. En el extremo libre de la viga, se encuentra que $V_A = 0$. Entre A y B, el área bajo la curva de carga es $\frac{1}{2}w_0a$; se encuentra V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

Entre B y C, la viga no se encuentra cargada, por tanto, $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$ y, de acuerdo con la ecuación (5.5), la pendiente de la curva de cortante es $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga decrece linealmente, y el diagrama de cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$, y el diagrama de cortante es una línea horizontal.

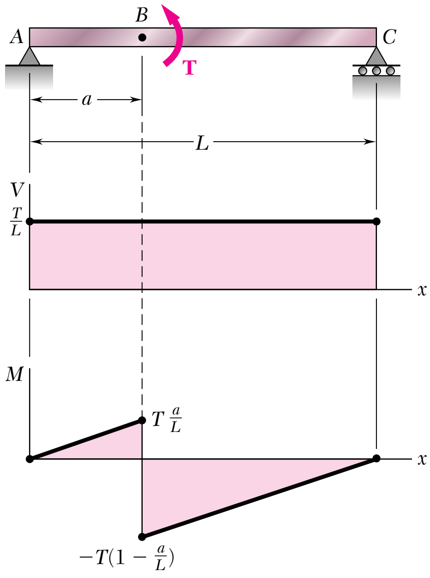
Diagrama de momento flector. El momento flector M_A en el extremo libre de la viga es cero. Se calcula el área bajo la curva de cortante y se escribe

$$\begin{aligned} M_B - M_A &= -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \\ M_C - M_B &= -\tfrac{1}{2}w_0a(L-a) \\ M_C &= -\tfrac{1}{6}w_0a(3L-a) \end{aligned}$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se encuentra que entre A y B el diagrama se representa con una curva cúbica con pendiente cero en A, y entre B y C con una línea recta.

PROBLEMA MODELO 5.6

La viga sencilla AC está cargada por un par con momento T aplicado en el punto B. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector de la viga.



SOLUCIÓN

Considerando la viga entera como un cuerpo libre, se obtiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

El cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L. Como un par se aplica en B, el diagrama de momento flector es discontinuo en B; se representa por dos rectas oblicuas y disminuye repentinamente en B por una cantidad igual a T.

PROBLEMAS

5.34 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.1*a*).

5.35 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.2*a*).

5.36 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.3*a*).

5.37 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.4*a*).

5.38 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.5*a*).

5.39 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.6*a*).

5.40 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.7.

5.41 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.8.

5.42 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.9.

5.43 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.10.

5.44* y *5.45 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del esfuerzo cortante, *b*) del momento flector.

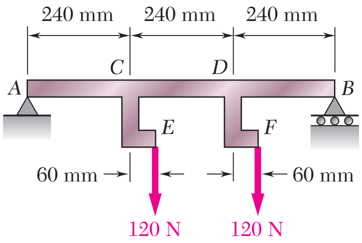


Figura *P5.44*

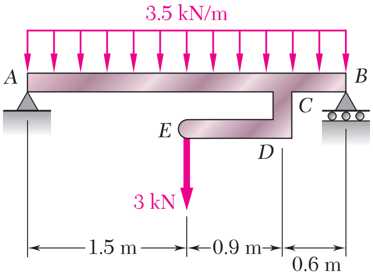


Figura *P5.45*

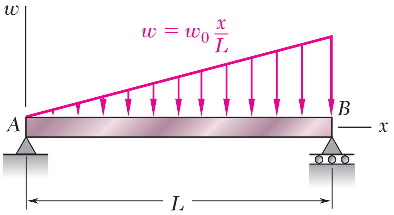
5.46 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.15.

5.47 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.16.

5.48 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.17.

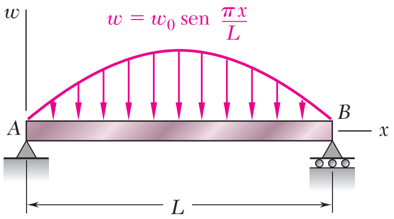
5.49 Utilice el método de la sección 5.3 para resolver el problema 5.18.

5.50 y *5.51* Determine *a*) las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, *b*) el máximo valor absoluto del momento flector en la viga.



w
$w = w_0 \frac{x}{L}$
A
B
x
L

Figura P5.50



w
$w = w_0 \text{ sen } \frac{\pi x}{L}$
A
B
x
L

Figura *P5.51*

5.52 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector y el máximo valor absoluto del momento flector en la viga, si se sabe que *a*) $k = 1$, *b*) $k = 0.5$.

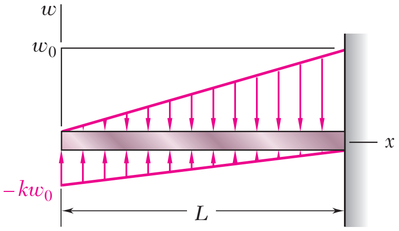
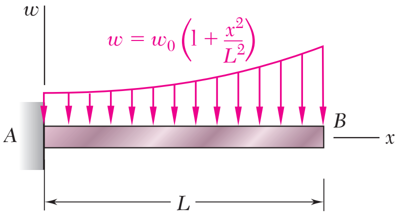


Figura P5.52

5.53 Determine *a*) las ecuaciones de las curvas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, *b*) el máximo valor absoluto del momento flector en la viga.



w
$w = w_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)$
A
B
x
L

Figura *P5.53*

5.54 y 5.55 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

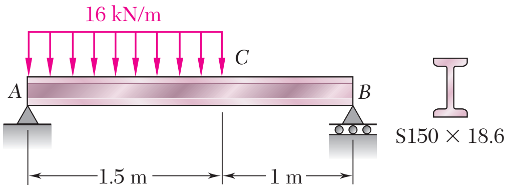

16 kN/m
C
A
B
S150 × 18.6
1.5 m
1 m

Figura P5.54

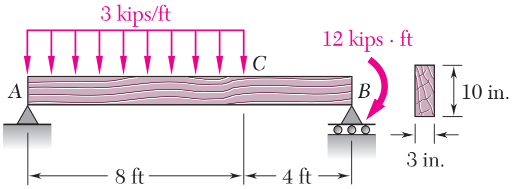

3 kips/ft
12 kips · ft
C
A
B
10 in.
3 in.
8 ft
4 ft

Figura P5.55

5.56 y *5.57* Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

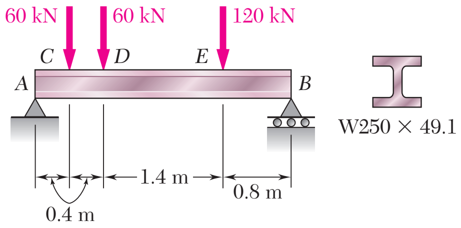

60 kN
60 kN
120 kN
C
D
E
A
B
W250 × 49.1
1.4 m
0.8 m
0.4 m

Figura P5.56

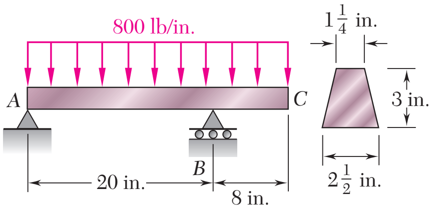

800 lb/in.
$1\frac{1}{4}$ in.
A
C
3 in.
B
20 in.
8 in.
$2\frac{1}{2}$ in.

Figura *P5.57*

5.58 y 5.59 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura y calcule el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

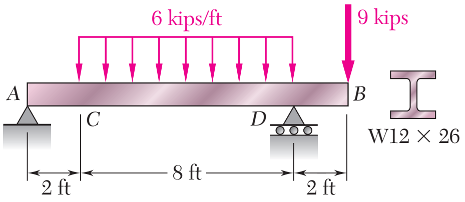

6 kips/ft
9 kips
A
B
C
D
W12 × 26
2 ft
8 ft
2 ft

Figura P5.58

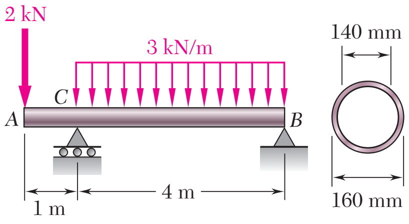

2 kN
3 kN/m
140 mm
C
A
B
1 m
4 m
160 mm

Figura P5.59

5.60 y *5.61* Si se sabe que la barra *AB* está en equilibrio bajo la carga que se muestra en la figura, dibuje los diagramas de cortante y de momento flector y determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

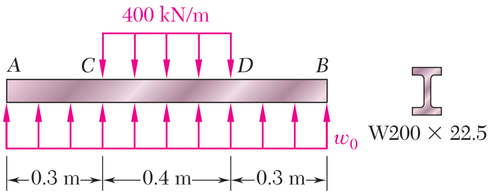

400 kN/m
A
C
D
B
w_0
W200 × 22.5
0.3 m
0.4 m
0.3 m

Figura P5.60

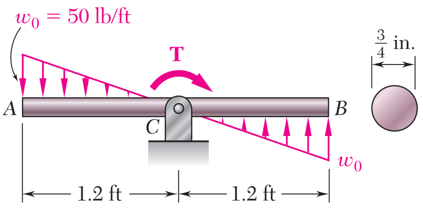

w_0 = 50 lb/ft
T
$\frac{3}{4}$ in.
A
C
B
w_0
1.2 ft
1.2 ft

Figura *P5.61*

***5.62** La viga *AB* soporta una carga uniformemente distribuida de 2 kN/m y dos cargas concentradas **P** y **Q**. Se ha determinado experimentalmente que los esfuerzos normales debidos a la flexión en el borde inferior del patín inferior de la viga son de −56.9 MPa en *A* y de −29.9 MPa en *C*. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y determine las magnitudes de las cargas **P** y **Q**.

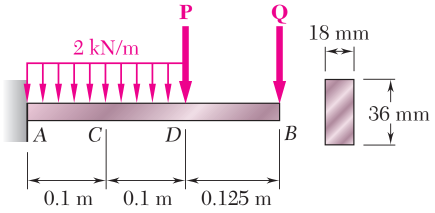

P
Q
2 kN/m
18 mm
36 mm
A
C
D
B
0.1 m
0.1 m
0.125 m

Figura P5.62

5.63 La viga *AB* soporta dos cargas concentradas **P** y **Q**. El esfuerzo normal debido a la flexión en el borde inferior de la viga es de +55 MPa en *D* y de +37.5 MPa en *F*. *a*) Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión que ocurre en la viga.

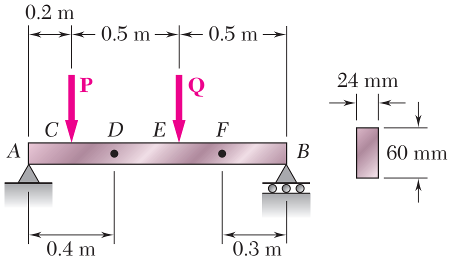

0.2 m
0.5 m
0.5 m
P
Q
24 mm
60 mm
A
C
D
E
F
B
0.4 m
0.3 m

Figura *P5.63*

***5.64** La viga *AB* soporta una carga uniformemente distribuida de 480 lb/ft y dos cargas concentradas **P** y **Q**. El esfuerzo normal debido a la flexión en el borde inferior del patín inferior es de +14.85 ksi en *D* y de +10.65 ksi en *E*. *a*) Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión que ocurre en la viga.

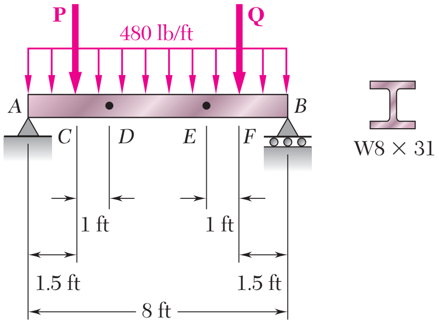


Figura P5.64

5.4 DISEÑO DE VIGAS PRISMÁTICAS A LA FLEXIÓN

Como se indicó en la sección 5.1, el diseño de una viga se controla, por lo general, mediante el máximo valor absoluto $|M|_{\text{máx}}$ del momento flector que ocurrirá en la viga. El esfuerzo normal máximo σ_m en la viga se encuentra en la superficie de ésta en la sección crítica donde ocurre $|M|_{\text{máx}}$, y se obtiene sustituyendo $|M|_{\text{máx}}$ por $|M|$ en la ecuación (5.1) o en la ecuación (5.3).† Se escribe

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}\, c}{I} \qquad \sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}}{S} \qquad (5.1', 5.3')$$

Un diseño seguro requiere que $\sigma_m \leq \sigma_{\text{perm}}$, donde σ_{perm} es el esfuerzo permisible para el material utilizado. Sustituir σ_{perm} por σ_m en la ecuación (5.3′) y despejar S resulta en el mínimo valor permisible del módulo de sección para la viga que se diseña:

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \qquad (5.9)$$

El diseño de los tipos comunes de vigas, como las de madera de sección transversal rectangular y las de acero laminado con diversos perfiles de sección transversal, se considerará en esta sección. Un procedimiento adecuado debe conducir al diseño más económico. Esto significa que, entre vigas del mismo tipo y del mismo material, siendo iguales otros factores, la viga con el mínimo peso por unidad de longitud —y, por tanto, la mínima sección transversal— será la que deba elegirse, pues será la menos costosa.

---

†Para vigas que no son simétricas con respecto a su superficie neutra, la mayor de las distancias desde la superficie neutra hasta las superficies de la viga deberá utilizarse para c en la ecuación (5.1) y en el cálculo del módulo de sección $S = I/c$.

El procedimiento de diseño incluirá los siguientes pasos:†

1. Primero determine el valor de σ_{perm} para el material seleccionado a partir de una tabla de propiedades de materiales o de especificaciones de diseño. También puede calcularse este valor dividiendo la resistencia última σ_U del material entre un factor de seguridad apropiado (véase sección 1.13). Suponiendo, por el momento, que el valor de σ_{perm} es el mismo a tensión y a compresión, proceda como se indica a continuación.
2. Dibújese los diagramas de cortante y de momento flector correspondientes a las condiciones especificadas de carga, y determine el máximo valor absoluto $|M|_{\text{máx}}$ del momento flector en la viga.
3. Obtenga, de la ecuación (5.9), el valor mínimo permisible $S_{\text{mín}}$ del módulo de sección de la viga.
4. Para una viga de madera, el espesor h de la viga, su ancho b o la razón h/b que caracteriza la forma de su sección transversal probablemente habrán sido especificados. Las dimensiones desconocidas pueden seleccionarse recordando, de la ecuación (4.19) de la sección 4.4, que b y h deben satisfacer la relación $\frac{1}{6}bh^2 = S \geq S_{\text{mín}}$.
5. Para una viga de acero laminado, consulte la tabla apropiada en el apéndice C. De las secciones disponibles de la viga sólo deben considerarse aquellas que tienen un módulo de sección $S \geq S_{\text{mín}}$ y debe seleccionarse de este grupo la sección que presente el peso más pequeño por unidad de longitud. Ésta será la sección más económica para la que $S \geq S_{\text{mín}}$. Note que no es, necesariamente, la sección que tenga el valor más pequeño de S (véase ejemplo 5.04). En algunos casos, la elección de una sección se verá limitada por otras consideraciones, como, por ejemplo, el espesor permisible de la sección transversal o la deflexión permisible de la viga (véase capítulo 9).

El análisis anterior se restringió a materiales para los que σ_{perm} es el mismo a tensión y a compresión. Si σ_{perm} es diferente a tensión y a compresión, debe tenerse la seguridad de que la sección de la viga se ha seleccionado de tal manera que $\sigma_m \leq \sigma_{\text{perm}}$ tanto para los esfuerzos a tensión como a compresión. Si la sección transversal no es simétrica con respecto a su eje neutro, los esfuerzos máximos a tensión y a compresión no se producirán, necesariamente, en la sección donde $|M|$ sea máximo. Uno puede ocurrir donde M es máximo y el otro donde M es mínimo. Por tanto, el paso 2 deberá incluir la determinación tanto de $M_{\text{máx}}$ como de $M_{\text{mín}}$, y el paso 3 deberá modificarse para tener en cuenta tanto los esfuerzos de tensión como de compresión.

Finalmente, tenga en mente que el procedimiento de diseño descrito en esta sección sólo toma en cuenta los esfuerzos normales que ocurren en la superficie de la viga. Las vigas cortas, en especial las hechas de madera, pueden fallar a cortante bajo carga transversal. La determinación de los esfuerzos cortantes en vigas se estudiará en el capítulo 6. También, en el caso de las vigas de acero laminado, pueden ocurrir esfuerzos normales mayores que los considerados aquí en las uniones del alma con los patines. Esto se analizará en el capítulo 8.

---

†Se ha supuesto que todas las vigas consideradas en este capítulo están adecuadamente soportadas para evitar el pandeo lateral, y que se suministran placas de apoyo bajo cargas concentradas aplicadas a vigas de acero laminado para evitar el pandeo localizado (lisiado) del alma.

EJEMPLO 5.04

Seleccione una viga de patín ancho para soportar la carga de 15 kips como se indica en la figura 5.15. El esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi.

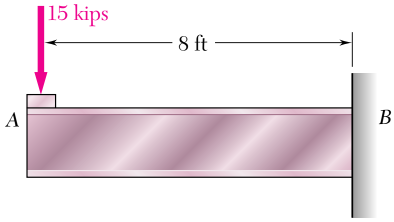


Figura 5.15

1. El esfuerzo normal permisible es dado: $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi.

2. El esfuerzo cortante es constante e igual a 15 kips. El momento flector es máximo en B. Se tiene que

$$|M|_{\text{máx}} = (15 \text{ kips})(8 \text{ ft}) = 120 \text{ kips} \cdot \text{ft} = 1\,440 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

3. El mínimo módulo de sección permisible es

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{1\,440 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{24 \text{ ksi}} = 60.0 \text{ in.}^3$$

4. Con referencia a la tabla *Propiedades de perfiles de acero laminado* en el apéndice C, se observa que los perfiles se ordenaron en grupos con el mismo espesor y que en cada grupo se presentan en orden de peso decreciente. Se elige en cada grupo la viga más ligera que tenga un módulo de sección $S = I/c$ por lo menos tan grande como $S_{\text{mín}}$ y se registran los resultados en la siguiente tabla.

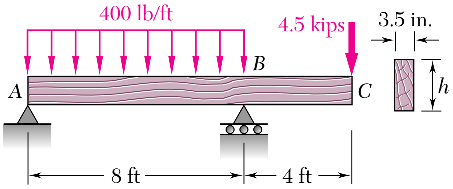
Perfil	S, in.^{3}
W21 × 44	81.6
W18 × 50	88.9
W16 × 40	64.7
W14 × 43	62.7
W12 × 50	64.7
W10 × 54	60.0

El más económico es el perfil W16 × 40, ya que sólo pesa 40 lb/ft, aun cuando presente un módulo de sección mayor que dos de los otros perfiles. También se advierte que el peso total de la viga será de (8 ft) × (40 lb) = 320 lb. Este peso es pequeño comparado con la carga de 15 000 lb y puede despreciarse en el análisis.

***Diseño por carga y factor de resistencia.** Este método alterno para el diseño se describió brevemente en la sección 1.13 y se aplicó a elementos bajo carga axial. Es posible aplicarlo con facilidad al diseño de vigas en flexión. Reemplazando en la ecuación (1.26) las cargas P_D, P_L y P_U, respectivamente, por los momentos flectores M_D, M_L y M_U, se escribe

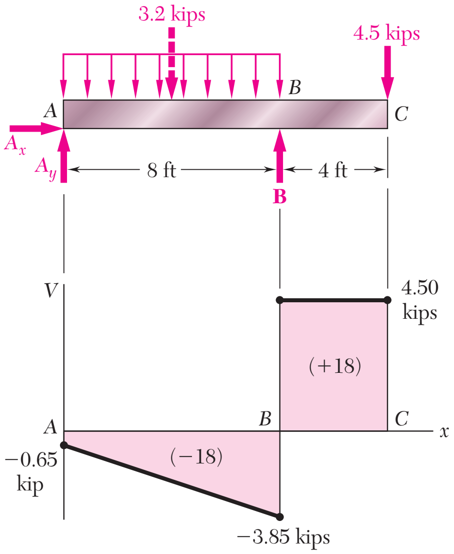
$$\gamma_D M_D + \gamma_L M_L \leq \phi M_U \tag{5.10}$$

Los coeficientes γ_D y γ_L se conocen como los *factores de carga* y el coeficiente ϕ como el *factor de resistencia*. Los momentos M_D y M_L son los momentos flectores debidos, respectivamente, a las cargas muertas y vivas, mientras que M_U es igual al producto de la resistencia última del material σ_U y el módulo de sección S de la viga: $M_U = S\sigma_U$.



PROBLEMA MODELO 5.7

Una viga de madera con un tramo en voladizo de 12 ft de longitud con un claro de 8 ft *AB* se diseñará para soportar las cargas distribuidas y concentradas que se muestran en la figura. Sabiendo que se utilizará madera de ancho nominal de 4 in. (ancho real de 3.5 in.) con un esfuerzo permisible de 1.75 ksi, determine el espesor mínimo requerido *h* de la viga.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando la viga en su totalidad como cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0: B(8\text{ ft}) - (3.2\text{ kips})(4\text{ ft}) - (4.5\text{ kips})(12\text{ ft}) = 0$$

$$B = 8.35\text{ kips} \qquad \mathbf{B} = 8.35\text{ kips}\uparrow$$

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: A_y + 8.35\text{ kips} - 3.2\text{ kips} - 4.5\text{ kips} = 0$$

$$A_y = -0.65\text{ kip} \qquad \mathbf{A} = 0.65\text{ kip}\downarrow$$

Diagrama de cortante. El cortante justo a la derecha de *A* es $V_A = A_y = -0.65$ kip. Ya que el cambio en cortante entre *A* y *B* es igual a *menos* el área bajo la curva de carga entre estos dos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(400\text{ lb/ft})(8\text{ ft}) = -3\,200\text{ lb} = -3.20\text{ kips}$$

$$V_B = V_A - 3.20\text{ kips} = -0.65\text{ kip} - 3.20\text{ kips} = -3.85\text{ kips.}$$

La reacción en *B* produce un súbito incremento de 8.35 kips en *V*, lo que resulta en un valor del cortante igual a 4.5 kips a la derecha de *B*. Como no se aplica carga entre *B* y *C*, el cortante permanece constante entre estos dos puntos.

Determinación de $|M|_{\text{máx}}$. Primero se observa que el momento flector es igual a cero en ambos extremos de la viga: $M_A = M_C = 0$. Entre *A* y *B* el momento flector disminuye una cantidad igual al área bajo la curva de cortante, y entre *B* y *C* aumenta una cantidad correspondiente. Por tanto, el valor absoluto máximo del momento flector es $|M|_{\text{máx}} = 18.00$ kips · ft.

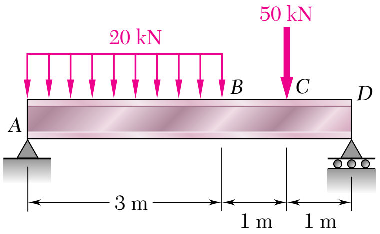
Módulo de sección mínimo permisible. Sustituyendo el valor dado de σ_{perm} y el valor de $|M|_{\text{máx}}$ en la ecuación (5.9), se tiene

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(18\text{ kips}\cdot\text{ft})(12\text{ in./ft})}{1.75\text{ ksi}} = 123.43\text{ in.}^3$$

Espesor mínimo requerido de la viga. Recordando la fórmula desarrollada en la parte 4 del procedimiento de diseño descrito en la sección 5.4 y sustituyendo los valores de *b* y de $S_{\text{mín}}$, se tiene

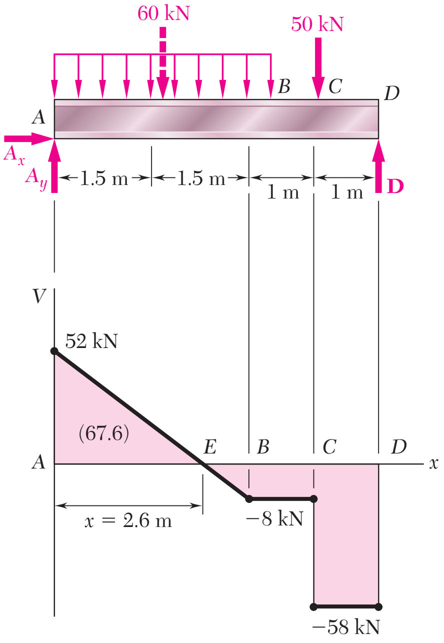
$$\tfrac{1}{6}bh^2 \geq S_{\text{mín}} \qquad \tfrac{1}{6}(3.5\text{ in.})h^2 \geq 123.43\text{ in.}^3 \qquad h \geq 14.546\text{ in.}$$

El espesor mínimo requerido en la viga es $h = 14.55$ in. ◀



PROBLEMA MODELO 5.8

Una viga de acero simplemente apoyada de 5 m de largo, *AD*, debe soportar las cargas distribuida y concentrada que se muestran en la figura. Si el esfuerzo normal permisible para el grado de acero utilizado es de 160 MPa, seleccione el perfil de patín ancho que deberá utilizarse.



SOLUCIÓN

Reacciones. Considerando toda la viga como un cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: D(5\text{ m}) - (60\text{ kN})(1.5\text{ m}) - (50\text{ kN})(4\text{ m}) = 0$$

$$D = 58.0\text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 58.0\text{ kN}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: A_y + 58.0\text{ kN} - 60\text{ kN} - 50\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 52.0\text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 52.0\text{ kN}\uparrow$$

Diagrama de cortante. El cortante justo a la derecha de *A* es $V_A = A_y = +52.0$ kN. Como el cambio en el cortante entre *A* y *B* es igual a *menos* el área bajo la curva de carga entre estos dos puntos, se tiene

$$V_B = 52.0\text{ kN} - 60\text{ kN} = -8\text{ kN}$$

El esfuerzo cortante permanece constante entre *B* y *C*, donde cae a −58 kN, y conserva este valor entre *C* y *D*. Se localiza la sección *E* de la viga donde $V = 0$ escribiendo

$$V_E - V_A = -wx$$
$$0 - 52.0\text{ kN} = -(20\text{ kN/m})x$$

Despejando *x* se encuentra que $x = 2.60$ m.

Determinación de $|M|_{\text{máx}}$. El momento flector es máximo en *E*, donde $V = 0$. Ya que *M* es cero en el apoyo *A*, su máximo valor en *E* es igual al área bajo la curva de corte entre *A* y *E*. Se tiene, por tanto, que $|M|_{\text{máx}} = M_E = 67.6\text{ kN}\cdot\text{m}$.

Módulo de sección mínimo permisible. Sustituyendo en la ecuación (5.9) el valor dado de σ_{perm} y el valor de $|M|_{\text{máx}}$ que se encontró, se escribe

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{67.6\text{ kN}\cdot\text{m}}{160\text{ MPa}} = 422.5\times10^{-6}\text{ m}^3 = 422.5\times10^{3}\text{ mm}^3$$

Selección del perfil de patín ancho. Del apéndice C se elige una lista de perfiles que tienen un módulo de sección mayor que $S_{\text{mín}}$ y que también son el perfil más ligero en un grupo con un espesor dado.

Perfil	S, mm^3
W410 × 38.8	637
W360 × 32.9	474
W310 × 38.7	549
W250 × 44.8	535
W200 × 46.1	448

Se selecciona el perfil más ligero disponible, esto es W360 × 32.9 ◀

PROBLEMAS

5.65 y *5.66* Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

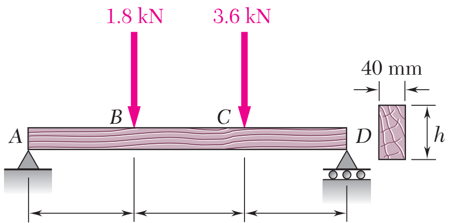

1.8 kN
3.6 kN
40 mm
A
B
C
D
h
0.8 m
0.8 m
0.8 m

Figura P5.65

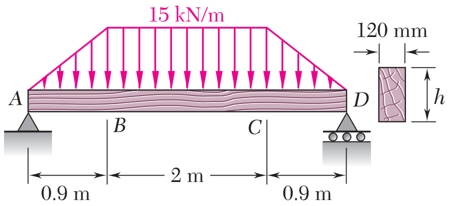

15 kN/m
120 mm
A
B
C
D
h
0.9 m
2 m
0.9 m

Figura *P5.66*

***5.67* y 5.68** Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 1 750 psi.

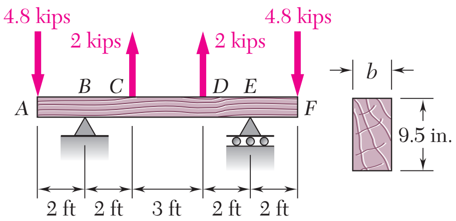

4.8 kips
2 kips
2 kips
4.8 kips
b
A
B
C
D
E
F
9.5 in.
2 ft
2 ft
3 ft
2 ft
2 ft

Figura *P5.67*

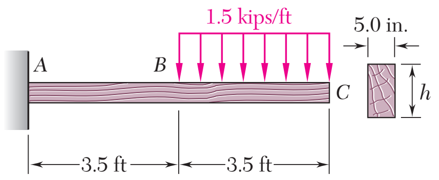

1.5 kips/ft
5.0 in.
A
B
C
h
3.5 ft
3.5 ft

Figura P5.68

5.69 y 5.70 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

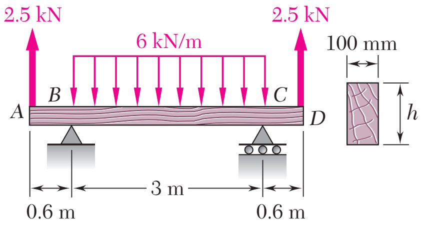

2.5 kN
6 kN/m
2.5 kN
100 mm
A
B
C
D
h
0.6 m
3 m
0.6 m

Figura P5.69

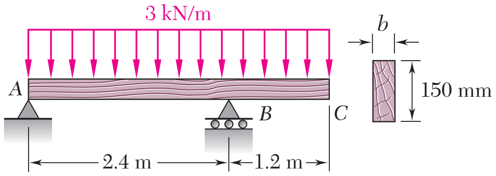

3 kN/m
b
A
B
C
150 mm
2.4 m
1.2 m

Figura P5.70

5.71 y 5.72 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

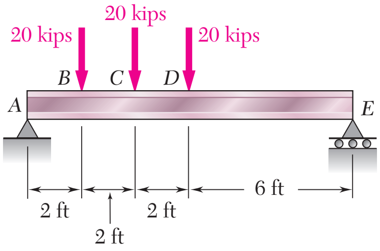

20 kips
20 kips
20 kips
A
B
C
D
E
2 ft
2 ft
2 ft
6 ft

Figura P5.71

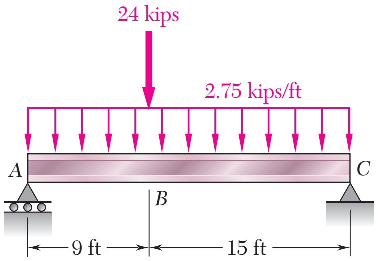

24 kips
2.75 kips/ft
A
B
C
9 ft
15 ft

Figura P5.72

5.73 y 5.74 Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 160 MPa, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

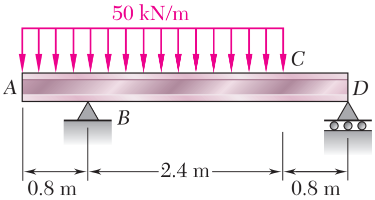

50 kN/m
A
B
C
D
0.8 m
2.4 m
0.8 m

Figura P5.73

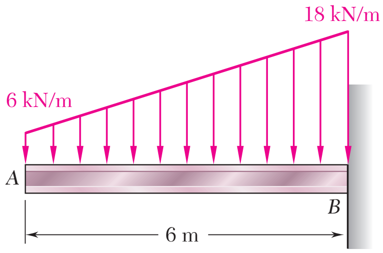

18 kN/m
6 kN/m
A
B
6 m

Figura P5.74

***5.75* y 5.76** Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga con perfil S más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

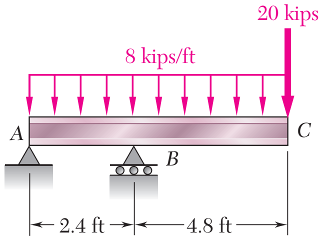

20 kips
8 kips/ft
A
B
C
2.4 ft
4.8 ft

Figura *P5.75*

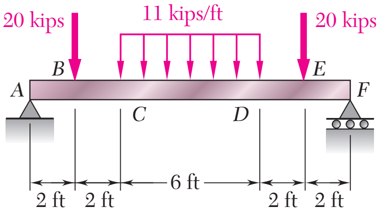

20 kips
11 kips/ft
20 kips
A
B
C
D
E
F
2 ft
2 ft
6 ft
2 ft
2 ft

Figura P5.76

5.77 y *5.78* Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 160 MPa, seleccione la viga con perfil S más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

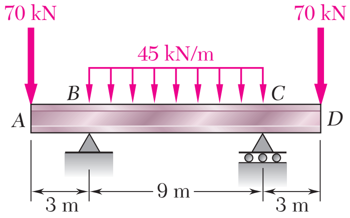

70 kN
70 kN
45 kN/m
A
B
C
D
3 m
9 m
3 m

Figura P5.77

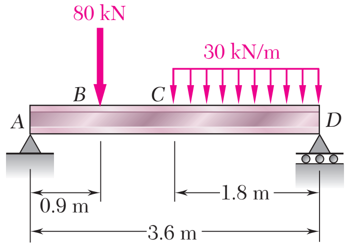

80 kN
30 kN/m
A
B
C
D
0.9 m
1.8 m
3.6 m

Figura *P5.78*

5.79 Un tubo de acero de 4 in. de diámetro debe soportar las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que el inventario de tubos disponibles tiene espesores que van de $\frac{1}{4}$ in. a 1 in. con incrementos de $\frac{1}{8}$ in., y que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, determine el mínimo espesor de pared t que puede utilizarse.

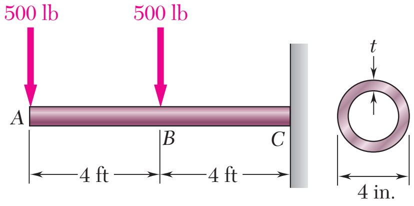

500 lb
500 lb
A
B
C
4 ft
4 ft
t
4 in.

Figura P5.79

5.80 Tres placas de acero se sueldan entre sí para formar la viga que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero usado es de 22 ksi, determine el mínimo ancho de patín b que puede usarse.

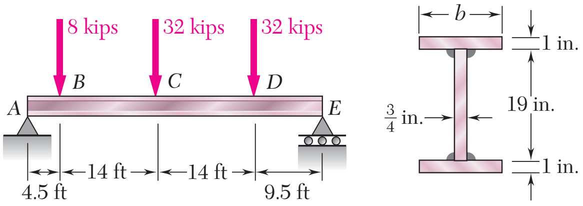

8 kips
32 kips
32 kips
A
B
C
D
E
4.5 ft
14 ft
14 ft
9.5 ft
b
1 in.
19 in.
3/4 in.
1 in.

Figura P5.80

5.81 Dos canales métricos de acero laminado se sueldan a lo largo de sus bordes y se emplean para soportar las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 150 MPa, determine los canales más económicos que pueden utilizarse.

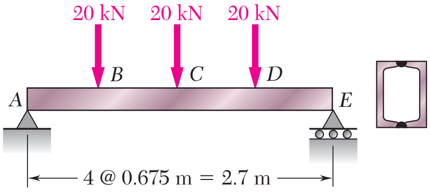

20 kN
20 kN
20 kN
A
B
C
D
E
4 @ 0.675 m = 2.7 m

Figura P5.81

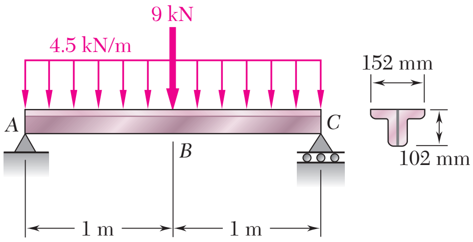

9 kN
4.5 kN/m
A
B
C
1 m
1 m
152 mm
102 mm

Figura P5.82

5.82 Dos ángulos L102 × 76 de acero laminado se sujetan con pernos para soportar las cargas que se ilustran en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 140 MPa, determine el mínimo espesor del ángulo que puede utilizarse.

5.83 Si se supone que la reacción hacia arriba del suelo se encuentra uniformemente distribuida y se sabe que el esfuerzo normal permisible del acero utilizado es de 170 MPa, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

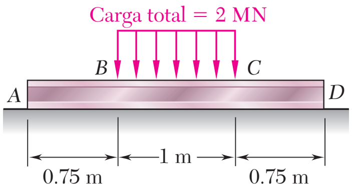

Carga total = 2 MN
A
B
C
D
0.75 m
1 m
0.75 m

Figura P5.83

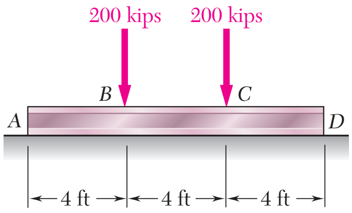

200 kips
200 kips
A
B
C
D
4 ft
4 ft
4 ft

Figura P5.84

5.84 Si se supone que la reacción hacia arriba del suelo se encuentra uniformemente distribuida y se sabe que el esfuerzo normal permisible del acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

5.85 Determine la máxima carga distribuida permisible w para la viga mostrada, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de $+80$ MPa en tensión y de -130 MPa en compresión.

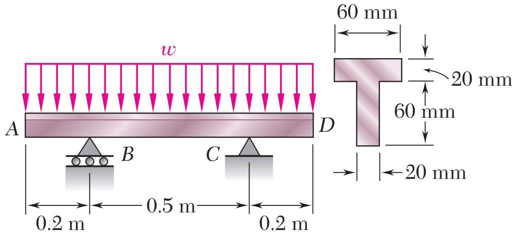


Figura P5.85

5.86 Retome el problema 5.85, y ahora suponga que la sección transversal de la viga se invierte, de manera que la aleta de la viga descansa sobre los soportes en B y C.

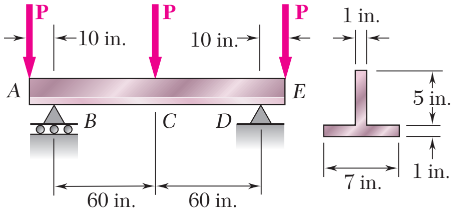


Figura *P5.87*

5.87 Determine el valor permisible de **P** para las cargas que se muestran en la figura, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +8 ksi en tensión y de -18 ksi en compresión.

5.88 Retome el problema 5.87, y ahora suponga que la viga en forma de T se ha invertido.

5.89 Las vigas AB, BC y CD tienen la sección transversal que se indica en la figura y están conectadas con pernos en B y en C. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +110 MPa en tensión y de -150 MPa en compresión, determine *a*) el máximo valor permisible de w si la viga BC no debe estar sobreesforzada, *b*) la máxima distancia a correspondiente en la cual las vigas en voladizo AB y CD no están sobreesforzadas.

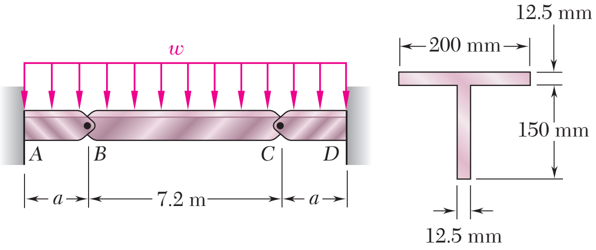


Figura P5.89

5.90 Las vigas AB, BC y CD tienen la sección transversal que se muestra en la figura y están conectadas con pernos en B y en C. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +110 MPa en tensión y de -150 MPa en compresión, determine *a*) el máximo valor permisible de **P** si la viga BC no debe estar sobreesforzada, *b*) la máxima distancia a correspondiente en la cual las vigas en voladizo AB y CD no están sobreesforzadas.

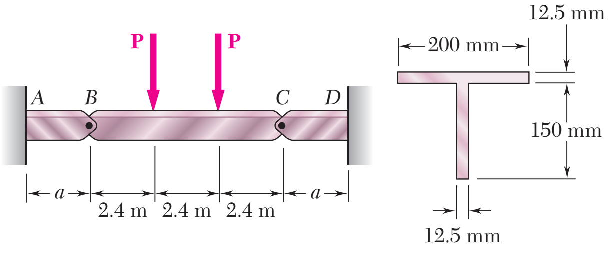


Figura P5.90

5.91 Una carga de 240 kN será soportada en el centro del claro de 5 m que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 165 MPa, determine *a*) la mínima longitud permisible *l* de la viga *CD* si la viga *AB*, tipo W310 × 74, no debe estar sobreesforzada, *b*) el perfil W más económico que puede utilizarse para la viga *CD*. Desprecie el peso de ambas vigas.

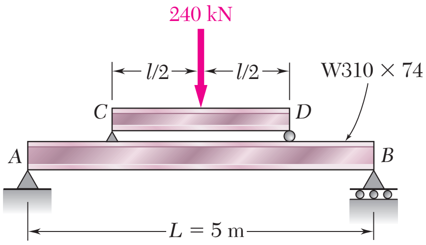


Figura ***P5.91***

5.92 La viga *ABC* se atornilla a las vigas *DBE* y *FCG*. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de 24 ksi, seleccione el perfil de patín ancho más económico que puede utilizarse *a*) para la viga *ABC*, *b*) para la viga *DBE*, *c*) para la viga *FCG*.

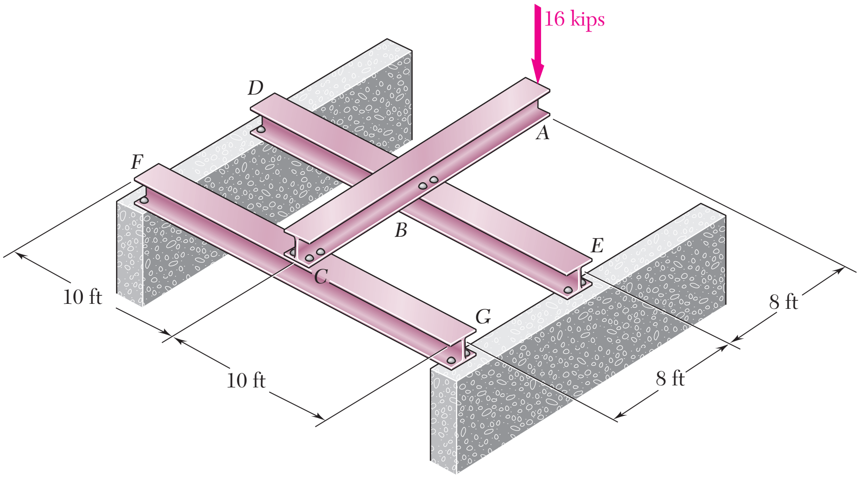


Figura P5.92

5.93 Una carga uniformemente distribuida de 66 kN/m debe ser soportada a través del claro de 6 m como se ilustra en la figura. Si el esfuerzo normal permisible para el acero utilizado es de 140 MPa, determine *a*) la longitud mínima permisible *l* de la viga *CD* si la viga *AB* tipo W460 × 74 no debe sobreesforzarse, *b*) el perfil W más económico que puede utilizarse para la viga *CD*. Desprecie el peso de ambas vigas.

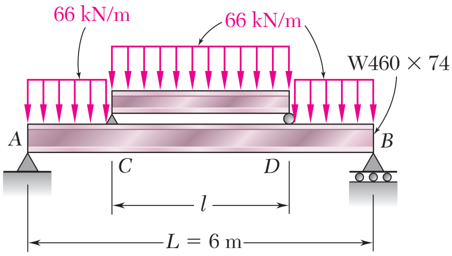


Figura ***P5.93***

***5.94** La estructura de un techo que se compone de madera contrachapada y material para techar está soportada por varias vigas de madera de longitud $L = 16$ m. La carga muerta que soporta cada viga, incluso el peso estimado de la viga, puede representarse por una carga uniformemente distribuida $w_D = 350$ N/m. Las cargas vivas consisten en la carga de nieve, representada por una carga uniformemente distribuida $w_L = 600$ N/m, y una carga concentrada **P** de 6 kN aplicada en el punto medio C de cada viga. Si se sabe que la resistencia última para la madera utilizada es $\sigma_U = 50$ MPa y que el ancho de las vigas es $b = 75$ mm, determine el espesor mínimo permisible h de las vigas, utilizando DCFR con los factores de carga $\gamma_D = 1.2$, $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia $\phi = 0.9$.

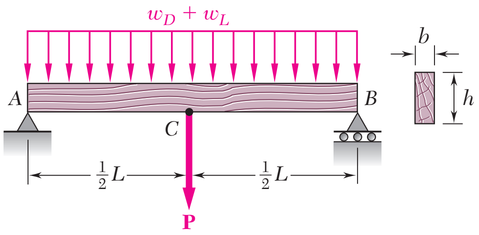


Figura P5.94

***5.95** Retome el problema 5.94, y suponga que la carga concentrada **P** de 6 kN aplicada a cada viga se reemplaza por cargas concentradas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de 3 kN aplicadas a una distancia de 4 m desde cada extremo de las vigas.

***5.96** Un puente de longitud $L = 48$ ft se construirá en un camino secundario cuyo acceso a camiones está restringido a vehículos de dos ejes de peso mediano. Consistirá en una losa de concreto y vigas de acero simplemente apoyadas con una resistencia última $\sigma_U = 60$ ksi. El peso combinado de la losa y de las vigas puede ser aproximado por una carga uniformemente distribuida $w = 0.75$ kips/ft en cada viga. Para propósitos de diseño, suponga que un camión con ejes colocados a una distancia $a = 14$ ft entre sí será conducido a través del puente y que las cargas concentradas resultantes $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ ejercidas sobre cada viga pueden alcanzar valores de hasta 24 kips y 6 kips, respectivamente. Determine el perfil de patín ancho más económico para las vigas, utilizando el método DCFR con factores de carga $\gamma_D = 1.25$, $\gamma_L = 1.75$ y el factor de resistencia $\phi = 0.9$. [*Sugerencia:* Puede mostrarse que el máximo valor de $|M_L|$ ocurre bajo la carga mayor cuando dicha carga se coloca a la izquierda del centro de la viga a una distancia igual a $aP_2/2(P_1 + P_2)$.]

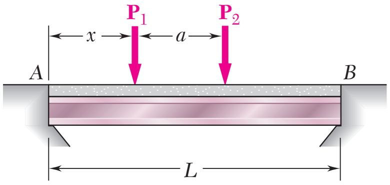


Figura P5.96

***5.97** Si se supone que las cargas de los ejes delantero y trasero permanecen con la misma razón que para el problema 5.96, determine cuán pesado podría ser un camión para pasar por el puente diseñado en ese problema.

*5.5 USO DE FUNCIONES DE SINGULARIDAD PARA DETERMINAR EL CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR EN UNA VIGA

Repasando lo estudiado en las secciones anteriores, se observa que el cortante y el momento flector rara vez pudieron ser descritos por funciones analíticas únicas. En el caso de la viga en voladizo del ejemplo 5.02 (figura 5.10), que soportaba una carga uniformemente distribuida w, el cortante y el momento flector *sí pudieron* representarse con funciones analíticas únicas, específicamente, $V = -wx$ y $M = -\frac{1}{2}wx^2$; esto se debió a que *no* existió *discontinuidad* en la carga de la viga. Por otra parte, en el caso de la viga simplemente apoyada del ejemplo 5.01, que estaba cargada sólo en su punto central C, la carga **P** aplicada en C representó una *singularidad* en la carga de la viga. Esta singularidad resultó en discontinuidades en los diagramas de cortante y de momento y requirió del uso de diferentes funciones analíticas para representar a V y a M en las porciones de la viga situadas, respectivamente, a la izquierda y a la derecha del punto C. En el problema modelo 5.2, la viga hubo de ser dividida en tres porciones, en cada una de las cuales se utilizaron diferentes funciones para representar el cortante y el momento flector. Esta situación requirió de la representación gráfica de las funciones V y M suministradas por los diagramas de cortante y de momento flector y, al final de la sección 5.3, sobre un método gráfico de integración para determinar V y M a partir de la carga distribuida w.

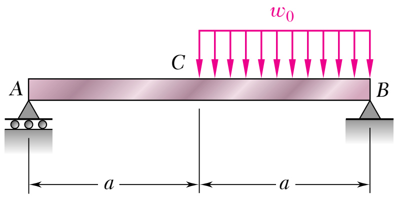


Figura 5.16

El propósito de esta sección es mostrar cómo el uso de *funciones de singularidad* hace posible representar el cortante V y el momento flector M por expresiones matemáticas únicas.

Considere la viga simplemente apoyada AB, de longitud $2a$, que lleva una carga uniformemente distribuida w_0 que se extiende desde su punto medio C hasta su soporte derecho B (figura 5.16). Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga completa (figura 5.17*a*); reemplazando la carga distribuida por una carga concentrada equivalente y, sumando momentos alrededor de B, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0: \qquad (w_0 a)(\tfrac{1}{2}a) - R_A(2a) = 0 \qquad R_A = \tfrac{1}{4}w_0 a$$

A continuación se corta la viga en un punto D entre A y C. Del diagrama de cuerpo libre de AD (figura 5.17*b*) se concluye que, en el intervalo $0 < x < a$, el cortante y el momento flector son expresados, respectivamente, por las funciones

$$V_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a \qquad \text{y} \qquad M_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0 ax$$

Cortando ahora la viga en un punto E entre C y B, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AE (figura 5.17*c*). Reemplazando la carga distribuida por la carga concentrada equivalente, se tiene

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0(x - a) - V_2 = 0$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \qquad -\tfrac{1}{4}w_0 ax + w_0(x - a)[\tfrac{1}{2}(x - a)] + M_2 = 0$$

y se concluye que, en el intervalo $a < x < 2a$, el cortante y el momento flector se expresan, respectivamente, con las funciones

$$V_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0(x - a) \qquad \text{y} \qquad M_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0 ax - \tfrac{1}{2}w_0(x - a)^2$$

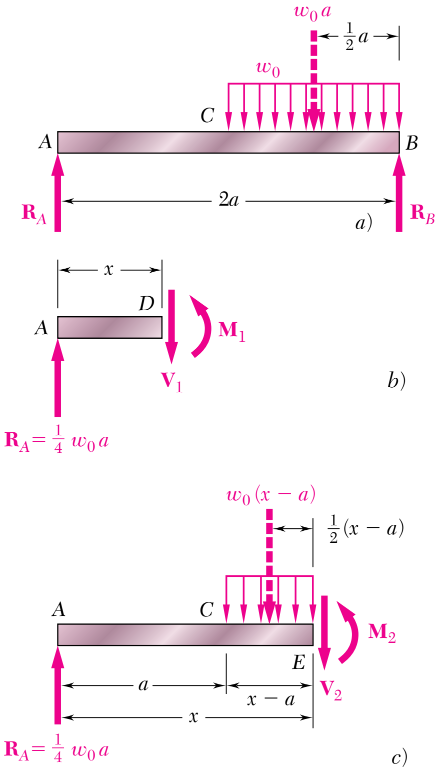


Figura 5.17

Como se señaló anteriormente en esta sección, el hecho de que el cortante y el momento flector estén representados por diferentes funciones de x, dependiendo de si x es menor o mayor que a, se debe a la discontinuidad de la carga en la viga. Sin embargo, las funciones $V_1(x)$ y $V_2(x)$ pueden representarse por la expresión única

$$V(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a - w_0 \langle x - a \rangle \tag{5.11}$$

si se especifica que el segundo término deberá incluirse en los cálculos cuando $x \geq a$ e ignorarse cuando $x < a$. En otras palabras, *los corchetes* $\langle \ \rangle$ *deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios* ( ) *cuando* $x \geq a$ *y por cero cuando* $x < a$. Con la misma convención, el momento flector puede representarse en cualquier punto de la viga por la expresión única

$$M(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a x - \tfrac{1}{2} w_0 \langle x - a \rangle^2 \tag{5.12}$$

De la convención que se ha adoptado, se entiende que los corchetes $\langle \ \rangle$ pueden derivarse o integrarse como paréntesis ordinarios. En lugar de calcular el momento flector a partir de diagramas de cuerpo libre, podría haberse utilizado el método indicado en la sección 5.3 e integrar la expresión obtenida para $V(x)$:

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(x)\,dx = \int_0^x \tfrac{1}{4} w_0 a\,dx - \int_0^x w_0 \langle x - a \rangle\,dx$$

Después de la integración, y observando que $M(0) = 0$, se obtiene, como antes,

$$M(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a x - \tfrac{1}{2} w_0 \langle x - a \rangle^2$$

Además, empleando la misma convención, se observa que la carga distribuida en cualquier punto de la viga puede expresarse como

$$w(x) = w_0 \langle x - a \rangle^0 \tag{5.13}$$

De hecho, los corchetes deberán reemplazarse por cero para $x < a$ y por paréntesis para $x \geq a$; entonces, se verifica que $w(x) = 0$ para $x < a$ y, definiendo la potencia cero para cualquier número como la unidad, que $\langle x - a \rangle^0 = (x - a)^0 = 1$ y que $w(x) = -w_0$ para $x \geq a$. De la sección 5.3 recuerde que es posible obtener el cortante integrando la función $-w(x)$. Observando que $V = \frac{1}{4} w_0 a$ para $x = 0$, se escribe

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x w(x)\,dx = -\int_0^x w_0 \langle x - a \rangle^0\,dx$$

$$V(x) - \tfrac{1}{4} w_0 a = -w_0 \langle x - a \rangle^1$$

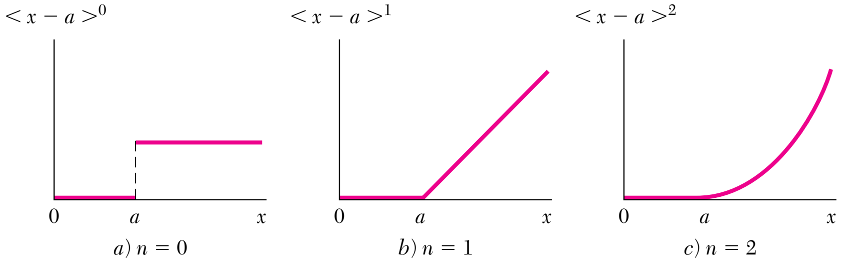
Despejando $V(x)$ y eliminando el exponente 1, se obtiene nuevamente

$$V(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a - w_0 \langle x - a \rangle$$

Las expresiones $\langle x - a\rangle^0$, $\langle x - a\rangle$, $\langle x - a\rangle^2$ se conocen como *funciones de singularidad*. Por definición se tiene, para $n \geq 0$,

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \tag{5.14}$$

También se advierte que siempre que la cantidad entre los corchetes sea positiva o cero, los corchetes deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios; en cambio, si la cantidad es negativa, el corchete mismo es igual a cero.



a) $n = 0$ *b)* $n = 1$ *c)* $n = 2$

Figura 5.18

Las tres funciones de singularidad que corresponden respectivamente a $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ se han graficado en la figura 5.18. Se observa que la función $\langle x - a\rangle^0$ es discontinua en $x = a$ y que tiene la forma de un escalón. Por tal razón recibe el nombre de *función escalón*. De acuerdo con la ecuación (5.14), y con la potencia cero de cualquier número definida como la unidad, se tiene:†

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \tag{5.15}$$

De esto se sigue, de la definición de las funciones de singularidad, que

$$\int \langle x - a\rangle^n \, dx = \frac{1}{n + 1}\langle x - a\rangle^{n+1} \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{5.16}$$

y

$$\frac{d}{dx}\langle x - a\rangle^n = n\langle x - a\rangle^{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1 \tag{5.17}$$

La mayoría de las cargas de viga encontradas en la práctica de la ingeniería pueden reducirse a las cargas básicas que se muestran en la figura 5.19. Dondequiera que sean aplicables, las funciones correspondientes $w(x)$, $V(x)$ y $M(x)$ se han expresado en términos de funciones de singularidad y graficadas contra un fondo de color. Se utilizó el fondo con color más intenso con el fin de indicar, para cada carga, la expresión que más fácilmente se deduce o recuerda y de la que otras funciones pueden encontrarse por integración.

---

† Como $(x - a)^0$ es discontinua en $x - a$, puede argumentarse que esta función debería dejarse indefinida para $x = a$ o que debería asignársele tanto el valor de 0 como el de 1 para $x = a$. Sin embargo, definir a $(x - a)^0$ como igual a 1 cuando $x = a$, como se estableció en la ecuación (5.15), tiene la ventaja de no ser ambiguo y, por tanto, directamente aplicable a la programación de computadoras (véase página 348).

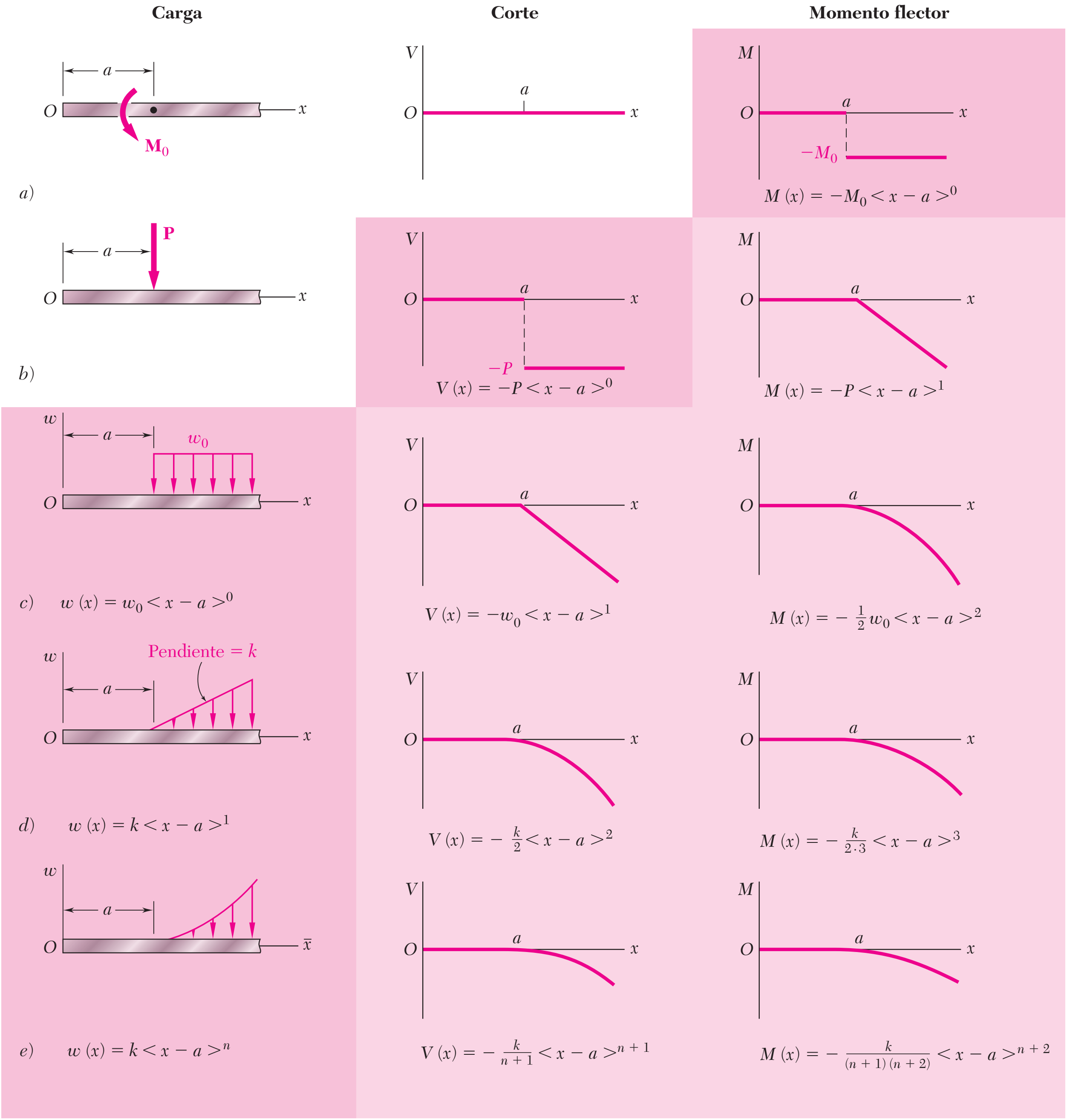
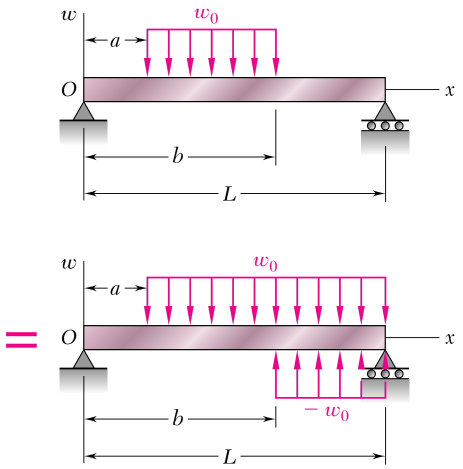

Carga
Corte
Momento flector
a)
$\mathbf{M}_0$
$M(x) = -M_0 < x - a >^0$
b)
P
$-P$
$V(x) = -P < x - a >^0$
$M(x) = -P < x - a >^1$
c)
w_0
$w(x) = w_0 < x - a >^0$
$V(x) = -w_0 < x - a >^1$
$M(x) = -\frac{1}{2} w_0 < x - a >^2$
d)
Pendiente = k
$w(x) = k < x - a >^1$
$V(x) = -\frac{k}{2} < x - a >^2$
$M(x) = -\frac{k}{2 \cdot 3} < x - a >^3$
e)
$w(x) = k < x - a >^n$
$V(x) = -\frac{k}{n+1} < x - a >^{n+1}$
$M(x) = -\frac{k}{(n+1)(n+2)} < x - a >^{n+2}$

Figura 5.19 Cargas básicas y sus correspondientes cortes y momentos flectores expresados en términos de funciones de singularidad.

Después de que una carga dada de una viga se ha dividido en las cargas básicas de la figura 5.19, las funciones $V(x)$ y $M(x)$ que representan el cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga pueden obtenerse sumando las funciones correspondientes asociadas con cada una de las cargas y reacciones básicas. Ya que todas las cargas distribuidas mostradas en la figura 5.19 son abiertas a la derecha, una carga distribuida que no se extiende hasta el extremo derecho de la viga o que es discontinua deberá reemplazarse como se muestra en la figura 5.20 por una combinación equivalente de cargas con extremo abierto (véase también el ejemplo 5.05 y el problema modelo 5.9).

Como se verá en la sección 9.6, el uso de funciones de singularidad simplifica mucho más la determinación de las deflexiones de la viga que el enfoque utilizado en esta sección. Tal método fue sugerido primero por el matemático alemán A. Clebsch (1833-1872). Sin embargo, es el matemático e ingeniero británico W. H. Macaulay (1853-1936) quien recibe comúnmente el crédito de introducir las funciones de singularidad en la forma utilizada aquí, por lo que los corchetes $\langle\ \ \rangle$ generalmente reciben el nombre de *corchetes de Macaulay.*[†]



$$w(x) = w_0 < x - a >^0 - w_0 < x - b >^0$$

Figura 5.20

EJEMPLO 5.05

Para la viga y carga mostradas (figura 5.21*a*) y usando funciones de singularidad, exprese el corte y el momento flector como funciones de la distancia *x* desde el apoyo en *A*.

Primero se determina la reacción en *A* dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 5.21*b*) y escribiendo

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$\begin{aligned} +\circlearrowleft\Sigma M_B = 0: \qquad & -A_y(3.6\text{ m}) + (1.2\text{ kN})(3\text{ m}) \\ & +(1.8\text{ kN})(2.4\text{ m}) + 1.44\text{ kN}\cdot\text{m} = 0 \\ & A_y = 2.60\text{ kN} \end{aligned}$$

A continuación, se reemplaza la carga distribuida por dos cargas equivalentes abiertas a la derecha (figura 5.21*c*) y se expresa la carga distribuida $w(x)$ como la suma de las funciones escalón correspondientes:

$$w(x) = +w_0\langle x - 0.6\rangle^0 - w_0\langle x - 1.8\rangle^0$$

La función $V(x)$ se obtiene integrando $w(x)$, invirtiendo los signos $+$ y $-$; al resultado se le suman las constantes A_y y $-P\langle x - 0.6\rangle^0$ que representan las contribuciones respectivas al cortante de la reacción en *A* y de la carga concentrada. (No se requiere ninguna otra constante de integración.) Puesto que el par concentrado no afecta directamente al cortante, deberá ignorarse en este cálculo. Se escribe

$$V(x) = -w_0\langle x - 0.6\rangle^1 + w_0\langle x - 1.8\rangle^1 + A_y - P\langle x - 0.6\rangle^0$$

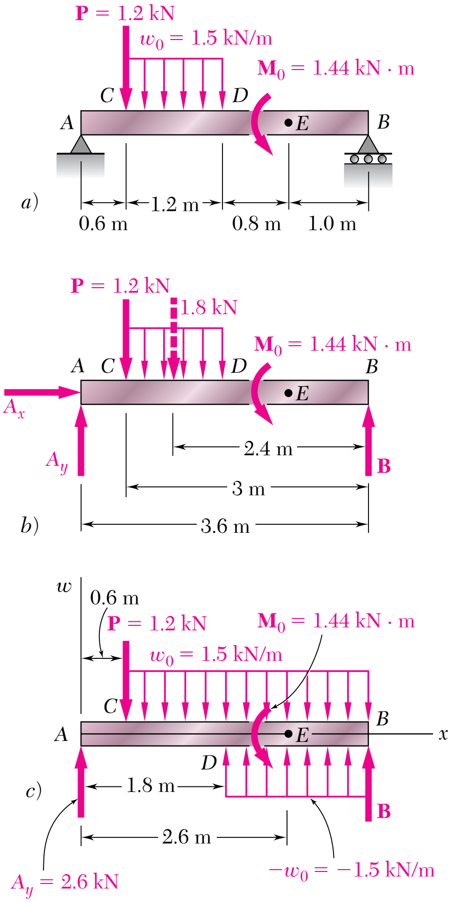


Figura 5.21

[†] W. H. Macaulay, "Note on the Deflection of Beams," en *Messenger of Mathematics*, vol. 48, pp. 129-130, 1919.

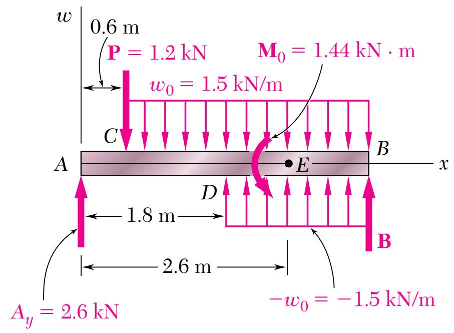


Figura 5.21*c* (repetida)

De manera similar se obtiene la función $M(x)$ integrando $V(x)$ y sumando al resultado la constante $-M_0\langle x - 2.6\rangle^0$ que representa la contribución del par concentrado en el momento flector. Se tiene

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}w_0\langle x - 0.6\rangle^2 + \tfrac{1}{2}w_0\langle x - 1.8\rangle^2 \\ + A_y x - P\langle x - 0.6\rangle^1 - M_0\langle x - 2.6\rangle^0$$

Sustituyendo los valores numéricos de las reacciones y cargas en las expresiones obtenidas para $V(x)$ y $M(x)$ y teniendo la precaución de *no* calcular ningún producto o expandir ningún cuadrado que involucre un juego de corchetes, se obtienen las siguientes expresiones para el cortante y para el momento flector en cualquier punto de la viga:

$$V(x) = -1.5\langle x - 0.6\rangle^1 + 1.5\langle x - 1.8\rangle^1 \\ +2.6 - 1.2\langle x - 0.6\rangle^0$$

$$M(x) = -0.75\langle x - 0.6\rangle^2 + 0.75\langle x - 1.8\rangle^2 \\ +2.6x - 1.2\langle x - 0.6\rangle^1 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^0$$

EJEMPLO 5.06

Para la viga y la carga del ejemplo 5.05, determine los valores numéricos del cortante y del momento flector en el punto central D.

Haciendo que $x = 1.8$ m en las expresiones encontradas para $V(x)$ y para $M(x)$ en el ejemplo 5.05, se obtiene

$$V(1.8) = -1.5\langle 1.2\rangle^1 + 1.5\langle 0\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle 1.2\rangle^0$$

$$M(1.8) = -0.75\langle 1.2\rangle^2 + 0.75\langle 0\rangle^2 \\ + 2.6(1.8) - 1.2\langle 1.2\rangle^1 - 1.44\langle -0.8\rangle^0$$

Recordando que siempre que una cantidad entre corchetes es positiva o cero, los corchetes deben reemplazarse por paréntesis ordinarios y, siempre que la cantidad sea negativa, el corchete mismo es igual a cero, se escribe

$$\begin{aligned} V(1.8) &= -1.5(1.2)^1 + 1.5(0)^1 + 2.6 - 1.2(1.2)^0 \\ &= -1.5(1.2) + 1.5(0) + 2.6 - 1.2(1) \\ &= -1.8 + 0 + 2.6 - 1.2 \end{aligned}$$

$$V(1.8) = -0.4 \text{ kN}$$

y

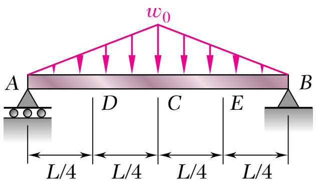
$$M(1.8) = -0.75(1.2)^2 + 0.75(0)^2 \\ + 2.6(1.8) - 1.2(1.2)^1 - 1.44(0)$$

$$= -1.08 + 0 + 4.68 - 1.44 - 0$$

$$M(1.8) = +2.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

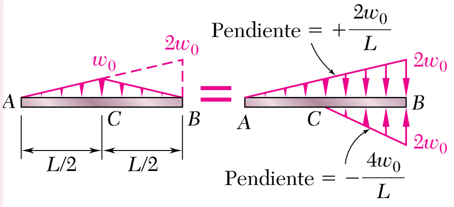
Aplicación a la programación de computadoras. Las funciones de singularidad se han adaptado bien a su uso en computadoras. Primero se advierte que la función escalón $\langle x - a\rangle^0$, que se representará por el símbolo ESC, puede definirse por una instrucción tipo IF/THEN/ELSE como igual a 1 para X $\geq$ A y 0 para otros casos. Cualquier otra función de singularidad $\langle x - a\rangle^n$, donde $n \geq 1$, puede expresarse, entonces, como el producto de la expresión algebraica $(x - a)^n$ y la función escalón $\langle x - a\rangle^0$.

Cuando se encuentran involucradas k diferentes funciones de singularidad, tales como $\langle x - a_i\rangle^n$, donde $i = 1, 2,..., k$, entonces deben definirse las correspondientes funciones ESC(I), donde I = 1, 2,..., K en un lazo que contenga una instrucción IF/THEN/ELSE única.



PROBLEMA MODELO 5.9

Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector en cualquier punto, *b*) el cortante y el momento flector en los puntos *C*, *D* y *E*.

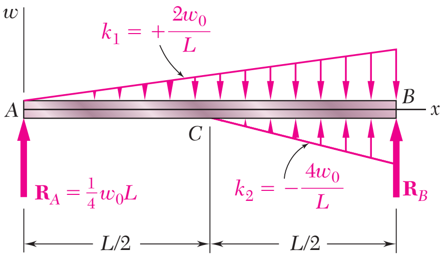


SOLUCIÓN

Reacciones. La carga total es $\frac{1}{2}w_0L$; debido a la simetría, cada reacción es igual a la mitad de ese valor, esto es, $\frac{1}{4}w_0L$.

Carga distribuida. La carga distribuida dada es reemplazada por dos cargas abiertas equivalentes como se indica. Empleando una función de singularidad para expresar la segunda carga, se escribe

$$w(x) = k_1x + k_2\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle = \frac{2w_0}{L}x - \frac{4w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle \qquad (1)$$



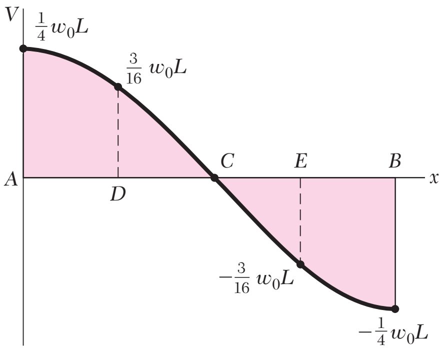
***a*) Ecuaciones para el cortante y el momento flector.** Se obtiene $V(x)$ integrando (1), cambiando los signos y sumando una constante igual a R_A:

$$V(x) = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{2w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad (2) \blacktriangleleft$$

Se obtiene $M(x)$ integrando la ecuación (2); ya que no hay par concentrado, no se necesita constante de integración:

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \qquad (3) \blacktriangleleft$$

b*) Cortante y momento flector en *C*, *D* y *E



En el punto C: Haciendo $x = \frac{1}{2}L$ en las ecuaciones (2) y (3), y recordando que cuando una cantidad entre corchetes es positiva o cero, los corchetes pueden reemplazarse por paréntesis, se tiene

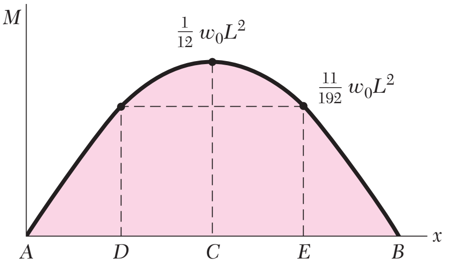
$$V_C = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{2}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle 0\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_C = 0 \blacktriangleleft$$

$$M_C = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{2}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle 0\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{2}L) \qquad M_C = \frac{1}{12}w_0L^2 \blacktriangleleft$$

En el punto D: Haciendo $x = \frac{1}{4}L$ en las ecuaciones (2) y (3), y recordando que un corchete que contenga una cantidad negativa es igual a cero, se escribe

$$V_D = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle -\tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_D = \frac{3}{16}w_0L \blacktriangleleft$$

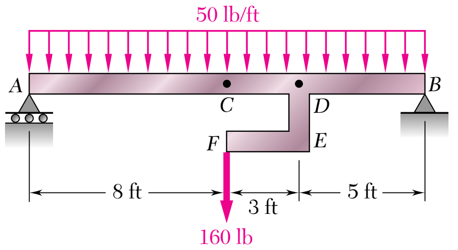
$$M_D = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle -\tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{4}L) \qquad M_D = \frac{11}{192}w_0L^2 \blacktriangleleft$$



En el punto E: Haciendo $x = \frac{3}{4}L$ en las ecuaciones (2) y (3), se tiene

$$V_E = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{3}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_E = -\frac{3}{16}w_0L \blacktriangleleft$$

$$M_E = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{3}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{3}{4}L) \qquad M_E = \frac{11}{192}w_0L^2 \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 5.10

La barra rígida *DEF* se encuentra soldada en el punto *D* a una viga de acero *AB*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) las ecuaciones que definen el corte y el momento flector en cualquier punto de la viga, *b*) la localización y magnitud del máximo momento flector.

SOLUCIÓN

Reacciones. Se consideran la viga y la barra como un cuerpo libre y se observa que la carga total es de 960 lb. Debido a la simetría, cada reacción es igual a 480 lb.

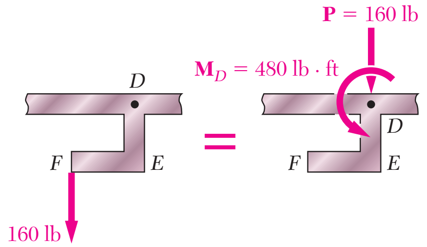
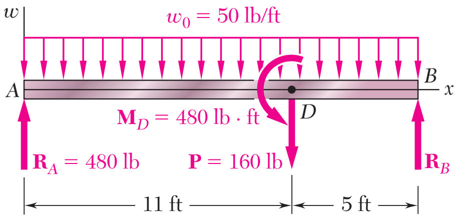


Diagrama modificado de carga. Se reemplaza la carga de 160 lb aplicada en *F* por un sistema equivalente de fuerza y momento en *D*. Así se obtiene un diagrama de carga que consiste en un par concentrado, tres cargas concentradas (incluyendo las dos reacciones) y una carga uniformemente distribuida

$$w(x) = 50 \text{ lb/ft} \tag{1}$$

***a*) Ecuaciones para cortante y momento flector.** Se obtiene $V(x)$ integrando la ecuación (1), cambiando el signo y sumando las constantes que representan las contribuciones respectivas de $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{P}$ al cortante. Como $\mathbf{P}$ afecta a $V(x)$ sólo para valores de x mayores de 11 ft, se utiliza una función escalón para expresar su contribución.

$$V(x) = -50x + 480 - 160\langle x - 11\rangle^0 \tag{2} \quad ◀$$



Se obtiene $M(x)$ integrando la ecuación (2) y utilizando una función escalón para representar la contribución del par concentrado $\mathbf{M}_D$:

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \tag{3} \quad ◀$$

***b*) Máximo momento flector.** Como M es máximo o mínimo cuando $V = 0$, se hace $V = 0$ en la ecuación (2) y se despeja x de dicha ecuación para encontrar el máximo momento flector. Considerando primero valores de x menores de 11 ft y notando que para tales valores el corchete es igual a cero, se tiene

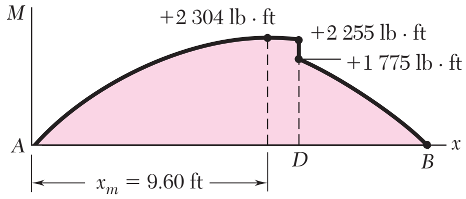
$$-50x + 480 = 0 \qquad x = 9.60 \text{ ft}$$

Considerando ahora valores de x mayores de 11 ft, para los que el corchete es igual a 1, se tiene que

$$-50x + 480 - 160 = 0 \qquad x = 6.40 \text{ ft}$$

Ya que este valor *no* es mayor de 11 ft, debe rechazarse. Así, el valor de x correspondiente al momento flector máximo es

$$x_m = 9.60 \text{ ft} \quad ◀$$



Sustituyendo este valor de x en la ecuación (3), se obtiene

$$M_{\text{máx}} = -25(9.60)^2 + 480(9.60) - 160\langle -1.40\rangle^1 - 480\langle -1.40\rangle^0$$

y, recordando que los corchetes con cantidades negativas son iguales a cero,

$$M_{\text{máx}} = -25(9.60)^2 + 480(9.60) \qquad M_{\text{máx}} = 2\,304 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad ◀$$

Se ha graficado el diagrama de momento flector. Note la discontinuidad en el punto *D* debida al par concentrado aplicado en ese punto. Los valores de M justo a la izquierda y justo a la derecha de *D* se obtuvieron haciendo $x = 11$ en la ecuación (3) y reemplazando la función escalón $\langle x - 11\rangle^0$ por 0 y por 1, respectivamente.

PROBLEMAS

5.98 a 5.100 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Mediante la ecuación obtenida para *M* determine el momento flector en el punto *C* y verifique la respuesta con el trazo del diagrama de cuerpo libre de la viga completa.

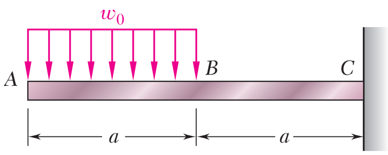


Figura P5.98

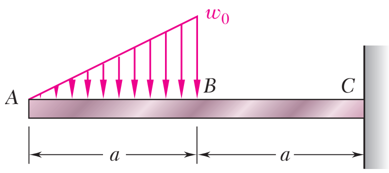


Figura *P5.99*

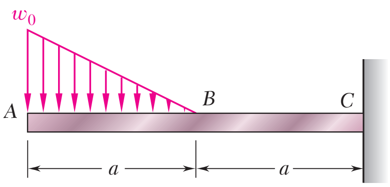


Figura P5.100

5.101 a *5.103* *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Mediante la ecuación obtenida para *M* determine el momento flector en el punto *E* y verifique la respuesta con el trazo del diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga a la derecha de *E*.

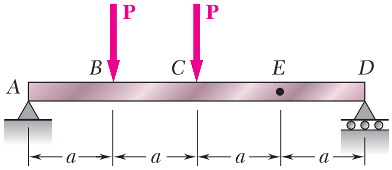


Figura P5.101

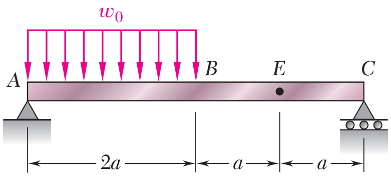


Figura P5.102

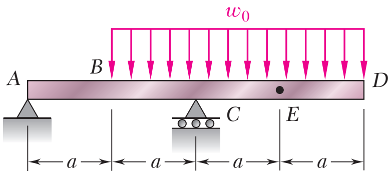


Figura *P5.103*

5.104 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga *ABC* bajo las cargas que se muestran en la figura. *b*) Utilice la ecuación obtenida para *M* a fin de calcular el momento flector justo a la derecha del punto *D*.

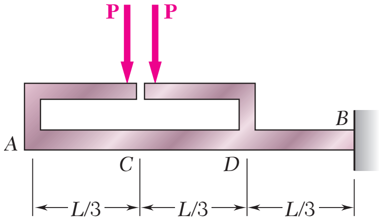


Figura P5.104

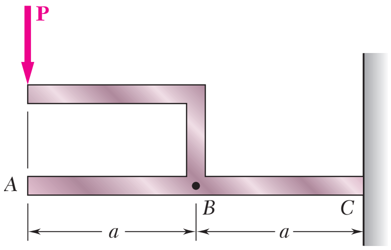


Figura P5.105

5.105 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga *ABC* bajo la carga mostrada en la figura. *b*) Utilice la ecuación obtenida para *M* a fin de calcular el momento flector justo a la derecha del punto *B*.

5.106 a 5.109 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Determine el máximo valor del momento flector en la viga.

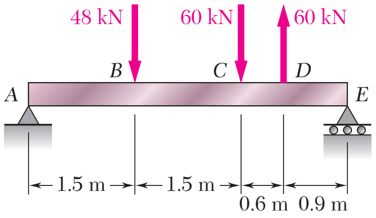

48 kN
60 kN
60 kN
A
B
C
D
E
1.5 m
1.5 m
0.6 m
0.9 m

Figura P5.106

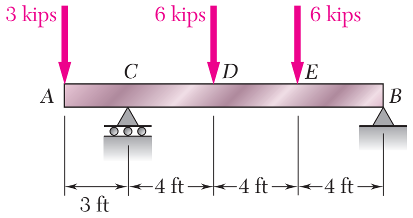

3 kips
6 kips
6 kips
A
C
D
E
B
3 ft
4 ft
4 ft
4 ft

Figura P5.107

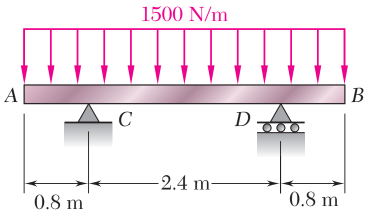

1500 N/m
A
B
C
D
0.8 m
2.4 m
0.8 m

Figura P5.108

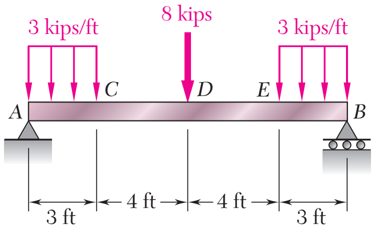

3 kips/ft
8 kips
3 kips/ft
A
C
D
E
B
3 ft
4 ft
4 ft
3 ft

Figura P5.109

5.110 y *5.111* *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

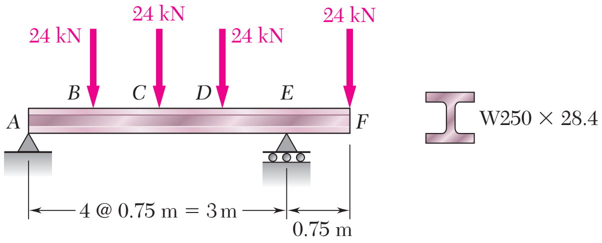

24 kN
24 kN
24 kN
24 kN
A
B
C
D
E
F
W250 × 28.4
4 @ 0.75 m = 3 m
0.75 m

Figura P5.110

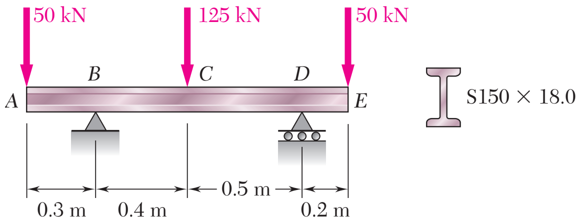

50 kN
125 kN
50 kN
A
B
C
D
E
S150 × 18.0
0.3 m
0.4 m
0.5 m
0.2 m

Figura *P5.111*

5.112* y *5.113 *a*) Utilice funciones de singularidad para encontrar la magnitud y la localización del momento flector máximo para la viga y la carga que se muestran en las figura. *b*) Determine el esfuerzo normal máximo debido a la flexión.

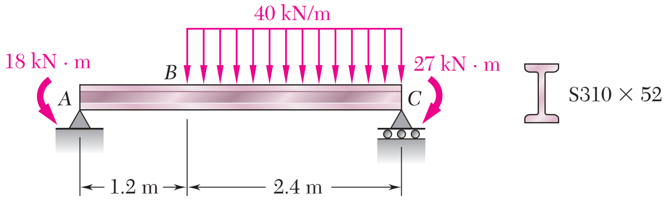

18 kN · m
40 kN/m
27 kN · m
A
B
C
S310 × 52
1.2 m
2.4 m

Figura *P5.112*

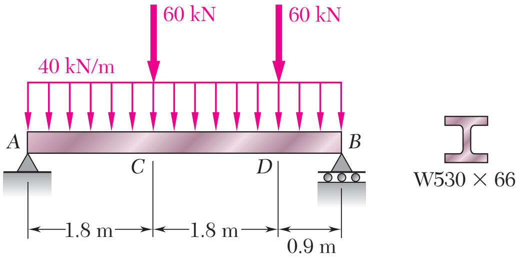

60 kN
60 kN
40 kN/m
A
B
C
D
W530 × 66
1.8 m
1.8 m
0.9 m

Figura *P5.113*

5.114 y 5.115 Una viga está diseñada con los apoyos y las cargas que se muestran en la figura. *a*) Utilice funciones de singularidad para encontrar la magnitud y la localización del máximo momento flector en la viga. *b*) Si el esfuerzo permisible para el acero que se utilizará es de 24 ksi, encuentre el perfil de patín ancho más económico que debe seleccionarse.

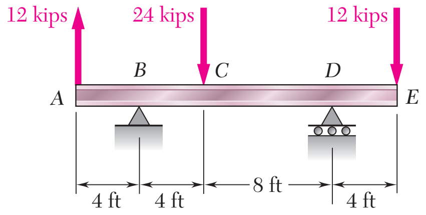

12 kips
24 kips
12 kips
A
B
C
D
E
4 ft
4 ft
8 ft
4 ft

Figura P5.114

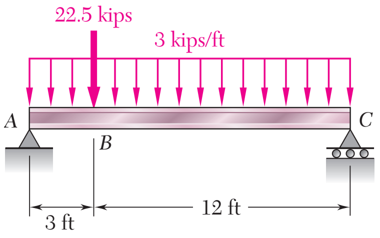

22.5 kips
3 kips/ft
A
B
C
3 ft
12 ft

Figura P5.115

5.116 y *5.117* Una viga de madera está diseñada con los apoyos y las cargas que se muestran en la figura. *a*) Utilice funciones de singularidad para determinar la magnitud y localización del momento flector máximo en la viga. *b*) Si el material disponible consiste en vigas con un esfuerzo permisible de 12 MPa y una sección transversal rectangular de 30 mm de ancho y de espesor *h* que varía de 80 a 160 mm en incrementos de 10 mm, determine la sección transversal más económica que puede utilizarse.

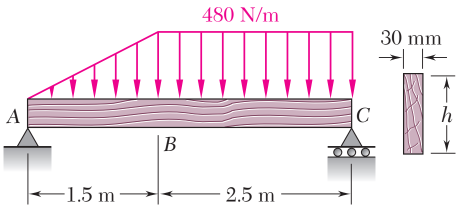

480 N/m
30 mm
A
B
C
h
1.5 m
2.5 m

Figura P5.116

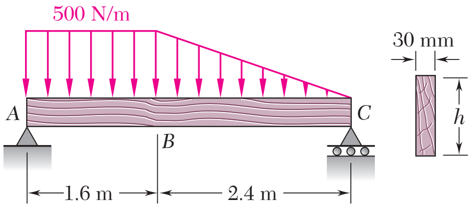

500 N/m
30 mm
A
B
C
h
1.6 m
2.4 m

Figura *P5.117*

5.118 a 5.121 Utilice una computadora y funciones escalón para calcular el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en las figuras. Emplee los incrementos especificados para ΔL, empezando en el punto A y terminando en el apoyo de la derecha.

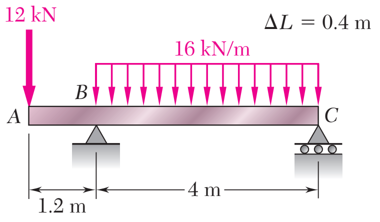

12 kN
ΔL = 0.4 m
16 kN/m
A
B
C
1.2 m
4 m

Figura P5.118

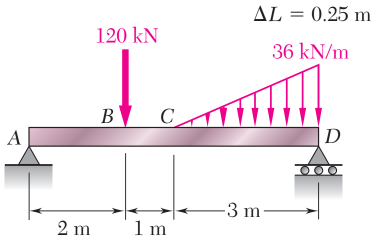

ΔL = 0.25 m
120 kN
36 kN/m
A
B
C
D
2 m
1 m
3 m

Figura P5.119

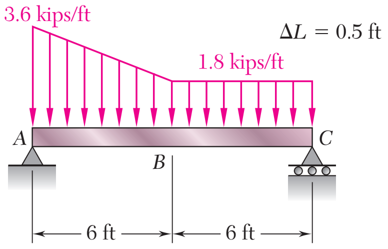

3.6 kips/ft
ΔL = 0.5 ft
1.8 kips/ft
A
B
C
6 ft
6 ft

Figura *P5.120*

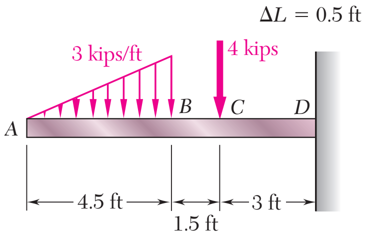

ΔL = 0.5 ft
3 kips/ft
4 kips
A
B
C
D
4.5 ft
1.5 ft
3 ft

Figura P5.121

5.122 y 5.123 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, y usando una computadora y funciones escalón, *a*) tabule el cortante, el momento flector y el esfuerzo normal máximo en secciones de la viga desde $x = 0$ hasta $x = L$, utilizando los incrementos ΔL indicados, *b*) empleando incrementos más pequeños si es necesario, determine, con una exactitud de 2%, el esfuerzo normal máximo en la viga. Ubique el origen del eje x en el extremo A de la viga.

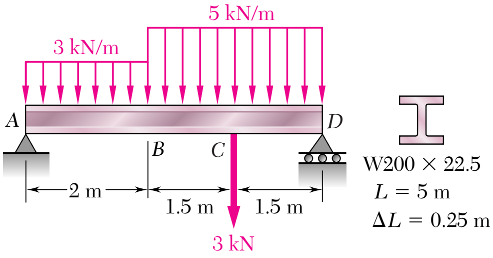


Figura P5.122

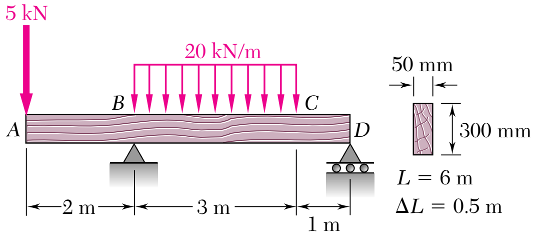


Figura P5.123

5.124 y *5.125* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, y utilizando una computadora y funciones escalón, *a*) tabule el cortante, el momento flector y el esfuerzo normal máximo en secciones de la viga desde $x = 0$ hasta $x = L$, usando los incrementos ΔL indicados, *b*) empleando incrementos más pequeños si es necesario, determine, con una exactitud de 2%, el esfuerzo normal máximo en la viga. Ubique el origen del eje x en el extremo A de la viga.

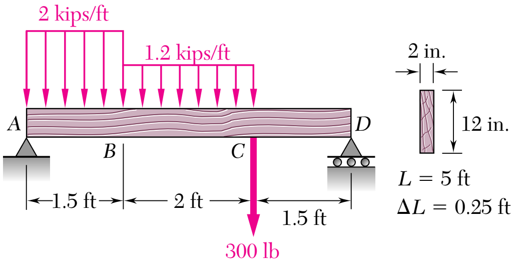


Figura P5.124

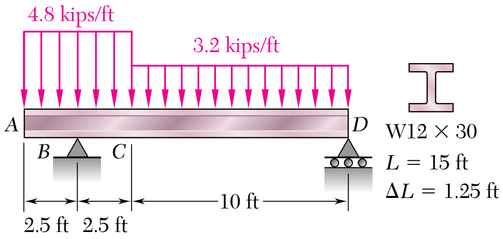


Figura *P5.125*

*5.6 VIGAS NO PRISMÁTICAS

Hasta ahora el presente análisis se ha restringido a vigas prismáticas, es decir, a vigas con sección transversal uniforme. Como se vio en la sección 5.4, las vigas prismáticas se diseñan de tal manera que los esfuerzos normales en sus secciones críticas sean iguales al valor permisible del esfuerzo normal para el material que se utiliza; por lo tanto, en otras secciones, los esfuerzos normales serán más pequeños, posiblemente mucho más pequeños, que sus valores permisibles. Esto significa que una viga prismática, casi siempre está sobrediseñada, y que es posible lograr un considerable ahorro de material utilizando vigas no prismáticas, es decir, vigas con sección transversal variable. La viga fundida en voladizo utilizada en la máquina de ensayo para suelos representada en la figura 5.22 es una viga de este tipo.

Como los esfuerzos normales máximos σ_m generalmente condicionan el diseño de una viga, el diseño de una viga no prismática será óptimo si el módulo de sección $S = I/c$ de cada sección transversal satisface la ecuación (5.3) de la sección 5.1. Despejando S de dicha ecuación, se escribe

$$S = \frac{|M|}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.18}$$

Una viga diseñada de esta manera se conoce como *viga de resistencia constante*.

Figura 5.22

Para un componente fundido o forjado estructural o de una máquina, es posible variar la sección transversal del componente a lo largo de su longitud y eliminar la mayor parte del material innecesario (véase ejemplo 5.07). Para una viga de madera o una viga de acero laminado, sin embargo, no es posible variar la sección transversal de la viga. Pero puede lograrse considerable ahorro de material pegando tablas de madera de longitudes apropiadas a una viga de madera (véase problema modelo 5.11) y usando postizos en porciones de una viga de acero laminado donde el momento flector es grande (véase problema modelo 5.12).

EJEMPLO 5.07

Una placa de aluminio fundido de espesor uniforme b deberá soportar una carga uniformemente distribuida w como se muestra en la figura 5.23. *a*) Determine la forma de la placa que dará el diseño más económico. *b*) Considerando que el esfuerzo normal permisible para el aluminio utilizado es de 72 MPa y que $b = 40$ mm, $L = 800$ mm y $w = 135$ kN/m, determine el ancho máximo h_0 de la placa.

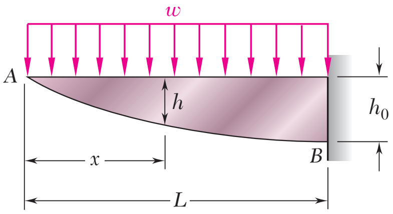


Figura 5.23

Momento flector. Midiendo la distancia x desde A y observando que $V_A = M_A = 0$, se usan las ecuaciones (5.6) y (5.8) de la sección 5.3 y se escribe

$$V(x) = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$M(x) = \int_0^x V(x)\,dx = -\int_0^x wx\,dx = -\tfrac{1}{2}wx^2$$

a) Forma de la placa. Recuerde, de la sección 5.4, que el módulo S de una sección transversal rectangular de ancho b y altura h es $S = \frac{1}{6}bh^2$. Llevando este valor a la ecuación (5.18) y despejando h^2, se tiene

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{perm}}} \qquad (5.19)$$

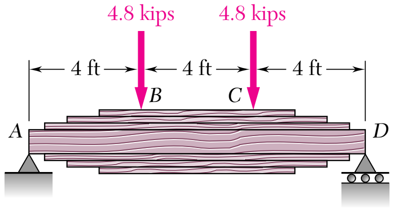
y, tras sustituir $|M| = \frac{1}{2}wx^2$,

$$h^2 = \frac{3wx^2}{b\sigma_{\text{perm}}} \quad \text{o} \quad h = \left(\frac{3w}{b\sigma_{\text{perm}}}\right)^{1/2} x \qquad (5.20)$$

Ya que la relación entre h y x es lineal, el extremo inferior de la placa es una línea recta. Así, la placa que rinde el diseño más económico tiene *forma triangular*.

b) Ancho máximo h_0. Haciendo $x = L$ en la ecuación (5.20) y sustituyendo datos, se obtiene

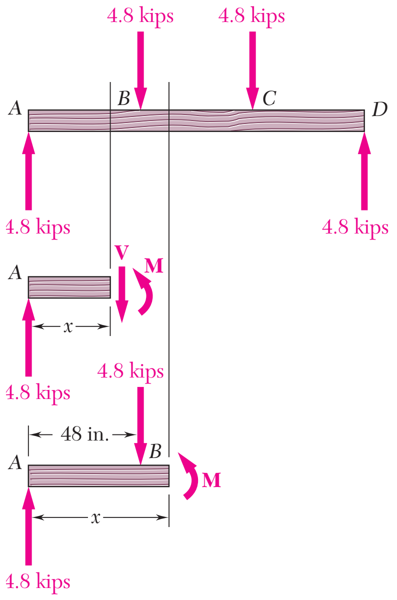
$$h_0 = \left[\frac{3(135\text{ kN/m})}{(0.040\text{ m})(72\text{ MPa})}\right]^{1/2} (800\text{ mm}) = 300\text{ mm}$$



PROBLEMA MODELO 5.11

Una viga de 12 ft de largo hecha de un madero con un esfuerzo normal permisible de 2.40 ksi y un esfuerzo cortante permisible de 0.40 ksi deberá soportar dos cargas de 4.8 kips ubicadas en la tercera parte de longitud desde sus extremos. Como se explica en el capítulo 6, una viga con sección transversal rectangular uniforme, de 4 in. de ancho y 4.5 in. de espesor, satisfaría el requerimiento del esfuerzo cortante permisible. Ya que tal viga no satisfaría el requerimiento del esfuerzo normal permisible, se reforzará encolando tablas de la misma madera, de 4 in. de ancho y 1.2 in. de espesor, arriba y debajo de la viga de manera simétrica. Determine *a*) el número requerido de tablas, *b*) la longitud de las tablas de cada par que dará el diseño más económico.

SOLUCIÓN



Momento flector. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga y se encuentran las siguientes expresiones para el momento flector:

De A a B $(0 \leq x \leq 48 \text{ in.})$: $\quad M = (4.80 \text{ kips})x$

De B a C $(48 \text{ in.} \leq x \leq 96 \text{ in.})$:

$$M = (4.80 \text{ kips})x - (4.80 \text{ kips})(x - 48 \text{ in.}) = 230.4 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

***a*) Número de pares de tablas.** Primero se obtiene el espesor total requerido de la viga reforzada entre B y C. Se recuerda, de la sección 5.4, que $S = \frac{1}{6}bh^2$ para una viga con sección transversal rectangular con ancho b y espesor h. Sustituyendo este valor en la ecuación (5.17) y despejando h^2, se tiene

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{perm}}} \tag{1}$$

Sustituyendo el valor obtenido para M de B a C y los valores dados de b y de σ_{perm}, se escribe

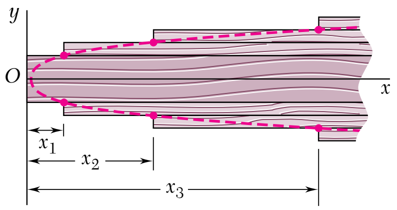
$$h^2 = \frac{6(230.4 \text{ kips} \cdot \text{in.})}{(4 \text{ in.})(2.40 \text{ ksi})} = 144 \text{ in.}^2 \qquad h = 12.00 \text{ in.}$$

Como la viga original tiene un espesor de 4.50 in., las tablas deben dar un espesor adicional de 7.50 in. Recordando que cada par de tablas es de 2.50 in. de espesor:

Número requerido de pares de tablas = 3 ◀

***b*) Longitud de las tablas.** Se encontró que el momento flector es de $M = (4.80 \text{ kips})x$ en la porción AB de la viga. Sustituyendo esta expresión y los valores dados de b y de σ_{perm} en la ecuación (1) y despejando x se tiene

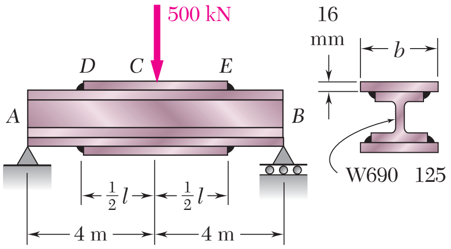
$$x = \frac{(4 \text{ in.})(2.40 \text{ ksi})}{6\,(4.80 \text{ kips})}h^2 \qquad x = \frac{h^2}{3 \text{ in.}} \tag{2}$$



La ecuación (2) define la máxima distancia x desde el extremo A en la que un espesor dado h de la sección transversal es aceptable. Haciendo $h = 4.50$ in., se halla la distancia x_1 desde A en la que la viga prismática original es segura: $x_1 = 6.75$ in. Desde ese punto, la viga original deberá reforzarse por el primer par de tablas. Haciendo $h = 4.50 \text{ in.} + 2.50 \text{ in.} = 7.00$ in. da la distancia $x_2 = 16.33$ in. desde donde se deberá utilizar el segundo par de tablas, y haciendo $h = 9.50$ in. da la distancia $x_3 = 30.08$ in. a partir de la que deberá utilizarse el tercer par de tablas. La longitud l_i de las tablas del par i, donde $i = 1, 2, 3$ se obtiene restando $2x_i$ de la longitud de 144 in. de la viga. Se encuentra

$l_1 = 130.5$ in., $l_2 = 111.3$ in., $l_3 = 83.8$ in. ◀

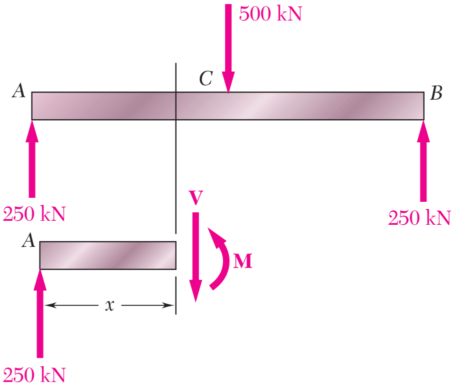
Las esquinas de las distintas tablas caen dentro de la parábola definida por la ecuación (2).



PROBLEMA MODELO 5.12

Dos placas de acero, cada una de 16 mm de espesor, se sueldan, como se indica en la figura, a una viga W690 × 125 para reforzarla. Si $\sigma_{\text{perm}} = 160$ MPa tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido de *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

SOLUCIÓN



Momento flector. Primero se encuentran las reacciones. Del diagrama de cuerpo libre de una porción de viga con longitud $x \leq 4$ m, se obtiene M entre A y C:

$$M = (250 \text{ kN})x \tag{1}$$

***a*) Longitud requerida de las placas.** Primero se obtiene la máxima longitud permisible x_m de la porción AD de la viga sin reforzar. Del apéndice C se encuentra que el módulo de sección de una viga W690 × 125 es $S = 3\,510 \times 10^6$ mm^3, o $S = 3.51 \times 10^{-3}$ m^3. Sustituyendo S y σ_{perm} en la ecuación (5.17) y despejando M, se escribe

$$M = S\sigma_{\text{perm}} = (3.51 \times 10^{-3} \text{ m}^3)(160 \times 10^3 \text{ kN/m}^2) = 561.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo M en la ecuación (1), se tiene que

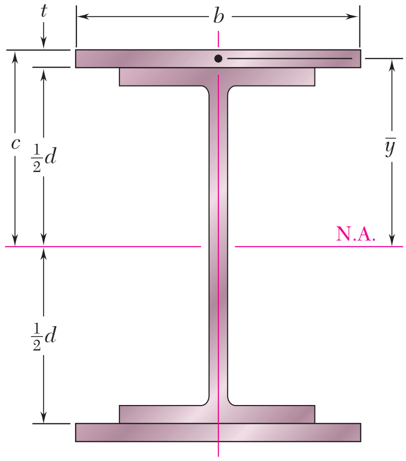
$$561.6 \text{ kN} \cdot \text{m} = (250 \text{ kN})x_m \qquad x_m = 2.246 \text{ m}$$

La longitud requerida l de las placas se obtiene restando $2x_m$ de la longitud de la viga:

$$l = 8 \text{ m} - 2(2.246 \text{ m}) = 3.508 \text{ m} \qquad l = 3.51 \text{ m} \blacktriangleleft$$

***b*) Ancho requerido de las placas.** El momento flector máximo ocurre a la mitad C de la viga. Haciendo $x = 4$ m en la ecuación (1), se obtiene el momento flector en dicha sección:

$$M = (250 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 1\,000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Para utilizar la ecuación (5.1) de la sección 5.1, se determina ahora el momento de inercia de la sección transversal de la viga reforzada con respecto a un eje centroidal y la distancia c desde dicho eje a las superficies exteriores de las placas. Del apéndice C se encuentra que el momento de inercia de una viga W690 × 125 es $I_b = 1\,190 \times 10^6$ mm^4 y que su altura es $d = 678$ mm. Por otra parte, denotando por t el espesor de una placa, por b su ancho y por $\bar{y}$ la distancia de su centroide al eje neutro, se expresa el momento de inercia I_p de las dos placas con respecto al eje neutro:

$$I_p = 2(\tfrac{1}{12}bt^3 + A\bar{y}^2) = (\tfrac{1}{6}t^3)b + 2\,bt(\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}t)^2$$

Sustituyendo $t = 16$ mm y $d = 678$ mm, se obtiene $I_p = (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$. El momento de inercia I de la viga y de las placas es

$$I = I_b + I_p = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b \tag{2}$$

y la distancia desde el eje neutro a la superficie es $c = \frac{1}{2}d + t = 355$ mm. Despejando I de la ecuación (5.1) y sustituyendo los valores de M, σ_{perm} y c, se escribe

$$I = \frac{|M|c}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{(1\,000 \text{ kN} \cdot \text{m})(355 \text{ mm})}{160 \text{ MPa}} = 2.219 \times 10^{-3} \text{ m}^4 = 2\,219 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Reemplazando I por este valor en la ecuación (2) y despejando b, se tiene

$$2\,219 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1\,190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$$

$$b = 267 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

5.126 y 5.127 La viga AB, que consiste de una placa de hierro colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga que se muestra en la figura. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0. *b*) Determine la carga máxima permisible si $L = 36$ in., $h_0 = 12$ in., $b = 1.25$ in. y $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi.

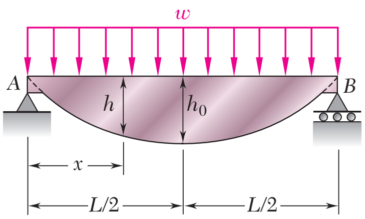


Figura P5.126

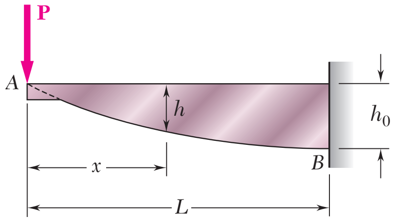


Figura P5.127

5.128 y *5.129* La viga AB, que consiste en una placa de aluminio con espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga que se muestra en la figura. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0 para la porción AC de la viga. *b*) Determine la máxima carga permisible si $L = 800$ mm, $h_0 = 200$ mm, $b = 25$ mm y $\sigma_{\text{perm}} = 72$ MPa.

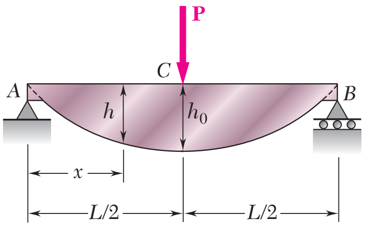


Figura P5.128

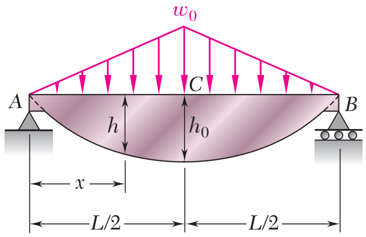


Figura *P5.129*

***5.130* y 5.131** La viga AB, que consiste en una placa de hierro colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga distribuida $w(x)$ que se muestra en la figura. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0. *b*) Determine el mínimo valor de h_0 si $L = 750$ mm, $b = 30$ mm, $w_0 = 300$ kN/m y $\sigma_{\text{perm}} = 200$ MPa.

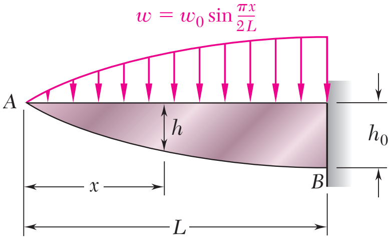


Figura *P5.130*

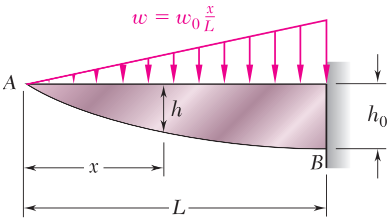


Figura P5.131

5.132 y *5.133* Un diseño preliminar basado en el uso de una viga prismática en voladizo indicó que se requeriría una viga con una sección transversal rectangular de 2 in. de ancho y 10 in. de espesor para soportar con seguridad la carga que se observa en la parte *a*) de la figura. Después se decidió reemplazar dicha viga con una viga ensamblada obtenida al pegar, como se indica en la parte *b*) de la figura, cinco piezas de la misma madera que la viga original y de sección transversal de 2 × 2 in. Determine las longitudes respectivas l_1 y l_2 de las dos piezas interiores y exteriores de madera que darán el mismo factor de seguridad que el diseño original.

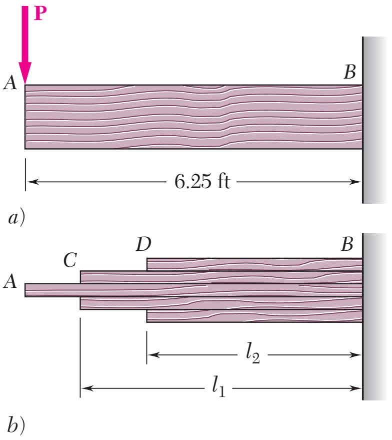


Figura P5.132

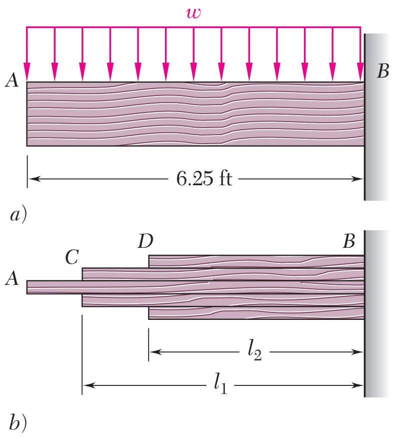


Figura *P5.133*

5.134 y 5.135 Un diseño preliminar basado en el uso de una viga prismática de madera simplemente apoyada indicó que se requeriría una viga con una sección transversal rectangular de 50 mm de ancho y 200 mm de espesor para soportar con seguridad la carga que se muestra en la parte *a*) de la figura. Después se decidió reemplazar dicha viga con una viga ensamblada obtenida al pegar, como se observa en la parte *b*) de la figura, cuatro piezas de la misma madera que la viga original y de sección transversal de 50 × 50 mm. Determine la longitud *l* de las dos piezas exteriores de madera que darán el mismo factor de seguridad que el diseño original.

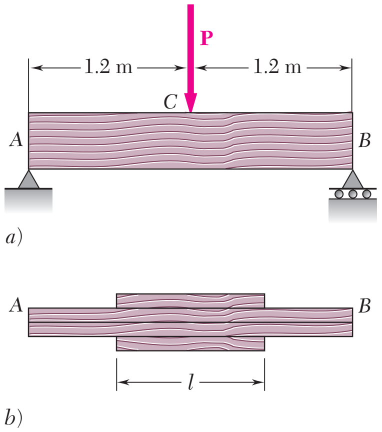


Figura P5.134

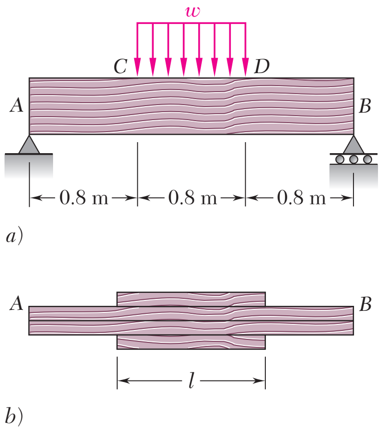


Figura P5.135

***5.136* y 5.137** Un elemento de máquina hecho de aluminio colado, con la forma de un sólido de revolución de diámetro variable d, está diseñado para soportar la carga que se muestra en la figura. Si se sabe que el elemento de máquina debe ser de resistencia constante, exprese d en términos de x, L y d_0.

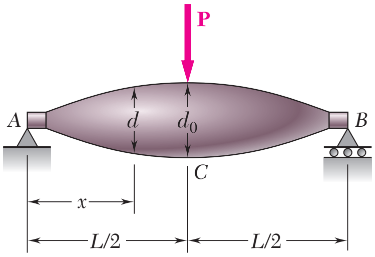


Figura *P5.136*

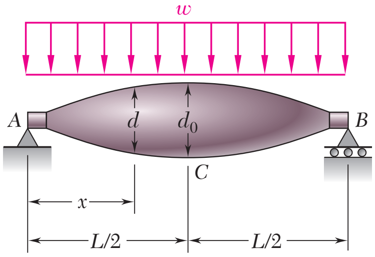


Figura P5.137

5.138 Una viga en voladizo AB, que consiste en una placa de acero de espesor uniforme h y ancho variable b, debe soportar una carga concentrada **P** en el punto A. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese b en términos de x, L y b_0. *b*) Determine el mínimo valor permisible de h si $L = 300$ mm, $b_0 = 375$ mm, $P = 14.4$ kN y $\sigma_{\text{perm}} = 160$ MPa.

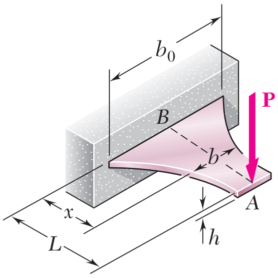


Figura P5.138

5.139 Una fuerza transversal **P** se aplica como se muestra en la figura en el extremo A del elemento cónico ahusado AB. Si d_0 es el diámetro del elemento en A, muestre que el máximo esfuerzo normal ocurre en el punto H, el cual está contenido en una sección transversal de diámetro $d = 1.5\, d_0$.

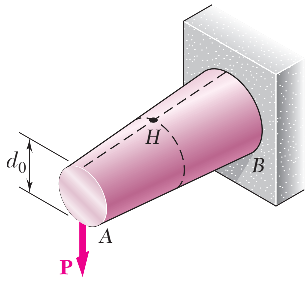


Figura P5.139

5.140 Si supone que la longitud y el ancho de las placas utilizadas en la viga del problema modelo 5.12 son, respectivamente, $l = 4$ m y $b = 285$ mm, y recuerda que el espesor de cada placa es de 16 mm, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de D.

5.141 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{1}{2}$ in., se sueldan a una viga W27 × 84 como se muestra en la figura. Si $l = 10$ ft y $b = 10.5$ in., determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de *D*.

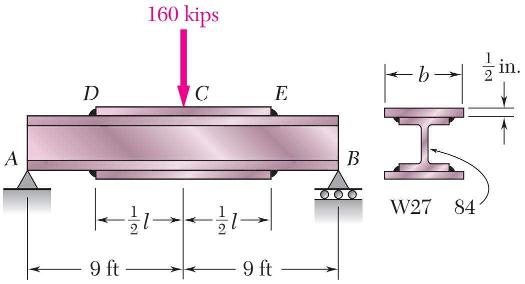


Figura *P5.141* y P5.142

5.142 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{1}{2}$ in., se sueldan a una viga W27 × 84 como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido para *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.143 Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 150$ MPa, determine la máxima carga concentrada **P** que puede aplicarse en el extremo *E* de la viga que se muestra en la figura.

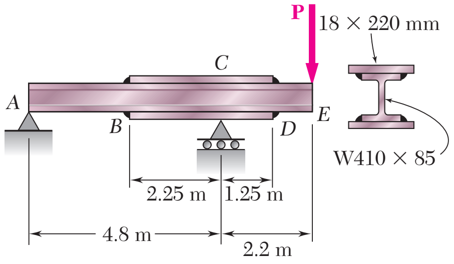


Figura P5.143

5.144 Dos placas, cada una de 7.5 mm de espesor, se sueldan a una viga W460 × 74 como se muestra en la figura. Si $l = 5$ m y $b = 200$ mm, determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de *D*.

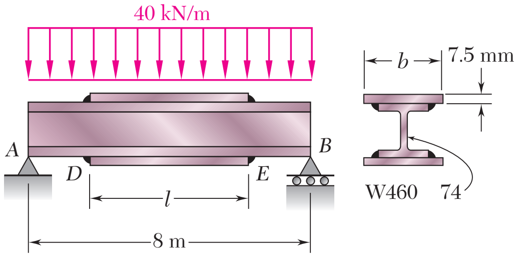


Figura P5.144 y P5.145

5.145 Dos placas, cada una de 7.5 mm de espesor, se sueldan a una viga W460 × 74 como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 150$ MPa tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido para *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.146 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{5}{8}$ in., se sueldan a una viga W30 $\times$ 99 como se muestra en la figura. Si se sabe que $l = 9$ ft y $b = 12$ in., determine el esfuerzo normal máximo sobre una sección transversal *a*) a través del centro de la viga, *b*) justo a la izquierda de *D*.

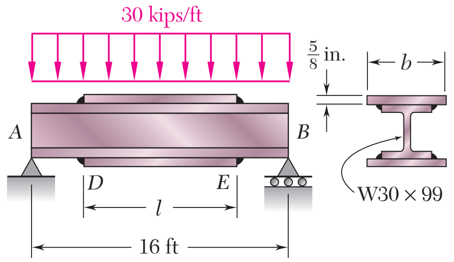


Figura P5.146 y *P5.147*

5.147 Dos placas, cada una con un espesor de $\frac{5}{8}$ in., se sueldan a una viga W30 $\times$ 99 como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi tanto para la viga como para las placas, determine el valor requerido para *a*) la longitud de las placas, *b*) el ancho de las placas.

5.148 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la máxima carga distribuida *w* que puede aplicarse, si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi.

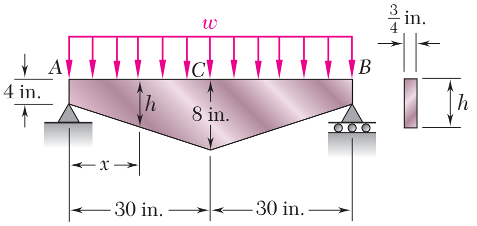


Figura P5.148

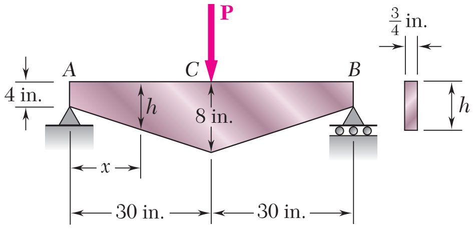


Figura P5.149

5.149 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, determine *a*) la sección transversal en donde ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la máxima carga concentrada **P** que puede aplicarse, si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi.

5.150 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) la máxima carga distribuida *w* que puede aplicarse, si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 140$ MPa.

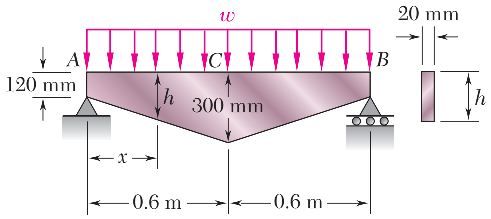


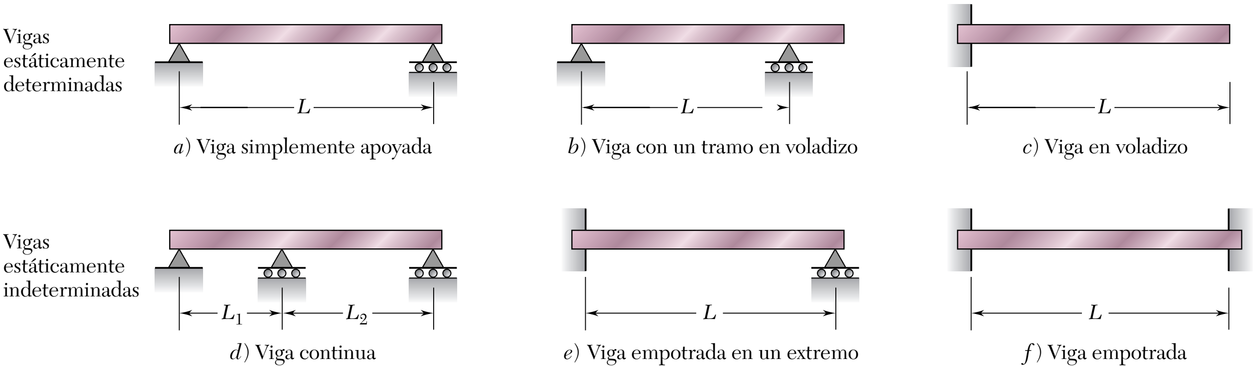
Figura *P5.150* y P5.151

5.151 Para la viga ahusada que se muestra en la figura, y sabiendo que $w = 160$ kN/m, determine *a*) la sección transversal en la que ocurre el esfuerzo normal máximo, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo normal.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

Consideraciones para el diseño de vigas prismáticas

Este capítulo se dedicó al análisis y diseño de vigas sometidas a cargas transversales. Tales cargas pueden consistir en cargas concentradas o en cargas distribuidas y las vigas mismas se clasifican de acuerdo a la manera en que están apoyadas (figura 5.3). Solamente se consideraron vigas *estáticamente determinadas* en este capítulo; el análisis de vigas estáticamente indeterminadas se postergará hasta el capítulo 9.


Vigas estáticamente determinadas
L
L
L
Vigas estáticamente indeterminadas
L_1
L_2
L
L

a) Viga simplemente apoyada
b) Viga con un tramo en voladizo
c) Viga en voladizo
d) Viga continua
e) Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro extremo
f) Viga empotrada

Figura 5.3

Esfuerzos normales debidos a la flexión

A pesar de que las cargas transversales causan tanto flexión como cortante en una viga, los esfuerzos normales causados por la flexión son el criterio dominante en el diseño de una viga por resistencia [véase sección 5.1]. Por tanto, este capítulo trató únicamente con la determinación de los esfuerzos normales en una viga, mientras que el efecto de los esfuerzos de cortante se examina en el siguiente.

Se recordó, de la sección 4.4, la fórmula de flexión para la determinación del valor máximo σ_m del esfuerzo normal en una sección dada de la viga,

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \tag{5.1}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del par flector **M** y c es la máxima distancia desde la superficie neutra (figura 4.13). También se recordó de

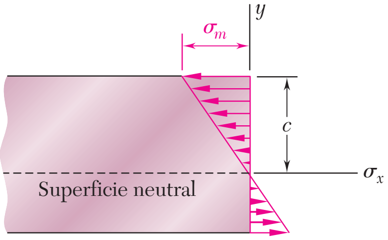


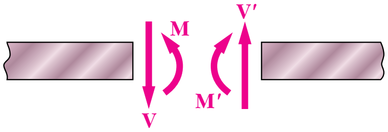
Figura 4.13

la sección 4.4 que, al introducir el módulo de sección elástico $S = I/c$ de la viga, el valor máximo σ_m del esfuerzo normal en la sección se expresa como

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} \tag{5.3}$$

Diagramas de cortante y de momento flector

Se sigue de la ecuación (5.1) que el esfuerzo normal máximo se produce en la sección donde $|M|$ sea máximo, en el punto más lejano del eje neutro. La determinación del máximo valor de $|M|$ y de la sección crítica de la viga en la que ocurre se simplifica mucho si se dibuja un *diagrama de cortante* y un *diagrama de momento flector*. Estos diagramas representan, respectivamente, la variación del cortante y del momento flector a lo largo de la viga y se obtuvieron determinando los valores de V y de M en puntos selectos de la viga [véase sección 5.2]. Estos valores se encontraron efectuando un corte a través del punto donde debían ser determinados y dibujando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de las porciones de la viga obtenidas de esta manera. Para evitar cualquier confusión con respecto al sentido de la fuerza cortante **V** y del momento flector **M** (que actúan en sentidos opuestos en las dos porciones de la viga), se siguió la convención de signos adoptada anteriormente en el texto y que se ilustra en la figura 5.7*a* [véase ejemplos 5.01 y 5.02, problemas modelo 5.1 y 5.2].



a) Fuerzas internas
(cortante positivo y momento flector positivo)

Figura 5.7*a*

Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector

La construcción de los diagramas de cortante y de momento flector se facilita si se toman en cuenta las siguientes relaciones [véase sección 5.3]. Denotando por w la carga distribuida por unidad de longitud (supuestamente positiva si se dirige hacia abajo), se escribió

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{dM}{dx} = V \tag{5.5, 5.7}$$

o, en forma integrada,

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{5.6$'$}$$
$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de corte entre } C \text{ y } D \tag{5.8$'$}$$

La ecuación (5.6′) hace posible dibujar el diagrama de cortante de una viga de la curva que representa la carga distribuida en dicha viga y el valor de V en un extremo de la viga. De manera análoga, la ecuación (5.8′) permite dibujar el diagrama de momento flector del diagrama de cortante y del valor de M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de cortante y los pares concentrados en el diagrama de momento flector, ninguno de los cuales se considera por estas ecuaciones [véase problemas modelo 5.3 y 5.6]. Finalmente, se advirtió, de la ecuación (5.7), que los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo son también los puntos donde el corte es cero [véase problema modelo 5.4].

Diseño de vigas prismáticas

El procedimiento apropiado para el diseño de una viga prismática se describió en la sección 5.4 y se resume aquí:

Habiendo determinado σ_{perm} para el material empleado y suponiendo que el diseño de la viga se controla por el esfuerzo normal máximo en la viga, se calcula el mínimo valor permisible del módulo de sección:

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.9}$$

Para una viga de madera de sección transversal rectangular, $S = \frac{1}{6}bh^2$, donde b es el ancho de la viga y h su espesor. Las dimensiones de la sección, por lo tanto, deben seleccionarse de tal manera que $\frac{1}{6}bh^2 \geq S_{\text{mín}}$.

Para una viga de acero laminado, consulte la tabla apropiada en el apéndice C. De los perfiles disponibles, considere sólo aquellos cuyo módulo de sección $S \geq S_{\text{mín}}$ y seleccione, de este grupo, la sección con el mínimo peso por unidad de longitud. Ésta será la más económica de las secciones para las que $S \geq S_{\text{mín}}$.

Funciones de singularidad

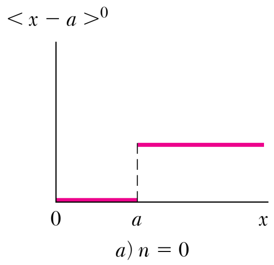
En la sección 5.5 se explicó un método alterno para la determinación de los máximos valores para el cortante y para el momento flector basado en el uso de las *funciones de singularidad* $\langle x - a\rangle^n$. Por definición, y para $n \geq 0$, se tiene

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \tag{5.14}$$

Se señaló que cuando la cantidad entre los corchetes sea positiva o cero, los corchetes deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios; en cambio, cuando la cantidad sea negativa, los corchetes mismos serán iguales a cero. También se estudió que las funciones de singularidad pueden integrarse y derivarse como binomios ordinarios. Por último, se observó que la función de singularidad correspondiente a $n = 0$ es discontinua en $x = a$ (figura 5.18*a*). Esta función se denominó como la *función escalón*. Se escribió

Función escalón

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 \text{ cuando } x \geq a \\ 0 \text{ cuando } x < a \end{cases} \tag{5.15}$$



a) $n = 0$

Figura 5.18*a*

Uso de las funciones de singularidad para expresar el corte y el momento flector

El uso de las funciones de singularidad hace posible representar el cortante o el momento flector en una viga por una expresión única, válida en cualquier punto de la viga. Por ejemplo, la contribución al cortante de la carga concentrada **P** aplicada en el punto medio C de una viga simplemente apoyada (figura 5.8) puede representarse por $-P\langle x - \frac{1}{2}L\rangle^0$, ya que esta expresión es igual a cero a la izquierda de C, y a $-P$ a la derecha de C. Sumando la contribución de la reacción $R_A = \frac{1}{2}P$ en A, se expresa el cortante en cualquier punto de la viga como

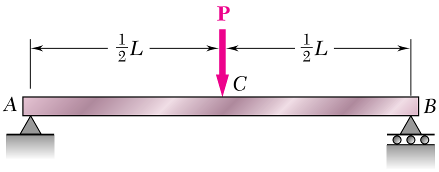


Figura 5.8

$$V(x) = \tfrac{1}{2}P - P\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^0$$

El momento flector se obtiene integrando esta expresión:

$$M(x) = \tfrac{1}{2}Px - P\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^1$$

Cargas abiertas equivalentes

Las funciones de singularidad que representan, respectivamente, la carga, el corte y el momento flector correspondientes a varias cargas básicas se presentan en la figura 5.19 en la página 346. Se explicó que una carga distribuida que no se extiende hasta el extremo derecho de la viga, o que es discontinua, deberá reemplazarse por una combinación equivalente de cargas abiertas. Por ejemplo, una carga uniformemente distribuida que se extienda desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 5.20) deberá expresarse como

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 - w_0\langle x - b\rangle^0$$

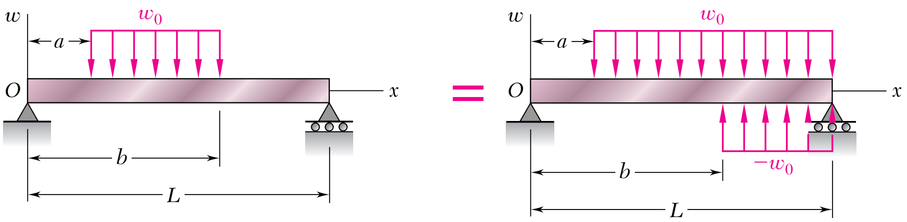


Figura 5.20

La contribución de esta carga al cortante y al momento flector puede obtenerse mediante dos integraciones sucesivas. Sin embargo, deberá tenerse cuidado de incluir también en la expresión para $V(x)$ la contribución de las cargas concentradas y de las reacciones, y de incluir en la expresión para $M(x)$ la contribución de los pares concentrados [véase ejemplos 5.05 y 5.06, y problemas modelo 5.9 y 5.10]. También se observó que las funciones de singularidad se adaptan bien para usarse en computadoras.

Vigas no prismáticas

Vigas de resistencia constante

Hasta ese punto el estudio se habrá concentrado en las vigas prismáticas, es decir, vigas con sección transversal uniforme. Por ello, en la sección 5.6 se inició el análisis del diseño de vigas no prismáticas, es decir, vigas con sección transversal variable. Se vio que al seleccionar la forma y el tamaño de la sección transversal de manera que su módulo de sección elástico $S = I/c$ variara a lo largo de la viga de la misma manera que el momento flector, pueden diseñarse vigas para las que σ_m en cada sección sea igual a σ_{perm}. En tales vigas, llamadas *vigas de resistencia constante*, el material rinde mejor que en las vigas prismáticas. Su módulo de sección en cualquier sección a lo largo de la viga se definió por la relación

$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{perm}}} \tag{5.18}$$

PROBLEMAS DE REPASO

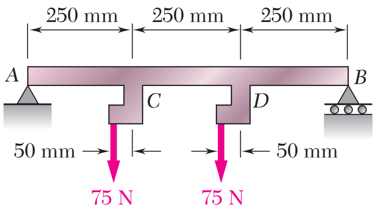

250 mm
250 mm
250 mm
A
B
C
D
50 mm
50 mm
75 N
75 N

Figura P5.152

5.152 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del cortante, *b*) del momento flector.

5.153 Determine *a*) la magnitud de la fuerza ascendente **P** para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es lo más pequeño posible, *b*) el esfuerzo normal máximo correspondiente debido a la flexión (*Sugerencia*: Vea la sugerencia del problema 5.27.)

5.154 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor absoluto *a*) del cortante, *b*) del momento flector.

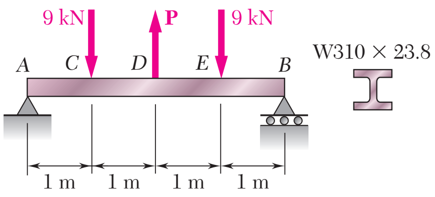

9 kN
P
9 kN
A
C
D
E
B
W310 × 23.8
1 m
1 m
1 m
1 m

Figura *P5.153*

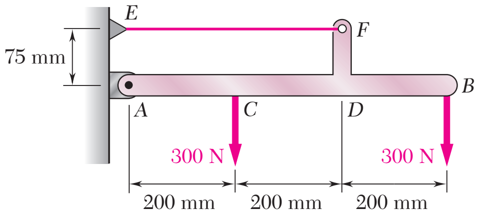

E
F
75 mm
B
A
C
D
300 N
300 N
200 mm
200 mm
200 mm

Figura P5.154

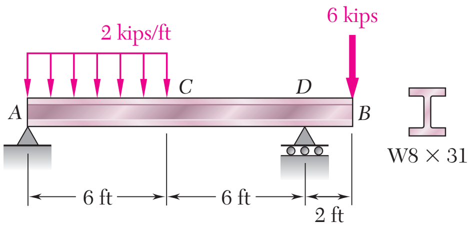

6 kips
2 kips/ft
C
D
A
B
W8 × 31
6 ft
6 ft
2 ft

Figura P5.155

5.155 Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo esfuerzo normal debido a la flexión.

5.156 La viga *AB*, de longitud *L* y sección transversal cuadrada con lado *a*, está apoyada en un pivote en *C* y soporta las cargas que se muestran en la figura. *a*) Verifique que la viga esté en equilibrio. *b*) Muestre que el esfuerzo normal máximo debido a la flexión ocurre en *C* y que es igual a $w_0L^2/(1.5a)^3$.

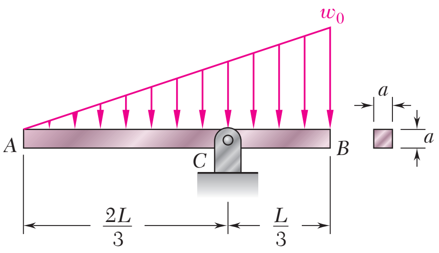

w_0
a
a
A
B
C
$\frac{2L}{3}$
$\frac{L}{3}$

Figura P5.156

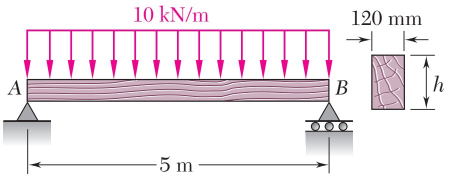

10 kN/m
120 mm
A
B
h
5 m

Figura *P5.157*

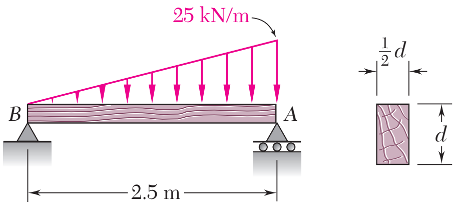

25 kN/m
$\frac{1}{2}d$
B
A
d
2.5 m

Figura P5.158

***5.157* y 5.158** Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, diseñe la sección transversal de la viga, si se sabe que el grado de madera utilizado tiene un esfuerzo normal permisible de 12 MPa.

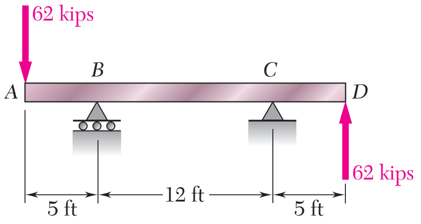

62 kips
A
B
C
D
62 kips
5 ft
12 ft
5 ft

Figura *P5.159*

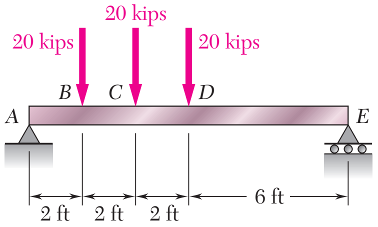

20 kips
20 kips
20 kips
A
B
C
D
E
2 ft
2 ft
2 ft
6 ft

Figura P5.161

5.159 Si se sabe que el esfuerzo permisible para el acero utilizado es de 24 ksi, seleccione la viga de patín ancho más económica para soportar las cargas que se muestran en la figura.

5.160 Determine el máximo valor permisible de **P** para la viga y las cargas que se muestran en la figura, si se sabe que el esfuerzo normal permisible es de +80 MPa en tensión y de −140 MPa en compresión.

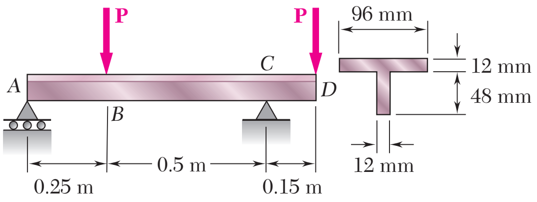

P
P
A
B
C
D
0.25 m
0.5 m
0.15 m
96 mm
12 mm
48 mm
12 mm

Figura P5.160

5.161 *a*) Utilice funciones de singularidad para escribir las ecuaciones que definen el cortante y el momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura. *b*) Determine el máximo valor del momento flector en la viga.

5.162 La viga AB, que consiste en una placa de aluminio colado de espesor uniforme b y longitud L, debe soportar la carga que se muestra en la figura. *a*) Si la viga debe ser de resistencia constante, exprese h en términos de x, L y h_0 para la porción AC de la viga. *b*) Determine la máxima carga permisible si $L = 32$ in., $h_0 = 8$ in., $b = 1$ in. y $\sigma_{\text{perm}} = 10$ ksi.

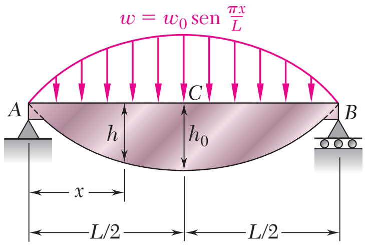

$w = w_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$
A
C
B
h
h_0
x
L/2
L/2

Figura *P5.162*

5.163 Una viga en voladizo AB, que consiste en una placa de acero de espesor uniforme h y ancho variable b, debe soportar una carga distribuida w a lo largo de su línea central AB. *a*) Si se sabe que la viga debe ser de resistencia constante, exprese b en términos de x, L y b_0. *b*) Determine el máximo valor permisible de w si $L = 15$ in., $b_0 = 8$ in., $h = 0.75$ in. y $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi.

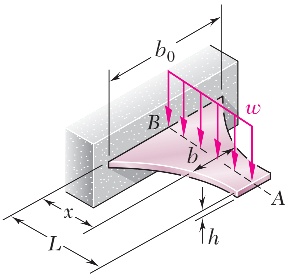


Figura P5.163

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora.

5.C1 Varias cargas concentradas P_i ($i = 1, 2, ..., n$) pueden aplicarse a una viga como se indica en la figura. Escriba un programa para computadora que permita calcular el cortante, el momento flector y el esfuerzo normal en cualquier punto de la viga para una carga dada de la viga y un valor dado de su módulo de sección. Utilice este programa para resolver los problemas 5.18, 5.21 y 5.25. (*Sugerencia*: Se producirán valores máximos en un apoyo o bajo una carga.)

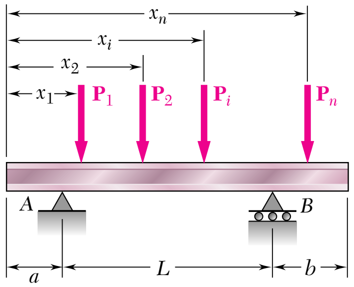


Figura P5.C1

5.C2 Una viga de madera se diseñará para soportar una carga distribuida y hasta dos cargas concentradas como se muestra en la figura. Una de las dimensiones de su sección transversal rectangular uniforme ya se ha especificado y la otra debe determinarse de tal manera que el esfuerzo normal máximo en la viga no exceda un valor permisible dado σ_{perm}. Escriba un programa de cómputo para calcular a intervalos ΔL dados el corte, el momento flector y el mínimo valor aceptable de la dimensión desconocida. Aplique este programa para resolver los siguientes problemas, usando los intervalos ΔL indicados: *a*) problema 5.65 ($\Delta L = 0.1$ m), *b*) problema 5.69 ($\Delta L = 0.3$ m), *c*) problema 5.70 ($\Delta L = 0.2$ m).

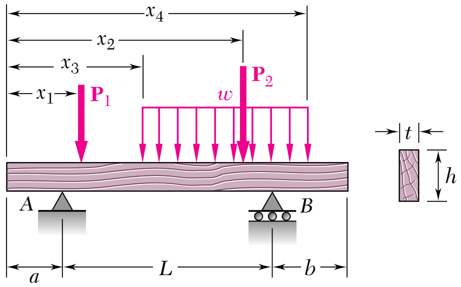


Figura P5.C2

5.C3 Dos placas, cada una de espesor t, serán soldadas a una viga de patín ancho de longitud L, que debe soportar una carga uniformemente distribuida w. Denotando por σ_{perm} el esfuerzo normal permisible en la viga y en la placa, por d el espesor de la viga y por I_b y S_b, respectivamente, el momento de inercia y el módulo de sección de la sección transversal de la viga sin reforzar alrededor de un eje centroidal horizontal, escriba un programa de cómputo que calcule el valor requerido de *a*) la longitud a de las placas, *b*) el ancho b de las placas. Utilice este programa para resolver el problema 5.145.

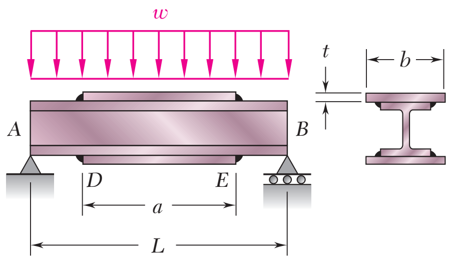


Figura P5.C3

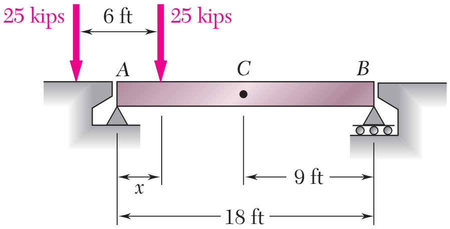


Figura P5.C4

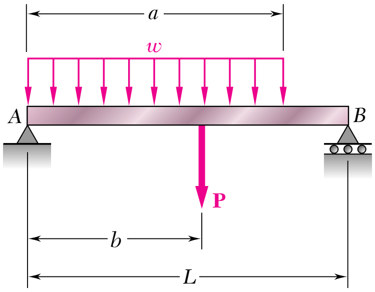


Figura P5.C5

5.C4 Dos cargas de 25 kips se mantienen separadas 6 ft al moverse lentamente a través de la viga *AB* de 18 ft de largo. Escriba un programa de computadora y utilícelo para calcular el momento flector bajo cada carga y en el punto medio *C* de la viga para valores de *x* de 0 a 24 ft a intervalos $\Delta x = 1.5$ ft.

5.C5 Escriba un programa para computadora que grafique los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y la carga mostrada en la figura. Aplique este programa con un intervalo de graficación $\Delta L = 0.2$ ft a la viga y carga del *a*) problema 5.72, *b*) problema 5.115.

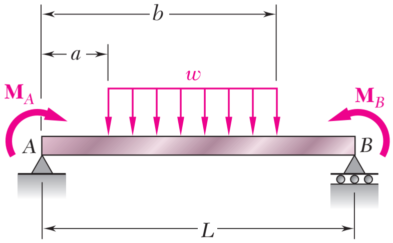


Figura P5.C6

5.C6 Escriba un programa para computadora que grafique los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y la carga mostradas en la figura. Aplique este programa con un intervalo de graficación $\Delta L = 0.025$ m a la viga y la carga del problema 5.112.

CAPÍTULO

6

Esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada

Una cubierta de concreto reforzada será unida a cada una de las secciones de acero que se muestra para formar un puente con largueros de caja compuesta. En este capítulo se determinarán los esfuerzos cortantes en varios tipos de vigas y largueros.

6.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 5.1 se vio que una carga transversal aplicada a una viga resultará en esfuerzos normales y cortantes en cualquier sección transversal dada de la viga. Los esfuerzos normales se crean por el momento flector **M** en dicha sección y los esfuerzos cortantes por el cortante **V**. Como el criterio dominante en el diseño de una viga por resistencia es el máximo valor del esfuerzo normal en la viga, en el capítulo 5 el análisis se limitó a la determinación de los esfuerzos normales. Los esfuerzos cortantes, sin embargo, son importantes, particularmente en el diseño de vigas cortas y gruesas, y su estudio será el tema de la primera parte de este capítulo.

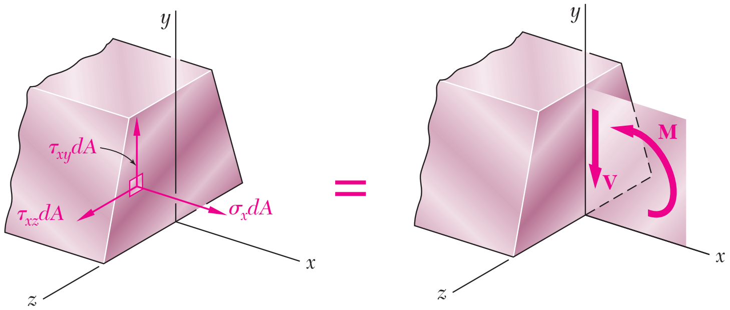


Figura 6.1

La figura 6.1 expresa gráficamente que las fuerzas elementales normales y de cortante ejercidas en una sección transversal dada de una viga prismática con un plano vertical de simetría son equivalentes al par flector **M** y a la fuerza cortante **V**. Pueden escribirse seis ecuaciones para expresar este hecho. Tres de estas ecuaciones involucran sólo a las fuerzas normales $\sigma_x\, dA$ y ya han sido analizadas en la sección 4.2; son las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), que expresan que la suma de las fuerzas normales es cero y que la suma de sus momentos alrededor de los ejes y y z son iguales a cero y a M, respectivamente. Ahora pueden escribirse tres ecuaciones más que involucran las fuerzas de cortante $\tau_{xy}\, dA$ y $\tau_{xz}\, dA$. Una de ellas expresa que la suma de los momentos de las fuerzas cortantes alrededor del eje x es cero y puede descartarse, por trivial, en vista de la simetría de la viga con respecto al plano xy. Las otras dos involucran las componentes y y z de las fuerzas elementales y son

$$y \text{ componentes:} \qquad \int \tau_{xy}\, dA = -V \tag{6.1}$$

$$z \text{ componentes:} \qquad \int \tau_{xz}\, dA = 0 \tag{6.2}$$

La primera de estas ecuaciones muestra que los esfuerzos cortantes verticales deben existir en cualquier sección transversal de la viga sometida a carga transversal. La segunda ecuación indica que el esfuerzo cortante medio horizontal es cero en cualquier sección. No obstante, como se verá luego, esto no significa que el esfuerzo τ_{xz} sea necesariamente cero en todas partes.

Considere ahora un pequeño elemento cúbico localizado en el plano vertical de simetría de la viga (donde se sabe que τ_{xz} debe ser nulo) y examine los esfuerzos ejercidos sobre sus caras (figura 6.2). Como se acaba de ver, sobre cada una de las caras perpendiculares al eje x se ejercen un esfuerzo

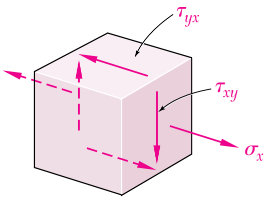


Figura 6.2

normal σ_x y uno cortante τ_{xy}. Pero se sabe que por lo estudiado en el capítulo 1, cuando se ejercen esfuerzos cortantes τ_{xy} sobre la cara vertical de un elemento, se deben ejercer esfuerzos iguales sobre las caras horizontales del mismo elemento. Se concluye así que deben existir esfuerzos cortantes longitudinales en todo elemento sometido a carga transversal. Esto puede verificarse considerando una viga en voladizo hecha de tablas separadas que se sujetan en un extremo (figura 6.3*a*). Cuando se aplica una carga transversal **P** al extremo de esta viga compuesta, se observa que las tablas resbalan unas con respecto a las otras (figura 6.3*b*). Por otra parte, si la misma viga compuesta se somete a un par de flexión **M** en su extremo libre (figura 6.3*c*), las diversas tablas se flexionarán y formarán arcos de círculos concéntricos y no resbalarán con respecto a cada una de las otras, verificando así que no ocurre esfuerzo cortante en una viga sujeta a flexión pura (véase sección 4.3).

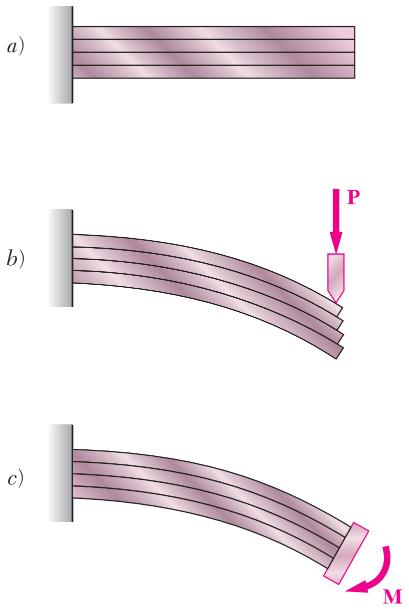


Figura 6.3

Aunque este deslizamiento no se produce realmente cuando se aplica una fuerza transversal **P** a una viga hecha de un material homogéneo y cohesivo como el acero, la tendencia al deslizamiento existe, lo cual muestra que los esfuerzos se presentan tanto en los planos longitudinales y verticales. En el caso de vigas de madera, cuya resistencia al corte es más débil entre las fibras, la falla debida al corte ocurrirá a lo largo de un plano longitudinal en lugar de en un plano transversal (figura 6.4).

En la sección 6.2, un elemento de viga de longitud Δx limitado por dos planos transversales y uno horizontal será considerado y la fuerza de corte $\Delta \mathbf{H}$ ejercida en su cara horizontal se determinará, así como el cortante por unidad de longitud, q, también conocido como *flujo cortante*. Una fórmula para el esfuerzo de cortante en una viga con un plano vertical de simetría se deducirá en la sección 6.3 y se utilizará en la sección 6.4 para determinar los esfuerzos de cortante en tipos comunes de vigas. La distribución de esfuerzos en una viga rectangular angosta se estudiará con mayor detalle en la sección 6.5.

La deducción dada en la sección 6.2 se extenderá en la sección 6.6 para cubrir el caso de un elemento de viga limitado por dos planos transversales y una superficie curva. Esto permitirá determinar, en la sección 6.7, los esfuerzos cortantes en cualquier punto de un elemento simétrico de pared delgada, como las bridas de las vigas de patín ancho y las vigas de caja. El efecto de las deformaciones plásticas sobre la magnitud y la distribución de los esfuerzos cortantes se analizará en la sección 6.8.

En la última sección del capítulo (sección 6.9), se considerará la carga asimétrica de elementos de pared delgada y se introducirá el concepto de *centro de cortante*. Se aprenderá, entonces, a determinar la distribución de esfuerzos de cortante en dichos elementos.

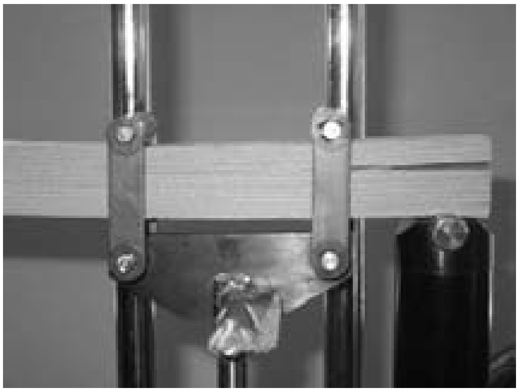


Figura 6.4

6.2 CORTANTE EN LA CARA HORIZONTAL DE UN ELEMENTO DE UNA VIGA

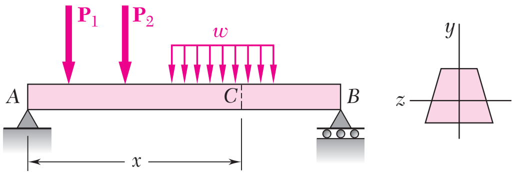


Figura 6.5

Considere una viga prismática AB con un plano vertical de simetría que soporta varias cargas concentradas y distribuidas (figura 6.5). A una distancia x del extremo A se desprende de la viga un elemento $CDD'C'$ con longitud Δx que se extiende a través del ancho de la viga desde la superficie superior de la viga hasta un plano horizontal localizado a una distancia y_1 del eje neutro (figura 6.6). Las fuerzas ejercidas sobre este elemento consisten de las fuerzas cortantes verticales $\mathbf{V}'_C$ y $\mathbf{V}'_D$, una fuerza cortante horizontal $\Delta\mathbf{H}$ ejercida sobre la cara inferior del elemento, las fuerzas normales elementales horizontales $\sigma_C\, dA$ y $\sigma_D\, dA$ y posiblemente una carga $w\,\Delta x$ (figura 6.7). Se escribe la ecuación de equilibrio

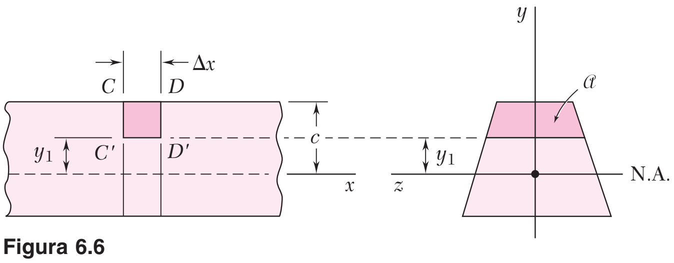


Figura 6.6

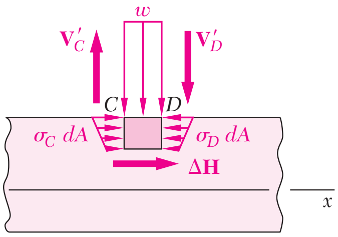


Figura 6.7

$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{\mathcal{A}} (\sigma_D - \sigma_C)\, dA = 0$$

donde la integral se extiende por el área sombreada $\mathcal{A}$ de la sección localizada sobre la línea $y = y_1$. Despejando ΔH de esta ecuación y utilizando la ecuación (5.2) de la sección 5.1, $\sigma = My/I$, para expresar los esfuerzos normales en términos de los momentos flectores en C y D, se tiene

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_{\mathcal{A}} y\, dA \qquad (6.3)$$

La integral de la ecuación (6.3) representa el *primer momento* con respecto al eje neutro de la porción $\mathcal{A}$ de la sección transversal de la viga que se localiza por encima de la línea $y = y_1$ y se denotará por Q. Por otra parte, recordando la ecuación (5.7) de la sección 5.5, se puede expresar el incremento $M_D - M_C$ del momento flector como

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx)\,\Delta x = V\,\Delta x$$

Al sustituir en la ecuación (6.3), se obtiene la siguiente expresión para el corte horizontal ejercido sobre el elemento de viga

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

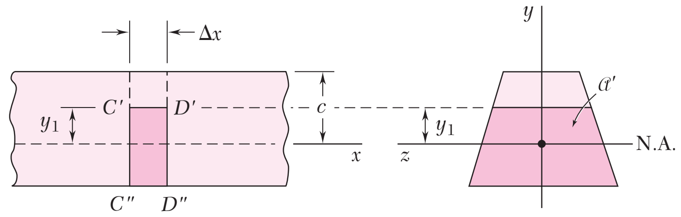


Figura 6.8

El mismo resultado se habría obtenido si se hubiera utilizado como cuerpo libre el elemento inferior $C'D'D''C''$, en lugar del elemento superior $CDD'C'$ (figura 6.8), ya que las fuerzas cortantes $\Delta\mathbf{H}$ y $\Delta\mathbf{H}'$ ejercidas por los dos elementos uno sobre el otro son iguales y opuestas. Esto nos lleva a observar que el primer momento Q de la porción $\mathcal{A}'$ de la sección transversal localizada bajo la línea $y = y_1$ (figura 6.8) es igual en magnitud y opuesto en sentido al primer momento de la porción $\mathcal{A}$ localizada por encima de dicha línea (figura 6.6). De hecho, la suma de estos momentos es igual al momento del área de toda la sección transversal con respecto a su eje centroidal y, por lo tanto, debe ser cero. Esta propiedad puede en ocasiones utilizarse para simplificar el cálculo de Q. Se advierte también que Q es máximo para $y_1 = 0$, ya que los elementos de la sección transversal localizada por encima del eje neutro contribuyen positivamente a la integral (5.5) que define a Q, mientras que los elementos localizados por debajo de dicho eje contribuyen negativamente.

El *corte horizontal por unidad de longitud*, que se denotará por la letra q, se obtiene de dividir ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

Recuerde que Q es el primer momento con respecto al eje neutro de la porción de la sección transversal localizada bien por encima o bien por debajo del punto en el que q se calcula, y que I es el momento centroidal de inercia de *toda* el área de la sección transversal. Por una razón que se aclarará más adelante (sección 6.7), el corte horizontal por unidad de longitud q también se conoce como *flujo cortante*.

EJEMPLO 6.01

Una viga está hecha de tres planchones de 20 × 100 mm de sección transversal, aseguradas con clavos (figura 6.9). Si entre los clavos hay una separación de 25 mm y la fuerza cortante en la viga es $V = 500$ N, determine la fuerza cortante en cada clavo.

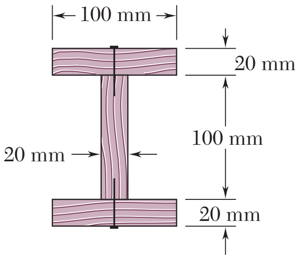
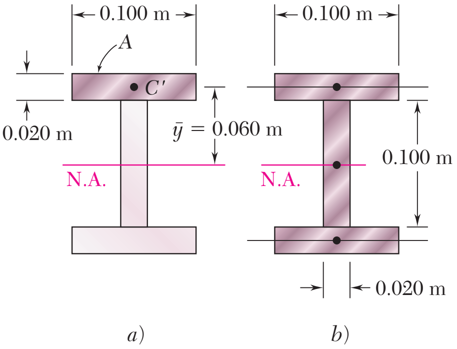


Figura 6.9

Determine primero la fuerza horizontal por unidad de longitud, q, ejercida sobre la cara inferior del planchón superior. Utilice la ecuación (6.5), donde Q representa el primer momento con respecto al eje neutro del área sombreada A de la figura 6.10*a*, y donde I es el momento de inercia con respecto al mismo eje de toda la sección transversal (figura 6.10*b*). Recordando que el primer momento de un área con respecto a un eje dado es igual al producto del área por la distancia de su centroide al eje,[†] se tiene

$$
\begin{aligned}
Q &= A\bar{y} = (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m}) \\
&= 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\
I &= \tfrac{1}{12}(0.020 \text{ m})(0.100 \text{ m})^3 \\
&\quad + 2[\tfrac{1}{12}(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 \\
&\quad + (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m})^2] \\
&= 1.667 \times 10^{-6} + 2(0.0667 + 7.2)10^{-6} \\
&= 16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4
\end{aligned}
$$



a) *b*)

Figura 6.10

Sustituyendo en la ecuación (6.5), se escribe

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500 \text{ N})(120 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3\,704 \text{ N/m}$$

Como la separación entre los clavos es de 25 mm, la fuerza cortante en cada clavo es

$$F = (0.025 \text{ m})q = (0.025 \text{ m})(3\,704 \text{ N/m}) = 92.6 \text{ N}$$

6.3 DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS CORTANTES EN UNA VIGA

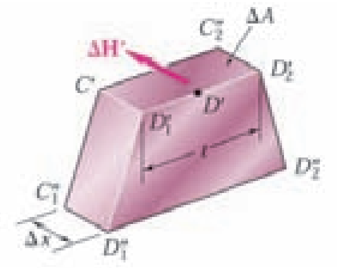


Figura 6.11

Considere de nuevo una viga con un plano vertical de simetría, sometida a varias cargas concentradas o distribuidas que se aplican sobre ese plano. Se vio en la sección precedente que, si por medio de dos cortes verticales y uno horizontal, se desprende de la viga un elemento de longitud Δx (figura 6.11), la magnitud ΔH de la fuerza cortante ejercida sobre la cara horizontal del elemento puede obtenerse de la ecuación (6.4). El *esfuerzo cortante promedio* τ_{prom} en dicha cara del elemento se obtiene dividiendo ΔH entre el área ΔA de la cara. Observando que $\Delta A = t\,\Delta x$, donde t es el espesor del elemento en el corte, se escribe

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I}\,\frac{\Delta x}{t\,\Delta x}$$

o

$$\boxed{\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It}} \tag{6.6}$$

[†] Véase apéndice A.

Se nota que, como los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} ejercidos respectivamente sobre un plano transversal y en un plano horizontal a través de D' son iguales, la expresión obtenida representa también el valor promedio de τ_{xy} en la línea $D'_1\,D'_2$ (figura 6.12).

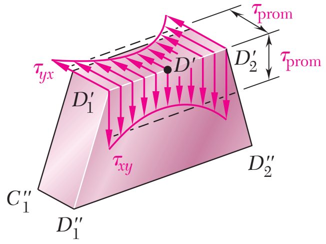


Figura 6.12

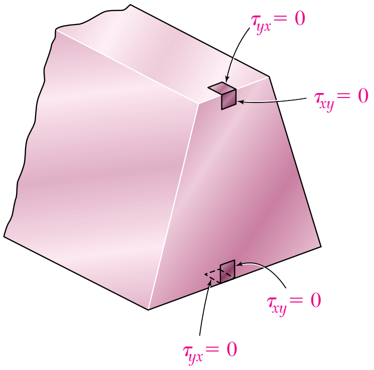


Figura 6.13

Observe que $\tau_{yx} = 0$ en las caras superior e inferior de la viga, puesto que no se ejercen fuerzas sobre estas caras. Se sigue que $\tau_{xy} = 0$ a lo largo de los bordes superior e inferior de la sección transversal (figura 6.13). También se nota que, aunque Q es máximo para $y = 0$ (véase sección 6.2), no puede concluirse que τ_{prom} será máximo a lo largo del eje neutro, ya que depende tanto del ancho t de la sección como de Q.

Siempre que el ancho de la viga permanezca pequeño comparado con la altura, el esfuerzo cortante sólo varía suavemente a lo largo de la línea $D'_1\,D'_2$ (figura 6.12), y puede usarse la ecuación (6.6) para calcular τ_{xy} en cualquier punto a lo largo de $D'_1\,D'_2$. En realidad τ_{xy} es mayor en los puntos D'_1 y D'_2 que en D', pero la teoría de la elasticidad muestra[†] que, para una viga de sección rectangular, de ancho b y altura h, y siempre que $b \leq h/4$, el valor del esfuerzo cortante en los puntos C_1 y C_2 (figura 6.14) no excede más del 0.8% el valor promedio del esfuerzo calculado a lo largo del eje neutro.[‡]

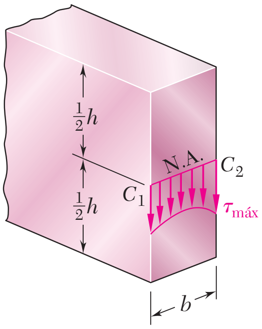


Figura 6.14

6.4 ESFUERZOS CORTANTES τ_{xy} EN TIPOS COMUNES DE VIGAS

En la sección anterior se vio que, para una *viga rectangular delgada*, es decir, para una viga de sección rectangular de ancho b y altura h con $b \leq \frac{1}{4}h$, la variación del esfuerzo cortante τ_{xy} a través del ancho de la viga es menor que el 0.8% de τ_{prom}. Puede, entonces, usarse la ecuación (6.6) en aplicaciones prácticas para determinar el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de una viga rectangular delgada y escribir

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \tag{6.7}$$

donde t es igual al ancho b de la viga y Q es el primer momento del área sombreada A con respecto al eje neutro (figura 6.15).

[†] Véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Nueva York, 3a. ed., 1970, sec. 124.

[‡] Por otra parte, para valores grandes de *b*/*h*, el valor $\tau_{máx}$ de los esfuerzos C_1 y C_2 puede ser muchas veces mayor que el valor promedio τ_{prom} calculado a lo largo del eje neutro, como puede verse en la tabla siguiente:

b*/*h	**0.25**	**0.5**	**1**	**2**	**4**	**6**	**10**	**20**	**50**
$\tau_{máx}/\tau_{prom}$	1.008	1.033	1.126	1.396	1.988	2.582	3.770	6.740	15.65
$\tau_{mín}/\tau_{prom}$	0.996	0.983	0.940	0.856	0.805	0.800	0.800	0.800	0.800

Observando que la distancia desde el eje neutro al centroide C' de A es $\bar{y} = \frac{1}{2}(c + y)$, y recordando que, $Q = A\bar{y}$, se escribe

$$Q = A\bar{y} = b(c - y)\tfrac{1}{2}(c + y) = \tfrac{1}{2}b(c^2 - y^2) \tag{6.8}$$

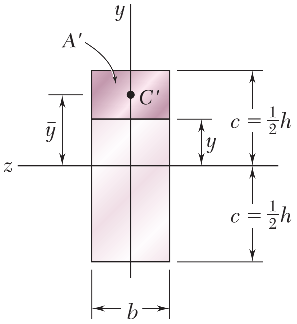


Figura 6.15

Recordando, por otra parte, que $I = bh^3/12 = \frac{2}{3}bc^3$, se tiene

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4}\frac{c^2 - y^2}{bc^3}V$$

o, notando que el área transversal de la viga es $A = 2bc$,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.9}$$

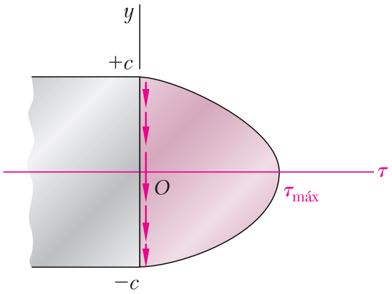


Figura 6.16

La ecuación (6.9) muestra que la distribución de esfuerzos cortantes en una sección transversal de una viga rectangular es *parabólica* (figura 6.16). Como ya se observó en la sección anterior, los esfuerzos cortantes son cero en la parte superior y en la base de la sección ($y = \pm c$). Haciendo $y = 0$ en la ecuación (6.9), se obtiene el valor del esfuerzo cortante máximo en una sección dada de una *viga rectangular delgada*.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{6.10}$$

La relación obtenida muestra que el valor máximo del esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular es un 50% mayor que el valor V/A que se hubiera obtenido suponiendo, erróneamente, una distribución uniforme a través de toda la sección transversal.

En el caso de una *viga estándar americana* (viga S) o una *viga de aleta ancha* (viga W), la ecuación (6.6) puede usarse para calcular el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{xy} ejercido sobre una sección aa' o bb' de la sección transversal de la viga (figuras 6.17*a* y *b*). Se escribe

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

donde V es la fuerza cortante vertical, t el ancho de la sección a la elevación considerada, Q el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro cc' e I el momento de inercia de toda la sección transversal con respecto a cc'. Dibujando τ_{prom} contra la distancia vertical y, se obtiene la curva de la figura 6.17*c*. Se notan las discontinuidades existentes en esta curva, que reflejan la diferencia entre los valores de t correspondientes, respectivamente, a las aletas $ABGD$ y $A'B'G'D'$ y al alma $EFF'E'$.

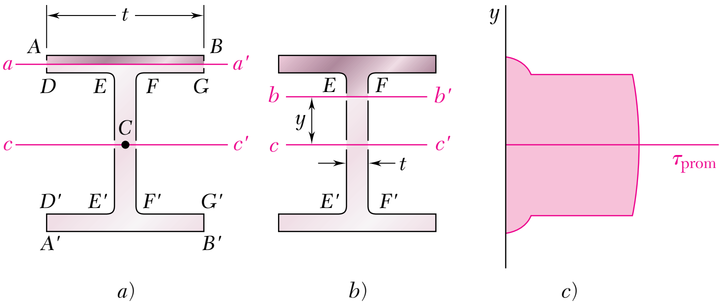


Figura 6.17

En el caso del alma, el esfuerzo cortante τ_{xy} varía sólo muy ligeramente a través del corte bb' y puede suponerse igual al promedio τ_{prom}. Esto no es cierto, sin embargo, para las aletas. Por ejemplo, considerando la línea horizontal *DEFG* se nota que τ_{xy} es cero entre D y E y entre F y G, ya que esos segmentos son parte de la superficie libre de la viga. Por otra parte, el valor de τ_{xy} entre E y F puede obtenerse haciendo $t = EF$ en la ecuación (6.6). En la práctica generalmente se supone que toda la carga cortante la soporta el alma y que una buena aproximación del valor máximo del esfuerzo cortante en la sección se obtiene dividiendo V entre el área del alma.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{A_{\text{alma}}} \tag{6.11}$$

No obstante, debe notarse que mientras la componente vertical τ_{xy} del esfuerzo cortante en las aletas puede despreciarse, su componente horizontal τ_{xz} tiene un valor significativo, que se determinará en la sección 6.7.

EJEMPLO 6.02

Considerando que el esfuerzo cortante permisible para la viga de madera del problema modelo 5.7 es $\tau_{\text{perm}} = 0.250$ ksi, verifique que el diseño obtenido de tal problema modelo es aceptable desde el punto de vista de los esfuerzos cortantes.

Recuerde que, del diagrama de corte del problema modelo 5.7, $V_{\text{máx}} = 4.50$ kips. El ancho real de la viga se dio como $b = 3.5$ in. y el valor obtenido para su espesor fue $h = 14.55$ in. Utilizando la ecuación (6.10) para el máximo esfuerzo cortante en una viga rectangular angosta, se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3(4.50 \text{ kips})}{2(3.5 \text{ in.})(14.55 \text{ in.})} = 0.1325 \text{ ksi}$$

Como $\tau_{\text{máx}} < \tau_{\text{perm}}$, el diseño obtenido en el problema modelo 5.7 es aceptable.

EJEMPLO 6.03

Sabiendo que el esfuerzo cortante permisible para la viga de acero del problema modelo 5.8 es $\tau_{\text{perm}} = 90$ MPa, verifique que el perfil W360 × 32.9 obtenido en dicho problema modelo es aceptable desde el punto de vista de los esfuerzos cortantes.

Se recuerda que, del diagrama de cortante del problema modelo 5.8, el máximo valor absoluto del corte en la viga es $|V|_{\text{máx}} = 58$ kN. Como se vio en la sección 6.4, puede suponerse en la práctica que toda la carga cortante la soporta por el alma y que el máximo valor del esfuerzo de corte en la viga puede obtenerse de la ecuación (6.11). Del apéndice C se encuentra que para el perfil W360 × 32.9 el espesor de la viga y el grosor de su alma son, respectivamente, $d = 349$ mm y $t_w = 5.8$ mm. Por lo tanto, se tiene

$$A_{\text{alma}} = d\,t_w = (349 \text{ mm})(5.8 \text{ mm}) = 2\,024 \text{ mm}^2$$

Sustituyendo los valores de $|V|_{\text{máx}}$ y A_{alma} en la ecuación (6.11), se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{|V|_{\text{máx}}}{A_{\text{alma}}} = \frac{58 \text{ kN}}{2\,024 \text{ mm}^2} = 28.7 \text{ MPa}$$

Ya que $\tau_{\text{máx}} < \tau_{\text{perm}}$, el diseño obtenido en el problema modelo 5.8 es aceptable.

*6.5 ANÁLISIS ADICIONAL SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN UNA VIGA RECTANGULAR DELGADA

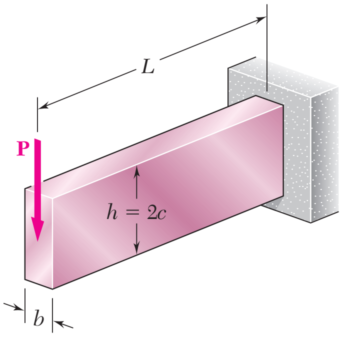


Figura 6.18

Considere una viga delgada en voladizo, de sección transversal rectangular de ancho b y altura h, sometida a una carga **P** en su extremo libre (figura 6.18). Como la fuerza cortante V en la viga es constante e igual en magnitud a **P**, la ecuación (6.9) produce

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.12}$$

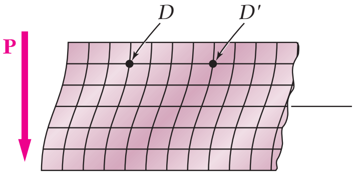


Figura 6.19

De la ecuación (6.12) se nota que los esfuerzos cortantes dependen sólo de la distancia y desde el eje neutro. Son independientes, por tanto, de la distancia desde el punto de aplicación de la carga; se sigue que todos los elementos localizados a la misma distancia de la superficie neutra sufren la misma deformación por cortante (figura 6.19). Aunque las secciones planas *no* permanezcan planas, la distancia entre dos puntos correspondientes D y D' localizados en distintas secciones, se mantiene igual. Esto indica que las deformaciones normales ϵ_x, y los esfuerzos normales σ_x no se afectan por los esfuerzos cortantes y que la hipótesis formulada en la sección 5.1 se justifica para la condición de carga de la figura 6.18.

Se concluye que el análisis de los esfuerzos en un voladizo de sección transversal rectangular, sometido a una carga **P** en su extremo libre, es válido. Los valores correctos del esfuerzo cortante en la viga están dados por la ecuación (6.12) y los esfuerzos normales a una distancia x del extremo libre se obtiene haciendo $M = -Px$ en la ecuación (5.2) de la sección 5.1. Se tiene:

$$\sigma_x = +\frac{Pxy}{I} \tag{6.13}$$

La validez de esta proposición depende, sin embargo, de las condiciones de extremo. Si la ecuación (6.12) se aplica en todas partes, entonces la carga P debe distribuirse de manera parabólica sobre la sección de extremo libre. Además, el soporte empotrado debe ser tal que permita el tipo de deformación por cortante indicado en la figura 6.19. El modelo resultante (figura 6.20) es muy difícil de encontrar en la práctica. Sin embargo, del principio de Saint-Venant se sigue que, para otros modos de aplicación de la carga y para otros tipos de soportes empotrados, las ecuaciones (6.12) y (6.13) todavía proporcionan la distribución correcta de esfuerzos, excepto cerca a los extremos de la viga.

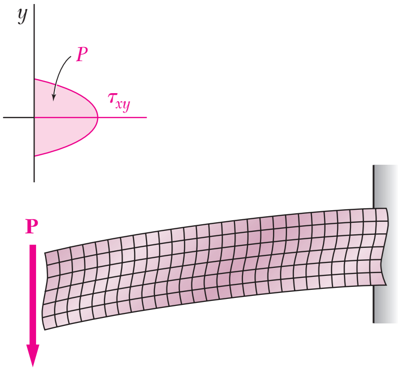


Figura 6.20

Cuando una viga de sección rectangular se somete a varias fuerzas concentradas (figura 6.21), puede usarse el principio de superposición para determinar esfuerzos normales y cortantes en secciones localizadas entre los puntos de aplicación de las cargas. Sin embargo, como las cargas $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, etcétera, se aplican en la superficie de la viga y no puede suponerse que estén distribuidas parabólicamente a través de la sección, los resultados obtenidos dejan de ser válidos en la inmediata vecindad del punto de aplicación de las cargas.

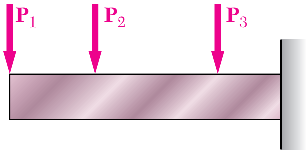


Figura 6.21

Cuando la viga se somete a una carga distribuida (figura 6.22), el cortante varía con la distancia del extremo de la viga y así lo hace el esfuerzo cortante a una elevación dada y. Las deformaciones por cortante resultantes son tales que la distancia entre dos puntos correspondientes de diferentes secciones transversales, como D_1 y D_1' o D_2 y D_2' dependerá de su elevación. Esto indica que la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas, bajo la cual se dedujeron las ecuaciones (6.12) y (6.13), debe rechazarse para las condiciones de carga de la figura 6.22. Sin embargo, el error implícito es pequeño para los valores de la relación ancho-profundidad encontrados en la práctica.

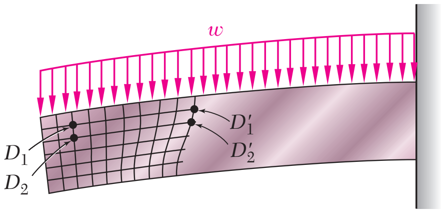
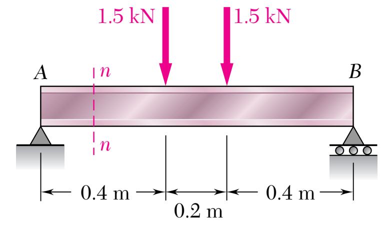


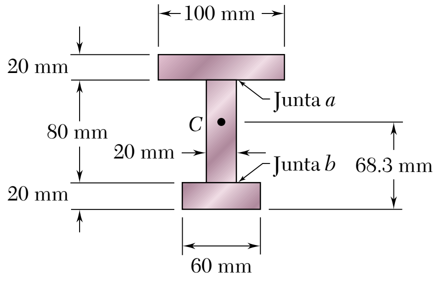
Figura 6.22

Debe notarse también que en porciones de la viga localizadas bajo una carga concentrada o distribuida, los esfuerzos normales σ_y se ejercerán sobre las caras horizontales de un elemento cúbico de material, además de los esfuerzos τ_{xy} mostrados en la figura 6.2.


1.5 kN
1.5 kN
A
n
B
n
0.4 m
0.2 m
0.4 m

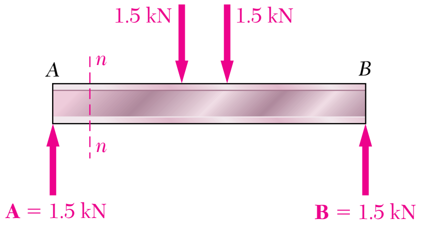
PROBLEMA MODELO 6.1

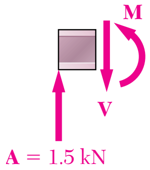
La viga *AB* está hecha de tres planchas pegadas y se somete, en su plano de simetría, a la carga mostrada en la figura. Considerando que el ancho de cada junta pegada es 20 mm, determine el esfuerzo cortante medio en cada junta en la sección *n-n* de la viga. El centroide de la sección se muestra en el dibujo y el momento centroidal de inercia es $I = 8.63 \times 10^{-6}$ m^4.


100 mm
20 mm
Junta *a*
80 mm
C
20 mm
Junta *b*
68.3 mm
20 mm
60 mm

SOLUCIÓN

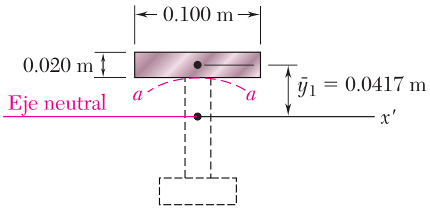
Cortante vertical de la sección *n-n*. Como la viga y la carga son simétricas con respecto al centro de la viga, se tiene: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1.5$ kN ↑.


1.5 kN
1.5 kN
A
n
B
n
A = 1.5 kN
B = 1.5 kN



Considerando la sección de la viga a la izquierda de *n-n* como un cuerpo libre, se escribe

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \qquad 1.5\text{ kN} - V = 0 \qquad V = 1.5\text{ kN}$$

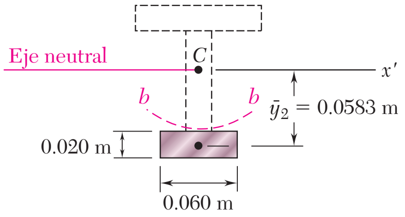

0.100 m
0.020 m
$\bar{y}_1 = 0.0417$ m
a
a
Eje neutral
x'

Esfuerzos cortantes en la junta *a*. Se realiza un corte *a-a* por la junta pegada para separar la sección transversal en dos partes. Se escoge determinar *Q* calculando el primer momento con respecto al eje neutro del área por encima de *a-a*.

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100\text{ m})(0.020\text{ m})](0.0417\text{ m}) = 83.4 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$$

Recordando que el ancho de la junta pegada es $t = 0.020$ m, se utiliza la ecuación (6.7) para hallar el esfuerzo cortante promedio de la junta.

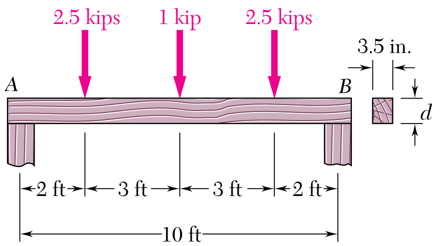
$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1\,500\text{ N})(83.4 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0.020\text{ m})} \qquad \tau_{\text{prom}} = 725\text{ kPa} \blacktriangleleft$$


Eje neutral
C
x'
b
b
$\bar{y}_2 = 0.0583$ m
0.020 m
0.060 m

Esfuerzo cortante en la junta *b*. Ahora se ejecuta el corte *b-b* y se calcula *Q* usando el área bajo el corte.

$$Q = A\bar{y}_2 = [(0.060\text{ m})(0.020\text{ m})](0.0583\text{ m}) = 70.0 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$$

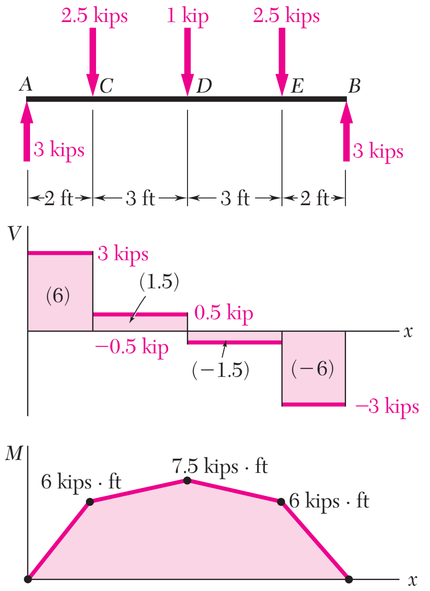
$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1\,500\text{ N})(70.0 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0.020\text{ m})} \qquad \tau_{\text{prom}} = 608\text{ kPa} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 6.2

Una viga de madera *AB* con un claro de 10 ft y un ancho nominal de 4 in. (ancho real = 3.5 in.) debe soportar las tres cargas concentradas que se indican en la figura. Sabiendo que para el tipo de madera utilizado $\sigma_{\text{perm}} = 1\,800$ psi y $\tau_{\text{perm}} = 120$ psi, determine el espesor mínimo requerido de la viga.

SOLUCIÓN



Corte y momento flector máximos. Después de dibujar los diagramas de corte y de momento flector, se advierte que

$$M_{\text{máx}} = 7.5 \text{ kips} \cdot \text{ft} = 90 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$
$$V_{\text{máx}} = 3 \text{ kips}$$

Diseño basado en el esfuerzo normal permisible. Primero se expresa el módulo de sección elástico *S* en términos del espesor *d*. Se tiene

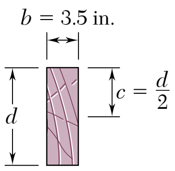
$$I = \frac{1}{12}bd^3 \qquad S = \frac{1}{c} = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6}(3.5)d^2 = 0.5833d^2$$

Para $M_{\text{máx}} = 90$ kips · in. y $\sigma_{\text{perm}} = 1\,800$ psi, se escribe

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \qquad 0.5833d^2 = \frac{90 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{1\,800 \text{ psi}}$$
$$d^2 = 85.7 \qquad d = 9.26 \text{ in.}$$

Se ha satisfecho el requerimiento de que $\sigma_m \leq 1\,800$ psi.

Verificación del esfuerzo de corte. Para $V_{\text{máx}} = 3$ kips y $d = 9.26$ in., se encuentra



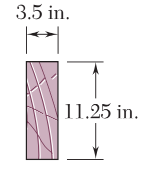
$$\tau_m = \frac{3}{2}\frac{V_{\text{máx}}}{A} = \frac{3}{2}\frac{3\,000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})(9.26 \text{ in.})} \qquad \tau_m = 138.8 \text{ psi}$$

Ya que $\tau_{\text{perm}} = 120$ psi, el espesor $d = 9.26$ in. *no* es aceptable y debe rediseñarse la viga con la base del requerimiento de que $\tau_m \leq 120$ psi.

Diseño basado sobre el esfuerzo cortante permisible. Como ahora se sabe que el esfuerzo cortante permisible controla el diseño, se escribe

$$\tau_m = \tau_{\text{perm}} = \frac{3}{2}\frac{V_{\text{máx}}}{A} \qquad 120 \text{ psi} = \frac{3}{2}\frac{3\,000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})d}$$

$$d = 10.71 \text{ in.} \blacktriangleleft$$



4 in. × 12 in.
Tamaño nominal

El esfuerzo normal es, desde luego, menor que $\sigma_{\text{perm}} = 1\,800$ psi, y el espesor de 10.71 in. es completamente aceptable.

Comentario. Debido a que la madera se encuentra normalmente disponible en incrementos de espesor de 2 in., deberá utilizarse una viga de 4 × 12 in. de tamaño nominal. La sección transversal real será, entonces, de 3.5 × 11.25 in.

PROBLEMAS

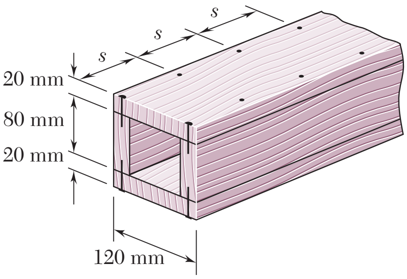


Figura P6.1 y P6.2

6.1 Una viga cuadrada tipo caja se hace con dos tablas de 20×80 mm y dos tablas de 20×120 mm, las cuales están clavadas como se muestra en la figura. Si se sabe que el espaciamiento entre los clavos es de $s = 50$ mm y que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 300 N, determine *a*) el máximo corte vertical permisible en la viga, *b*) el esfuerzo cortante máximo correspondiente en la viga.

6.2 Una viga cuadrada tipo caja se hace con dos tablas de 20×80 mm y dos tablas de 20×120 mm, las cuáles están clavadas como se muestra en la figura. Si se sabe que el espaciamiento entre los clavos es de $s = 30$ mm y que el corte vertical en la viga es $V = 1200$ N, determine *a*) la fuerza cortante en cada clavo, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga.

6.3 Tres tablas, cada una de 2 in. de espesor, se clavan para formar una viga sometida a un cortante vertical. Si la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 150 lb, determine el cortante permisible si el espaciamiento s entre los clavos es de 3 in.

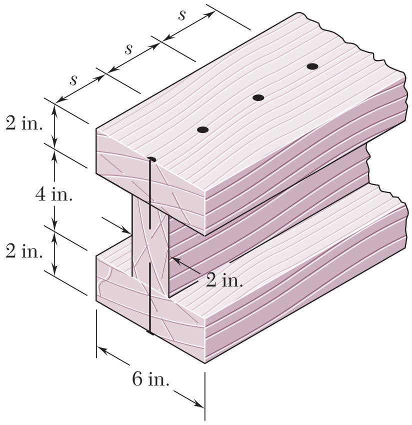


Figura P6.3 y *P6.4*

6.4 Tres tablas, cada una de 2 in. de espesor, se clavan para formar una viga sometida a un cortante vertical de 300 lb. Si se sabe que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 100 lb, determine el máximo espaciamiento longitudinal s que puede usarse entre los clavos.

6.5 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó al conectar dos elementos de acero laminado W6 $\times$ 20, usando pernos de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 6 in. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 10.5 ksi, determine el máximo esfuerzo vertical permisible en la viga.

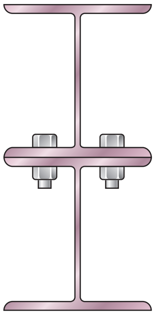


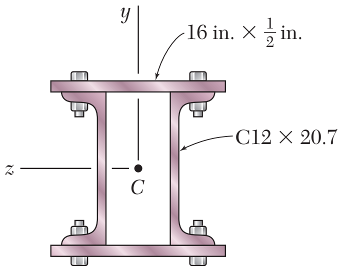
Figura P6.5

6.6 La viga mostrada en la figura se fabrica al conectar dos perfiles de canal, usando pernos de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 7.5 in. Determine el esfuerzo cortante promedio sobre los pernos causado por una fuerza cortante de 25 kips paralela al eje *y*.

6.7 La viga de acero laminado estándar americano que se muestra en la figura se ha reforzado al añadirle dos placas de 16 × 200 mm, utilizando pernos de 18 mm de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 120 mm. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 90 MPa, determine la máxima fuerza cortante vertical permisible.

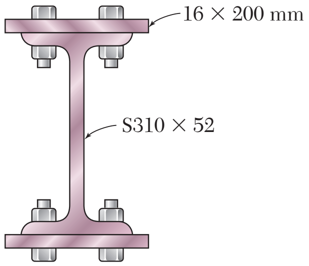
6.8 Retome el problema 6.7, y ahora suponga que las placas de refuerzo sólo tienen 12 mm de espesor.

6.9 a 6.12 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en dicha sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a*.



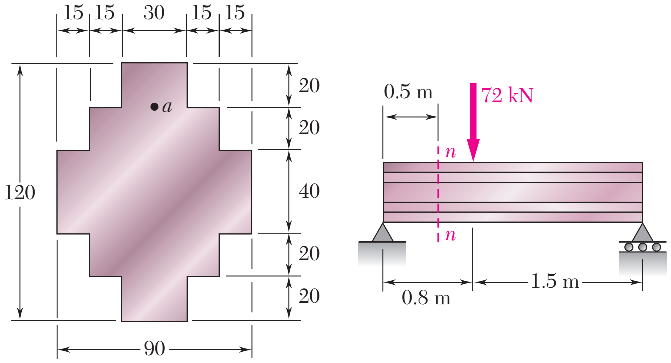
y
16 in. × $\frac{1}{2}$ in.
C12 × 20.7
z
C

Figura *P6.6*



16 × 200 mm
S310 × 52

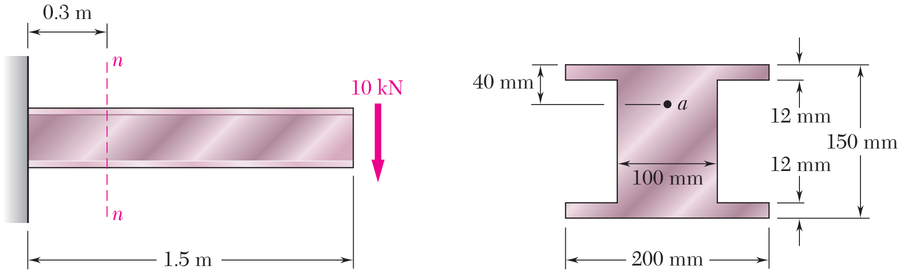
Figura P6.7



15
15
30
15
15
a
20
20
120
40
20
20
90
0.5 m
72 kN
n
n
0.8 m
1.5 m

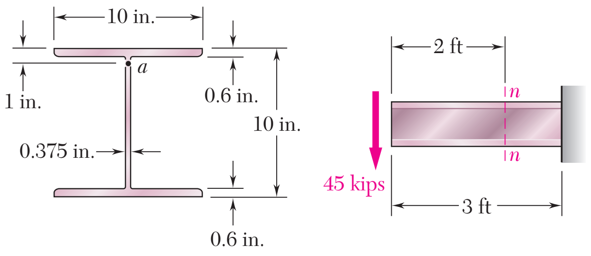
Dimensiones en mm

Figura P6.9



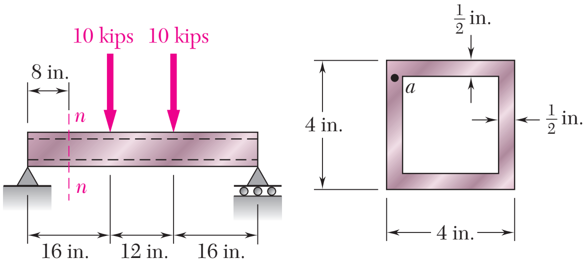
0.3 m
n
10 kN
n
1.5 m
40 mm
a
12 mm
150 mm
12 mm
100 mm
200 mm

Figura *P6.10*



10 in.
a
1 in.
0.6 in.
10 in.
0.375 in.
0.6 in.
2 ft
n
n
45 kips
3 ft

Figura P6.11



10 kips
10 kips
8 in.
n
n
16 in.
12 in.
16 in.
$\frac{1}{2}$ in.
a
4 in.
$\frac{1}{2}$ in.
4 in.

Figura P6.12

6.13 Dos placas de acero con sección transversal rectangular de 12 × 220 mm se sueldan a una viga W250 × 58, como se muestra en la figura. Determine el cortante vertical máximo permisible si el esfuerzo cortante en la viga no debe exceder 90 MPa.

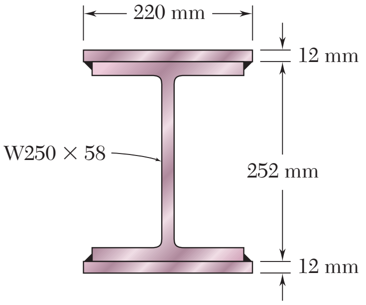


Figura P6.13

6.14 Retome el problema 6.13, y ahora suponga que las dos placas de acero *a*) se reemplazan con placas de acero de 8 × 220 mm de sección transversal rectangular, *b*) se eliminan.

6.15 Para la viga de patín ancho que soporta la carga mostrada en la figura, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse. Considere que el máximo esfuerzo normal es de 24 ksi y que el máximo esfuerzo cortante usando la aproximación $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ es de 14.5 ksi.

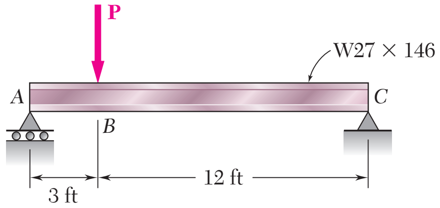


Figura P6.15

6.16 Para la viga de patín ancho que soporta la carga mostrada en la figura, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse. Considere que el máximo esfuerzo normal es de 160 MPa y que el máximo esfuerzo cortante usando la aproximación $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ es de 100 MPa.

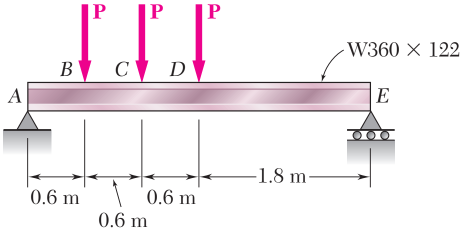


Figura P6.16

6.17 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la anchura mínima requerida *b*, si se sabe que para el grado de madera utilizado, $\sigma_{\text{perm}} =$ 12 MPa y $\tau_{\text{perm}} = 825$ kPa.

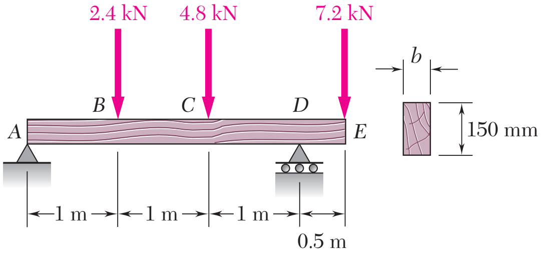


Figura *P6.17*

6.18 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la profundidad mínima requerida *h*, si se sabe que para el grado de madera utilizado, $\sigma_{\text{perm}} = 1\,750$ psi y $\tau_{\text{perm}} = 130$ psi.

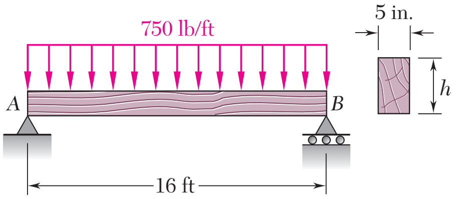


Figura P6.18

6.19 Una viga de madera *AB* simplemente apoyada con longitud *L* y sección transversal rectangular se somete a una carga concentrada única **P** en su punto medio *C*. *a*) Muestre que la razón τ_m/σ_m de los máximos valores para los esfuerzos cortante y normal en la viga es igual a $2h/L$, donde *h* y *L* son, respectivamente, la profundidad y la longitud de la viga. *b*) Determine la profundidad *h* y el ancho *b* de la viga, si $L = 2$ m, $P = 40$ kN, $\tau_m = 960$ kPa y $\sigma_m = 12$ MPa.

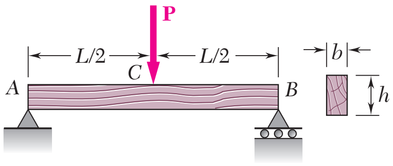


Figura P6.19

6.20 Una viga de madera *AB* de longitud *L* y sección transversal rectangular soporta una carga uniformemente distribuida *w* y se apoya como se muestra en la figura. *a*) Muestre que la relación τ_m/σ_m de los máximos valores para los esfuerzos cortante y normal en la viga es igual a $2h/L$, donde *h* y *L* son, respectivamente, la profundidad y la longitud de la viga. *b*) Determine la profundidad *h* y el ancho *b* de la viga, si se sabe que $L = 5$ m, $w = 8$ kN/m, $\tau_m = 1.08$ MPa y $\sigma_m = 12$ MPa.

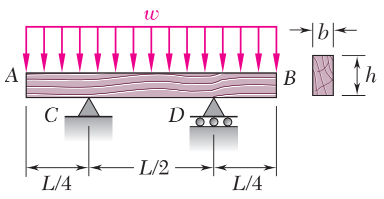

w
b
A
B
h
C
D
L/4
L/2
L/4

Figura *P6.20*

6.21 y 6.22 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

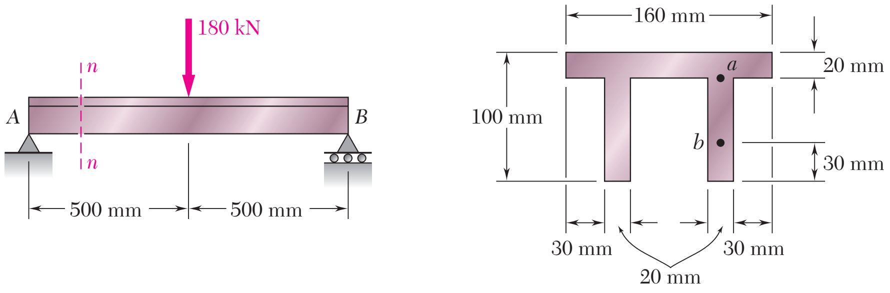

180 kN
n
A
B
n
500 mm
500 mm
160 mm
a
20 mm
100 mm
b
30 mm
30 mm
30 mm
20 mm

Figura P6.21 y P6.23

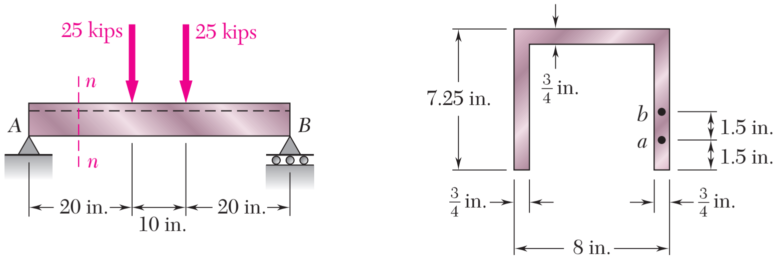

25 kips
25 kips
n
A
B
n
20 in.
10 in.
20 in.
7.25 in.
3/4 in.
b
a
1.5 in.
1.5 in.
3/4 in.
3/4 in.
8 in.

Figura P6.22 y P6.24

6.23 y 6.24 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine el esfuerzo cortante máximo en la sección *n-n*.

6.25 a *6.28* Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se sujeta a un cortante vertical **V**. Determine *a*) la línea horizontal a lo largo de la cual el esfuerzo cortante es máximo, *b*) la constante *k* en la siguiente expresión para el esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{\text{máx}} = k\frac{V}{A}$$

donde *A* es el área de la sección transversal de la viga.

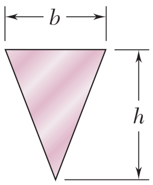


Figura P6.25

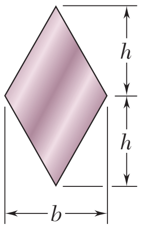


Figura *P6.26*

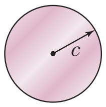


Figura P6.27

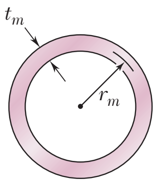


Figura *P6.28*

6.6 CORTE LONGITUDINAL EN UN ELEMENTO DE VIGA CON FORMA ARBITRARIA

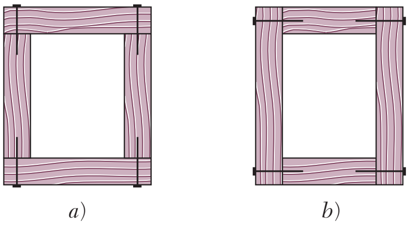


Figura 6.23

Considere una viga de caja obtenida clavando cuatro tablas, como se observa en la figura 6.23*a*. Se aprendió en la sección 6.2 cómo determinar el corte por unidad de longitud, q, sobre las superficies horizontales a lo largo de las cuales se unen las tablas. Pero, ¿podría determinarse q si las tablas hubieran sido unidas a lo largo de superficies *verticales*, como se muestra en la figura 6.23*b*? Se examinó en la sección 6.4 la distribución de las componentes verticales τ_{xy} de los esfuerzos sobre la sección transversal de una viga W o S y se encontró que estos esfuerzos tienen un valor casi constante en el alma de la viga y son despreciables en los patines. Pero, ¿qué hay de las componentes *horizontales* τ_{xz} de los esfuerzos en los patines?

Para responder estas preguntas debe extenderse el procedimiento desarrollado en la sección 6.2 para la determinación del corte por unidad de longitud, q, de tal manera que se aplique a los casos recién descritos.

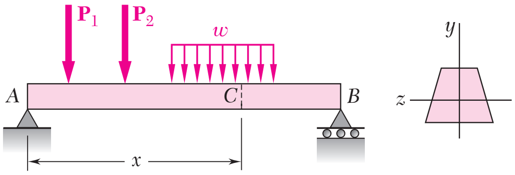


Figura 6.5 (repetida)

Considere la viga prismática AB de la figura 6.5, que tiene un plano vertical de simetría y soporta las cargas que se muestran. A una distancia x desde el extremo A se desprende nuevamente un elemento $CDD'C'$ con longitud Δx. Este elemento, sin embargo, se extiende ahora desde dos lados de la viga a una superficie curva arbitraria (figura 6.24). Las fuerzas ejercidas sobre el elemento incluyen fuerzas cortantes verticales $\mathbf{V}'_C$ y $\mathbf{V}'_D$, fuerzas normales horizontales elementales $\sigma_C\,dA$ y $\sigma_D\,dA$, posiblemente una carga $w\,\Delta x$ y una fuerza longitudinal de corte $\Delta\mathbf{H}$ que representa la resultante de las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la superficie curva (figura 6.25). Se escribe la ecuación de equilibrio

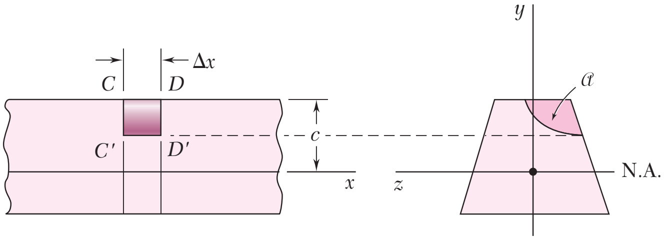


Figura 6.24

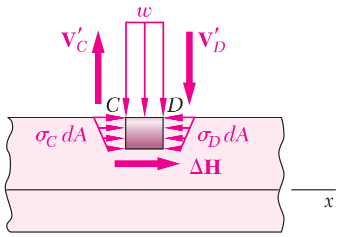


Figura 6.25

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{\mathcal{A}} (\sigma_D - \sigma_C)\, dA = 0$$

donde la integral se calculará a lo largo del área sombreada $\mathcal{A}$ de la sección. Se observa que la ecuación resultante es la misma que se obtuvo en la sección 6.2, pero que el área sombreada $\mathcal{A}$ sobre la que se calcula la integral ahora se extiende hasta la superficie sombreada.

El resto de la deducción es el mismo que en la sección 6.2. Se encuentra que el corte longitudinal ejercido sobre el elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\,\Delta x \tag{6.4}$$

donde I es el momento centroidal de inercia de toda la sección, Q el primer momento del área sombreada $\mathcal{A}$ con respecto al eje neutro y V el corte vertical en la sección. Dividiendo ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx, se obtiene el corte horizontal por unidad de longitud, o flujo cortante:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

EJEMPLO 6.04

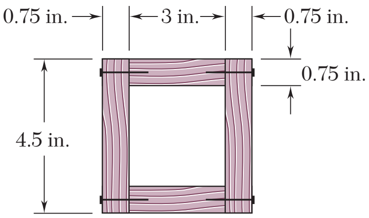


Figura 6.26

Una viga-cajón cuadrada está hecha de dos tablas de 0.75 × 3 in., y dos de 0.75 × 4.5 in., clavadas como se muestra (figura 6.26). Si la separación entre los clavos es de 1.75 in. y la viga se somete a un cortante vertical de magnitud $V = 600$ lb, determine la fuerza cortante en cada clavo.

Se aísla la tabla superior y se considera la fuerza total por unidad de longitud q, ejercida sobre sus dos extremos. Si usamos la ecuación (6.5), donde Q es el primer momento con respecto al eje neutro del área sombreada A' de la figura 6.27*a*, y donde I es el momento de inercia con respecto al mismo eje de la sección transversal total de la viga-cajón (figura 6.27*b*). Se tiene

$$Q = A'\bar{y} = (0.75 \text{ in.})(3 \text{ in.})(1.875 \text{ in.}) = 4.22 \text{ in.}^3$$

Recordando que el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje centroidal es $I = \frac{1}{12}a^4$, se escribe

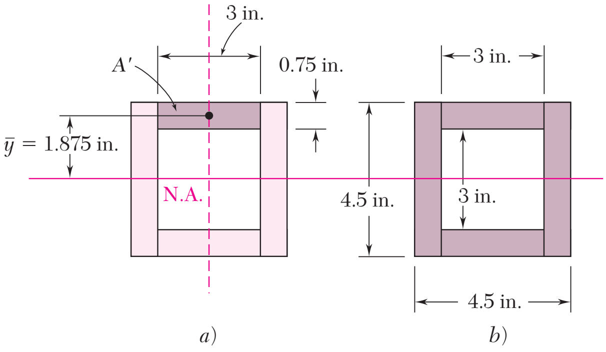
$$I = \tfrac{1}{12}(4.5 \text{ in.})^4 - \tfrac{1}{12}(3 \text{ in.})^4 = 27.42 \text{ in.}^4$$

Sustituyendo en la ecuación (6.5),

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(600 \text{ lb})(4.22 \text{ in.}^3)}{27.42 \text{ in.}^4} = 92.3 \text{ lb/in.}$$

Puesto que tanto la viga como la tabla superior son simétricas con respecto al plano vertical de carga, se ejercen fuerzas iguales sobre los dos bordes de la tabla. La fuerza por unidad de longitud en estos bordes es $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}(92.3) = 46.15$ lb/in. Como la separación entre clavos es de 1.75 in., la fuerza cortante en cada clavo es

$$F = (1.75 \text{ in.})(46.15 \text{ lb/in.}) = 80.8 \text{ lb}$$



a) *b*)

Figura 6.27

6.7 ESFUERZOS CORTANTES EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA

En la sección precedente se vio que la ecuación (6.4) puede utilizarse para determinar el corte longitudinal $\Delta \mathbf{H}$ ejercido sobre las paredes de un elemento de viga de forma arbitraria y que la ecuación (6.5) puede emplearse para determinar el flujo cortante q correspondiente. Estas ecuaciones se utilizarán en esta sección para calcular tanto el flujo cortante como el esfuerzo cortante promedio en elementos de pared delgada como los patines de vigas de patín ancho (figura 6.28) y de vigas de caja, o en las paredes de tubos estructurales (figura 6.29).

Figura 6.28

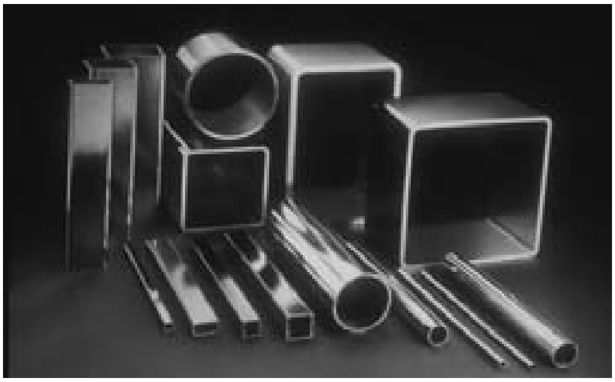


Figura 6.29

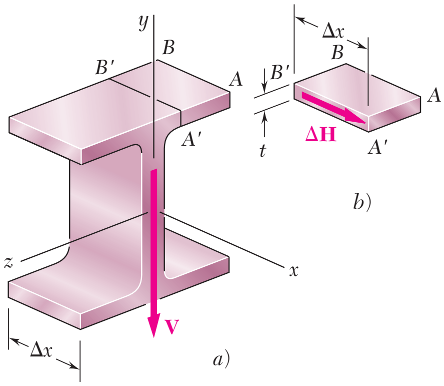


Figura 6.30

Considere, por ejemplo, un segmento con longitud Δx de una viga de patín ancho (figura 6.30*a*) y sea $\mathbf{V}$ el corte vertical en la sección transversal mostrada. Se desprende un elemento $ABB'A'$ del patín superior (figura 6.30*b*). El corte longitudinal $\Delta \mathbf{H}$ ejercido sobre el elemento puede obtenerse de la ecuación (6.4):

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\,\Delta x \qquad (6.4)$$

Dividiendo ΔH entre el área $\Delta A = t\,\Delta x$ del corte, se obtiene, para el esfuerzo cortante promedio ejercido sobre el elemento, la misma expresión que se obtuvo en la sección 6.3 en caso de un corte horizontal:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \qquad (6.6)$$

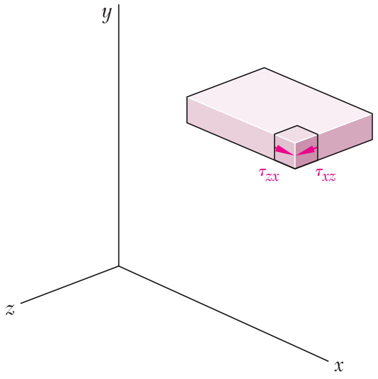
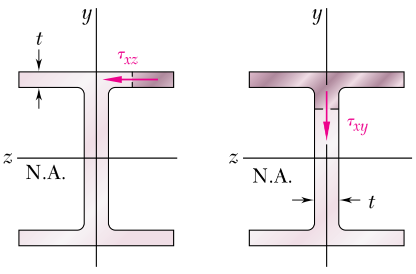


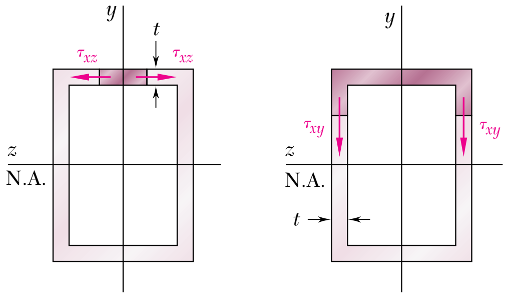
Figura 6.31

Debe notarse, sin embargo, que τ_{prom} representa ahora el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{zx} ejercido sobre el corte vertical. Pero como el espesor t de la aleta es pequeño, hay muy poca variación, de τ_{zx} a través del corte. Así, recordando que $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (figura 6.31), se concluye que la componente horizontal τ_{xz} del esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de la aleta puede obtenerse mediante la ecuación (6.6), donde Q es el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro (figura 6.32*a*). Recuerde que se obtuvo un resultado similar en la sección 6.4 para la componente vertical τ_{xy} del esfuerzo cortante en el alma (figura 6.32*b*). La ecuación



a) *b*)

Figura 6.32



a) *b*)

Figura 6.33

(6.6) puede usarse para determinar los esfuerzos cortantes en otros elementos de pared delgada, como viga-cajón (figura 6.33) y medias tuberías (figura 6.34), siempre que las cargas se apliquen en un plano de simetría del elemento. En cada caso, el corte debe ser perpendicular a la superficie del elemento y la ecuación (6.6) dará la componente del esfuerzo cortante en la dirección de la tangente a esa superficie. (La otra componente puede suponerse igual a cero, dada la proximidad de las dos superficies libres.)

Comparando las ecuaciones (6.5) y (6.6), se nota que el producto del esfuerzo cortante τ en un punto dado de la sección y del espesor t de la sección en ese punto es igual a q. Como V e I son constantes en una sección dada, q depende sólo del primer momento Q y por tanto puede esquematizarse fácilmente en la sección. En el caso de la viga-cajón, por ejemplo (figura 6.35), se nota que q aumenta paulatinamente de cero en A hasta un valor máximo en C y C' en el eje neutro y luego decrece hasta cero al alcanzar E. También se nota que no hay variación repentina de q cuando se pasa una esquina en B, D, B' o D' y que el sentido de q en las partes horizontales de la sección puede obtenerse fácilmente a partir del sentido en las porciones verticales (que es el mismo de $\mathbf{V}$). En el caso de una sección de aleta ancha (figura 6.36), los valores de q en las porciones AB y $A'B$ de la aleta superior se distribuyen simétricamente. Cuando se llega a B en el alma, los valores de q correspondientes a las dos mitades de la aleta deben combinarse para obtener el valor de q en el tope del alma. Después de alcanzar un valor máximo en C, en el eje neutro, q decrece y en D se separa en dos partes iguales correspondientes a las dos mitades de la aleta inferior. El nombre de *flujo de cortante*, comúnmente utilizado para referirse a cortante por unidad de longitud q, refleja la semejanza entre las propiedades de q que se han descrito y algunas de las características del flujo de fluido en el canal abierto o en una tubería de presión.[†]

Hasta ahora se ha supuesto que todas las cargas actuaban en un plano de simetría del elemento. En el caso de elementos con dos planos de simetría, como la viga de aleta ancha de la figura 6.32 o la viga-cajón de la figura

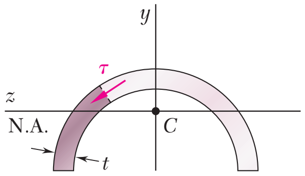


Figura 6.34

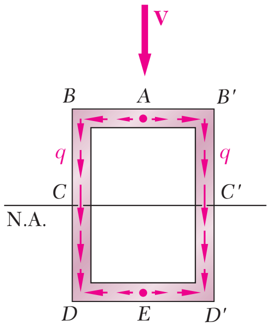


Figura 6.35 Variación de q en una viga-cajón.

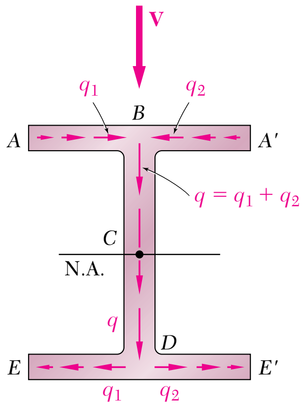


Figura 6.36 Variación de q en una viga de ala ancha.

[†] Recuerde que el concepto de flujo cortante se usó para analizar la distribución de esfuerzos-cortantes en ejes huecos de pared delgada (véase sección 3.13). Sin embargo, mientras el flujo de cortante en un eje hueco es constante, en un elemento bajo carga transversal no lo es.

6.33, cualquier carga aplicada a través del centroide de una sección transversal puede descomponerse en componentes a lo largo de los ejes de simetría de la sección. Cada componente provocará que el elemento se flexione en un plano de simetría; los esfuerzos cortantes correspondientes se obtienen mediante la ecuación (6.6). El principio de la superposición puede usarse para hallar los esfuerzos resultantes.

Sin embargo, si el elemento considerado carece de un plano de simetría o si posee uno solo y se le somete a una carga no contenida en ese plano, se observa que el elemento se *flexiona y tuerce* al mismo tiempo, excepto cuando la carga se aplica en un punto específico llamado *centro de cortante*. Observe que el centro de cortante generalmente no coincide con el centroide de la sección transversal. La determinación del centro de cortante para varias figuras de pared delgada se verá en la sección 6.9.

*6.8 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

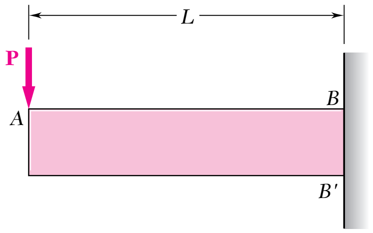


Figura 6.37 ($PL \leq M_Y$)

Considere una viga en voladizo AB, de longitud L y con sección transversal rectangular, sometida en su extremo libre A a una carga concentrada **P** (figura 6.37). El valor máximo del momento flector ocurre en el extremo fijo B y es igual a $M = PL$. Mientras este valor no exceda el máximo momento elástico M_Y, es decir, siempre que $PL \leq M_Y$, el esfuerzo normal σ_x no excederá el límite de fluencia σ_Y en ninguna parte de la viga. Sin embargo, cuando P se incrementa más allá del valor M_Y/L, la fluencia se inicia en los puntos B y B' y se extiende al extremo libre de la viga. Suponiendo que el material es elastoplástico y considerando una sección CC' localizada a una distancia x del extremo libre A de la viga (figura 6.38), se obtiene el semiespesor y_Y del núcleo elástico en esa sección haciendo $M = Px$ en la ecuación (4.38) de la sección 4.9. Se tiene

$$Px = \frac{3}{2} M_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2}\right) \tag{6.14}$$

donde c es la mitad de la altura de la viga. Graficando y_Y contra x, se obtiene la frontera entre las zonas elástica y plástica.

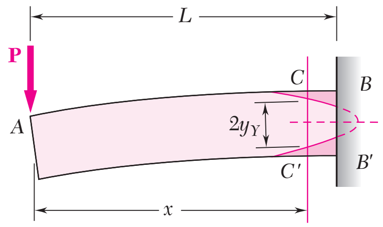


Figura 6.38 ($PL > M_Y$)

Mientras $PL < \frac{3}{2}M_Y$, la parábola definida por la ecuación (6.14) interseca la línea BB', como se muestra en la figura 6.38. Sin embargo, cuando PL alcanza el valor $\frac{3}{2}M_Y$, es decir, cuando $PL = M_p$, en donde M_p es el momento plástico de la sección 4.9, la ecuación (6.14) da $y_Y = 0$ para $x = L$, lo cual muestra que el vértice de la parábola está ahora en la sección BB' y que la sección se ha vuelto completamente plástica (figura 6.39). Recordando la ecuación (4.40) de la sección 4.9 se observa también que el radio de curvatura ρ de la superficie neutra en ese punto es igual a cero, indicando la presencia de una fuerte flexión de la viga en su extremo fijo. Se dice que se ha desarrollado una *articulación plástica* en ese punto. La carga $P = M_p/L$ es la más grande que la viga puede soportar.

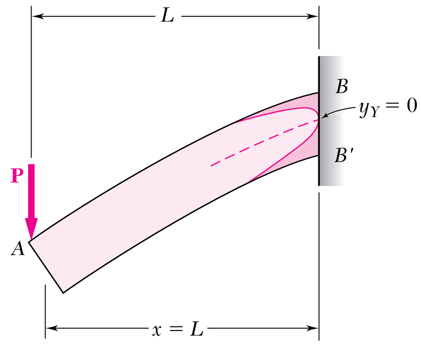


Figura 6.39 ($PL = M_P = \frac{3}{2}M_Y$)

Todo el planteamiento anterior se basó únicamente en el análisis de los esfuerzos normales en la viga. Se examinará ahora la distribución de esfuerzos cortantes en una sección que se ha vuelto parcialmente plástica. Considere la parte de viga $CC''D''D$ localizada entre las secciones transversales CC' y DD', y situada sobre el plano horizontal $D''C''$ (figura 6.40*a*). Si esta porción está enteramente en la zona plástica, los esfuerzos normales ejercidos sobre las caras CC'' y DD'' estarán distribuidos de manera uniforme y serán iguales al límite de fluencia σ_Y (figura 6.40*b*). El equilibrio del cuerpo libre $CC''D''D$ requiere que la fuerza cortante horizontal $\Delta\mathbf{H}$ ejercida sobre la cara de abajo sea igual a cero. Se sigue que el valor promedio del esfuerzo cortante horizontal τ_{yx} a través de la viga en C'' es cero, al igual que el valor promedio del esfuerzo cortante vertical τ_{xy}. Se concluye así que el cortante vertical $V = P$ en la sección CC' debe destruirse enteramente sobre la porción EE' de esa sección que está localizada dentro de la zona elástica (figura 6.41). Puede mostrarse[†] que la distribución de esfuerzos cortantes sobre EE' es la misma que la de una viga rectangular elástica del mismo ancho b de la viga AB y de profundidad igual al espesor $2y_Y$ de la zona elástica. Llamando A' al área $2by_Y$ de la porción elástica de la sección transversal, se tiene:

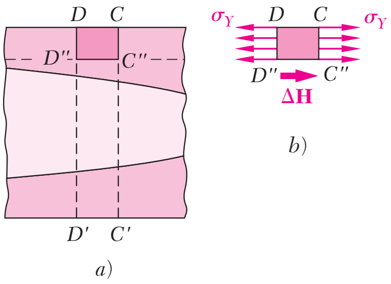


Figura 6.40

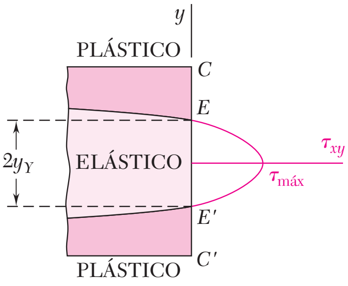


Figura 6.41

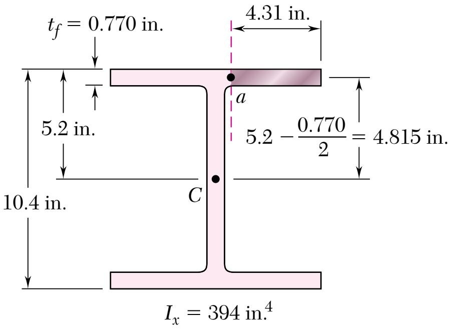
$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'}\left(1 - \frac{y^2}{y_Y^2}\right) \tag{6.15}$$

El máximo valor del esfuerzo cortante ocurre para $y = 0$ y es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'} \tag{6.16}$$

A medida que el área A' de la porción elástica de la sección decrece, $\tau_{\text{máx}}$ aumenta hasta alcanzar el límite de fluencia a cortante τ_Y. Así, el cortante contribuye a la falla última de la viga. Un análisis más exacto de este modo de falla debe tener en cuenta el efecto combinado de los esfuerzos normales y cortantes.

[†] Véase problema 6.60.



$t_f = 0.770$ in.
4.31 in.
a
5.2 in.
$5.2 - \frac{0.770}{2} = 4.815$ in.
10.4 in.
C
$I_x = 394$ in.^{4}

PROBLEMA MODELO 6.3

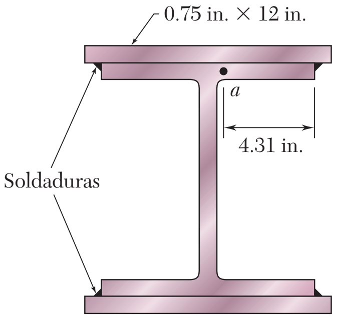
Sabiendo que el cortante vertical es de 50 kips en una sección laminada de acero W10 × 68, determine el esfuerzo cortante horizontal en la aleta superior en un punto a localizado a 4.31 in. del borde de la viga. Las dimensiones y otros datos geométricos de la sección se dan en el apéndice C.

SOLUCIÓN

Se ha aislado la parte sombreada de la aleta cortando por la línea punteada que pasa por el punto a.

$$Q = (4.31 \text{ in.})(0.770 \text{ in.})(4.815 \text{ in.}) = 15.98 \text{ in.}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(50 \text{ kips})(15.98 \text{ in.}^3)}{(394 \text{ in.}^4)(0.770 \text{ in.})} \qquad \tau = 2.63 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$



0.75 in. × 12 in.
a
4.31 in.
Soldaduras

PROBLEMA MODELO 6.4

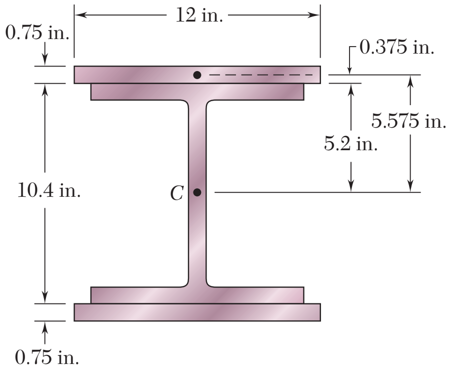
Resuelva el problema modelo 6.3 suponiendo que se han soldado platinas de 0.75 × 12 in. a las aletas de la viga W10 × 68 por medio de soldaduras de filete continuas, como se muestra en la figura.

SOLUCIÓN

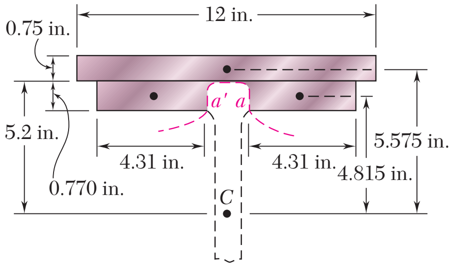
Para la viga compuesta el momento centroidal de inercia es:

$$I = 394 \text{ in.}^4 + 2[\tfrac{1}{12}(12 \text{ in.})(0.75 \text{ in.})^3 + (12 \text{ in.})(0.75 \text{ in.})(5.575 \text{ in.})^2]$$
$$I = 954 \text{ in.}^4$$

Como la platina superior y la aleta están conectadas sólo en las soldaduras de filete, puede encontrarse el esfuerzo cortante en a haciendo un corte en la aleta en el punto a, *entre* la platina y la aleta, y de nuevo en la aleta en el punto simétrico a'.



0.75 in.
12 in.
0.375 in.
5.575 in.
5.2 in.
10.4 in.
C
0.75 in.

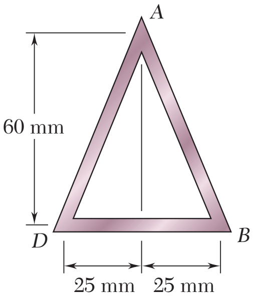


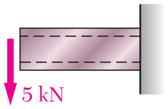
0.75 in.
12 in.
a' a
5.2 in.
4.31 in.
4.31 in.
5.575 in.
4.815 in.
0.770 in.
C

Para el área sombreada que se ha aislado, se tiene

$$t = 2t_f = 2(0.770 \text{ in.}) = 1.540 \text{ in.}$$
$$Q = 2[(4.31 \text{ in.})(0.770 \text{ in.})(4.815 \text{ in.})] + (12 \text{ in.})(0.75 \text{ in.})(5.575 \text{ in.})$$
$$Q = 82.1 \text{ in.}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(50 \text{ kips})(82.1 \text{ in.}^3)}{(954 \text{ in.}^4)(1.540 \text{ in.})} \qquad \tau = 2.79 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

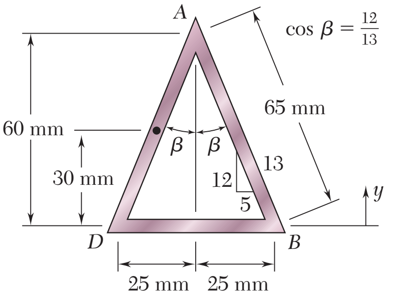




PROBLEMA MODELO 6.5

La viga de pared delgada que se muestra en la figura, obtenida por extrusión, es de aluminio y tiene un espesor uniforme de 3 mm. Considerando que la fuerza cortante es 5 kN, determine: *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el máximo esfuerzo cortante en la viga.

Nota: Las dimensiones dadas van hasta las líneas localizadas en la mitad de las superficies externas e internas de la viga.

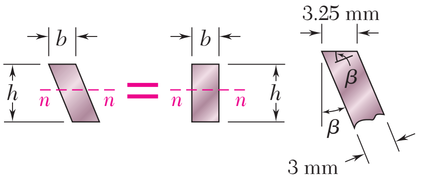


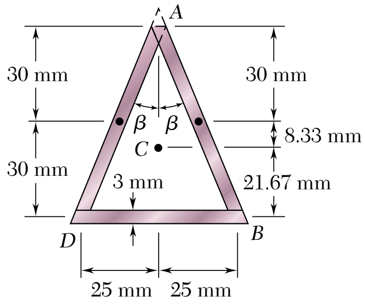
SOLUCIÓN

Centroide. Se observa que $AB = AD = 65$ mm

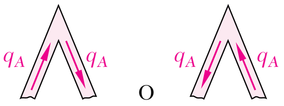
$$\bar{Y} = \frac{\Sigma\ \bar{y}A}{\Sigma\ A} = \frac{2[(65\text{ mm})(3\text{ mm})(30\text{ mm})]}{2[(65\text{ mm})(3\text{ mm})] + (50\text{ mm})(3\text{ mm})}$$
$$\bar{Y} = 21.67\text{ mm}$$

Momento centroidal de inercia. Cada lado de la viga de pared delgada puede considerarse como un paralelogramo y se recuerda que para el caso mostrado $I_{nn} = bh^3/12$ donde b se mide paralela al eje nn.



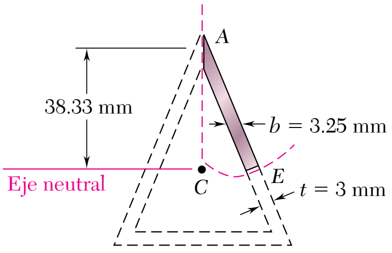


$$b = (3\text{ mm})/\cos\beta = (3\text{ mm})/(12/13) = 3.25\text{ mm}$$
$$I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = 2[\tfrac{1}{12}(3.25\text{ mm})(60\text{ mm})^3$$
$$+ (3.25\text{ mm})(60\text{ mm})(8.33\text{ mm})^2] + [\tfrac{1}{12}(50\text{ mm})(3\text{ mm})^3$$
$$+ (50\text{ mm})(3\text{ mm})(21.67\text{ mm})^2]$$
$$I = 214.6 \times 10^3\text{ mm}^4 \qquad I = 0.2146 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$



***a*) Esfuerzos cortantes en *A*.** Si en A ocurre un cortante τ_A, el flujo de cortante será $q_A = \tau_A t$ y debe dirigirse en una de las dos maneras mostradas en la figura. Como la sección transversal y la carga son simétricas con respecto a una línea vertical que pasa por A, el flujo de cortante también debe ser simétrico. Puesto que ninguno de los posibles flujos de cortante es simétrico, se concluye que $\tau_A = 0$ ◀

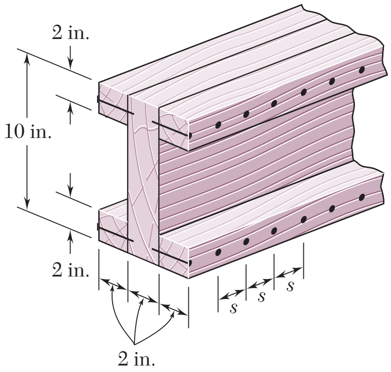
***b*) Esfuerzo cortante máximo.** Como el ancho de la pared delgada es constante, el máximo esfuerzo cortante ocurre en el eje neutro donde Q es máximo. Como se sabe que el esfuerzo cortante en A es cero, se corta la sección a lo largo de la línea punteada mostrada en la figura y se aísla la parte sombreada de la viga. Para obtener el esfuerzo cortante máximo, el corte en el eje neutro se hace perpendicular a los lados y con una longitud de $t = 3$ mm.



$$Q = [(3.25\text{ mm})(38.33\text{ mm})]\left(\frac{38.33\text{ mm}}{2}\right) = 2\,387\text{ mm}^3$$
$$Q = 2.387 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5\text{ kN})(2.387 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(0.2146 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0.003\text{ m})} \qquad \tau_{\text{máx}} = \tau_E = 18.54\text{ MPa}$$ ◀

PROBLEMAS

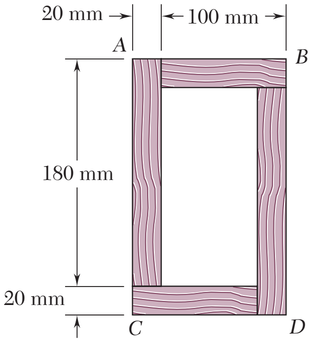
6.29 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura se somete a un corte vertical de 1 200 lb. Si se sabe que la fuerza cortante permisible en los clavos es de 75 lb, determine el máximo espaciamiento permisible s entre los clavos.



2 in.
10 in.
2 in.
s
s
s
2 in.

Figura P6.29

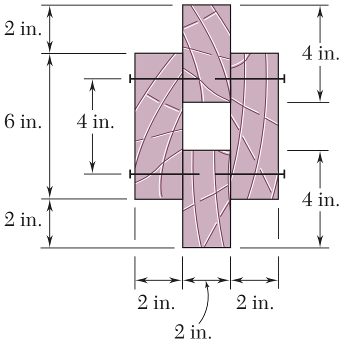
6.30 Dos tablas de 20 × 100 mm y dos de 20 × 180 mm se pegan para formar una viga tipo caja de 120 × 200 mm. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 3.5 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.



20 mm
100 mm
A
B
180 mm
20 mm
C
D

Figura *P6.30*

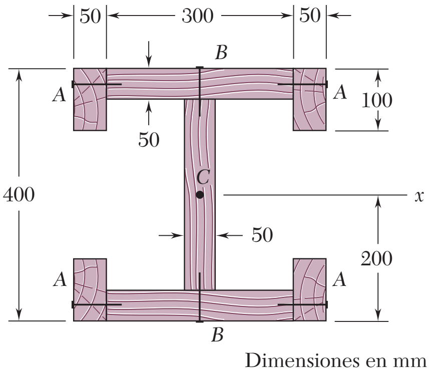
6.31 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura está sujeta a un cortante vertical de 1 500 lb. Si se sabe que el espaciamiento longitudinal de los clavos es $s = 2.5$ in. y que cada clavo tiene 3.5 in. de longitud, calcule la fuerza cortante en cada clavo.



2 in.
6 in.
4 in.
2 in.
4 in.
4 in.
2 in.
2 in.
2 in.

Figura P6.31

6.32 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura está sujeta a un corte vertical de 8 kN. Si se sabe que los clavos están espaciados longitudinalmente cada 60 mm en *A* y cada 25 mm en *B*, determine la fuerza cortante sobre los clavos *a*) en *A*, *b*) en *B*. (*Datos*: $I_x = 1.504 \times 10^9\ \text{mm}^4$.)



50
300
50
B
A
A
100
50
C
x
400
50
200
A
A
B
Dimensiones en mm

Figura P6.32

6.33 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó pegando varias tablas de madera. Si se sabe que la viga está sujeta a un cortante vertical de 5 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.

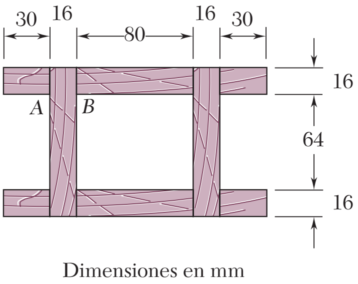

30
16
80
16
30
16
A
B
64
16
Dimensiones en mm

Figura *P6.33*

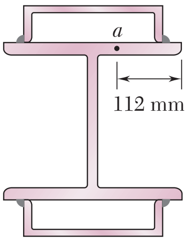


Figura P6.34

6.34 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó al soldar canales de acero laminado C200 × 17.1 a los patines de un perfil de acero laminado W250 × 80. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 200 kN, determine *a*) la fuerza cortante horizontal por metro en cada soldadura, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a* del perfil de patín ancho.

6.35 Si un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo máximo de corte de 10 ksi en la extrusión con forma de sombrero que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante correspondiente en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

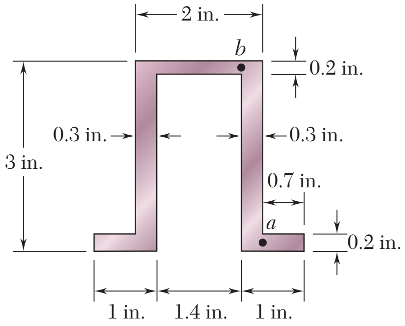

2 in.
b
0.2 in.
0.3 in.
0.3 in.
3 in.
0.7 in.
a
0.2 in.
1 in.
1.4 in.
1 in.

Figura P6.35

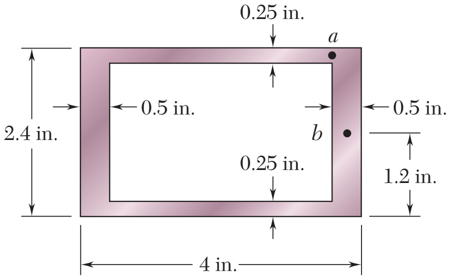

0.25 in.
a
0.5 in.
0.5 in.
2.4 in.
b
0.25 in.
1.2 in.
4 in.

Figura *P6.36*

6.36 Una viga extruida de aluminio tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 10 kips, determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

6.37 Una viga extruida tiene la sección transversal que se muestra en la figura y un grosor de pared uniforme de 0.20 in. Si se sabe que un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo cortante máximo $\tau = 9$ ksi, determine el esfuerzo cortante en los cuatro puntos indicados.

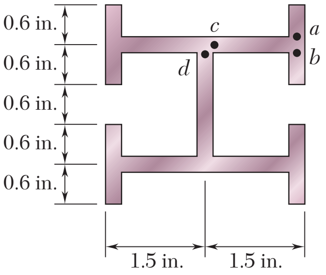

0.6 in.
0.6 in.
0.6 in.
0.6 in.
0.6 in.
c
a
b
d
1.5 in.
1.5 in.

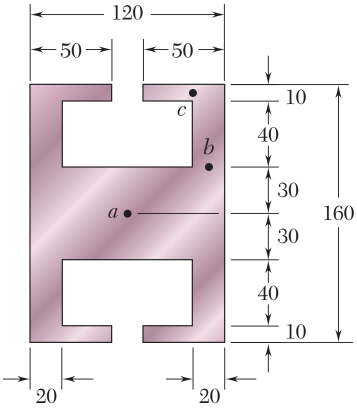
Figura P6.37

6.38 Retome el problema 6.37, y ahora suponga que la viga está sometida a un cortante horizontal **V**.

6.39 Si se sabe que un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo cortante máximo de 75 MPa en una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada, determine el esfuerzo cortante en los tres puntos indicados.

6.40 Retome el problema 6.39, y ahora suponga que la viga está sometida a un cortante horizontal **V**.

6.41 El cortante vertical es de 25 kN en una viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si se sabe que $d = 50$ mm, determine el esfuerzo cortante *a*) en el punto *a*, *b*) en el punto *b*.



Dimensiones en mm

Figura P6.39

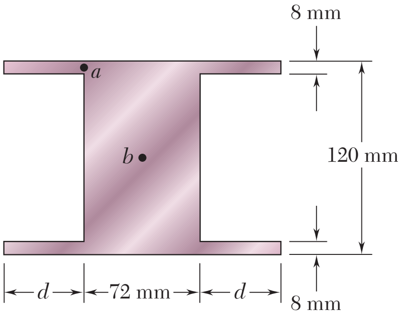


Figura P6.41 y P6.42

6.42 El cortante vertical es de 25 kN en una viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Determine *a*) la distancia *d* para la cual $\tau_a = \tau_b$, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en los puntos *a* y *b*.

6.43 Tres tablas están conectadas como se muestra en la figura mediante pernos de 14 mm de diámetro, espaciados cada 150 mm a lo largo del eje longitudinal de la viga. Determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos, para un cortante vertical de 10 kN.

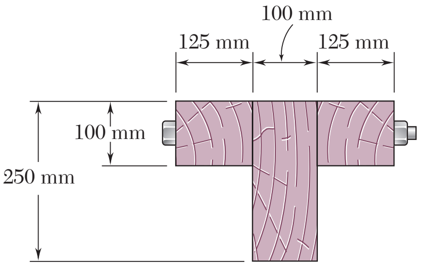


Figura P6.43

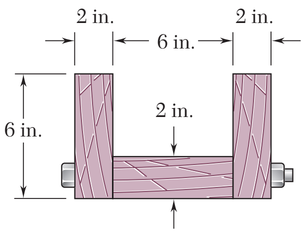


Figura P6.44

6.44 Una viga consiste en tres tablas conectadas mediante pernos de $\frac{3}{8}$ in. de diámetro, espaciados cada 12 in. a lo largo del eje longitudinal de la viga. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 2 500 lb, determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos.

6.45 Cuatro ángulos de acero L102 × 102 × 9.5 y una placa de acero de 12 × 400 mm se unen con pernos para formar una viga con la sección transversal que se muestra en la figura. Los pernos tienen un diámetro de 22 mm y están espaciados longitudinalmente cada 120 mm. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 240 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en cada perno.

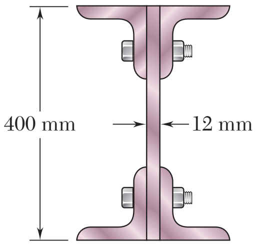


Figura P6.45

6.46 Tres placas de acero de 1 × 18 in. se unen con pernos a cuatro ángulos L6 × 6 × 1 para formar una viga con la sección transversal que se muestra en la figura. Los pernos tienen un diámetro de $\frac{7}{8}$ in. y están espaciados longitudinalmente cada 5 in. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 12 ksi, determine el máximo cortante vertical permisible en la viga. (*Dato*: I_x = 6 123 in.^{4})

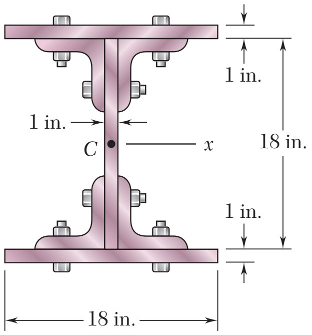


Figura P6.46

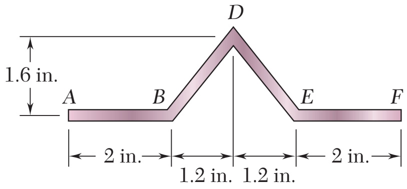


Figura *P6.47*

6.47 Una placa de $\frac{1}{4}$ in. de espesor se corruga de la forma mostrada en la figura y después se emplea como viga. Para un cortante vertical de 1.2 kips, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en la sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *B*. También elabore un esquema del flujo cortante en la sección transversal.

6.48 Una viga extruida con la sección transversal que se muestra en la figura y un espesor de pared de 3 mm está sujeta a un cortante vertical de 10 kN. Determine *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. También bosqueje el flujo cortante en la sección transversal.

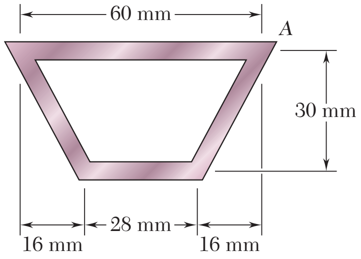


Figura P6.48

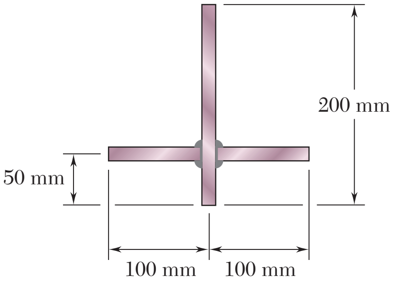


Figura P6.49

6.49 Tres placas, cada una de 12 mm de espesor, se sueldan para formar la sección mostrada en la figura. Para un cortante vertical de 100 kN, determine el flujo cortante a través de las superficies soldadas y bosqueje el flujo cortante en la sección transversal.

6.50 Una placa de espesor *t* se dobla como lo muestra la figura y después se usa como viga. Para un cortante vertical de 600 lb, determine *a*) el espesor *t* para el cual el máximo esfuerzo cortante es de 300 psi, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en el punto *E*. También elabore un esquema del flujo cortante en la sección transversal.

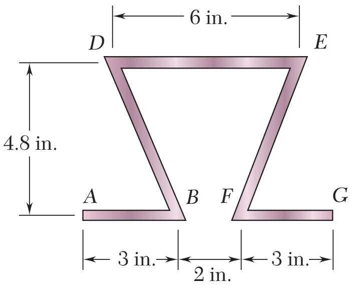


Figura *P6.50*

6.51 y 6.52 Una viga extruida tiene un espesor uniforme de pared t. Si se denota con $\mathbf{V}$ el cortante vertical y con A el área transversal de la viga, exprese el esfuerzo cortante máximo como $\tau_{\text{máx}} = k(V/A)$ y determine la constante k para cada una de las dos orientaciones mostradas.

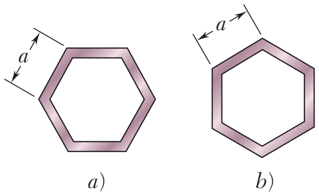


Figura P6.51

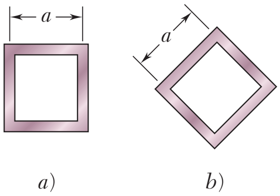


Figura P6.52

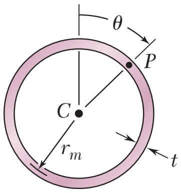


Figura P6.53

6.53 *a*) Determine el esfuerzo cortante en el punto P de un tubo de pared delgada, con la sección transversal que se muestra en la figura, causado por un cortante vertical $\mathbf{V}$. *b*) Muestre que el máximo esfuerzo cortante ocurre para $\theta = 90°$ y que es igual a $2V/A$ donde A es el área de la sección transversal del tubo.

6.54 El diseño de una viga requiere soldar cuatro placas horizontales a una placa vertical de 0.5 × 5 in. como se muestra en la figura. Para un cortante vertical $\mathbf{V}$, determine la dimensión h para la que el flujo cortante a través de las superficies soldadas es máximo.

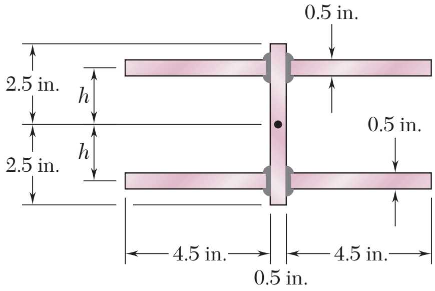


Figura P6.54

6.55 Para una viga hecha de dos o más materiales con diferentes módulos de elasticidad, muestre que la ecuación (6.6)

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It}$$

permanece válida si tanto Q como I se calculan utilizando la sección transformada de la viga (vea la sección 4.6) y además si t es el ancho real de la viga donde se calcula τ_{prom}.

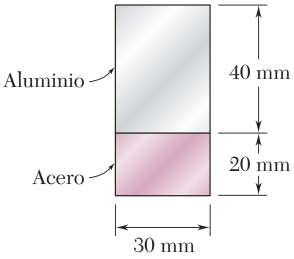


Figura *P6.56*

6.56 Una barra de acero y una barra de aluminio están unidas como se muestra en la figura para formar una viga compuesta. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 20 kN y que el módulo de elasticidad es de 210 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio, determine *a*) el esfuerzo promedio en la superficie pegada, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

6.57 Una barra de acero y una barra de aluminio están pegadas como se muestra en la figura para formar una viga compuesta. Si se sabe el cortante vertical en la viga es de 4 kips y que el módulo de elasticidad es de 29×10^6 psi para el acero y 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine *a*) el esfuerzo promedio en la superficie pegada, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

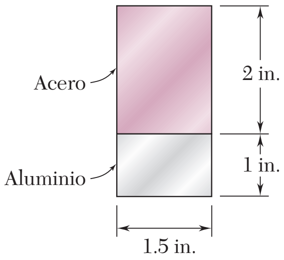


Figura P6.57

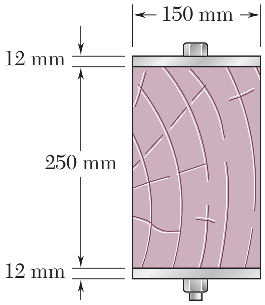


Figura *P6.58*

6.58 Una viga compuesta se fabrica al unir las porciones de madera y de acero que se muestran en la figura con pernos de 12 mm de diámetro espaciados longitudinalmente cada 200 mm. El módulo de elasticidad es de 10 GPa para la madera y de 200 GPa para el acero. Para un cortante vertical de 4 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en los pernos, *b*) el esfuerzo cortante en el centro de la sección transversal. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

6.59 Una viga compuesta se fabrica con la unión de las porciones de madera y de acero que se muestran en la figura con pernos de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro espaciados longitudinalmente cada 8 in. El módulo de elasticidad es de 1.9×10^6 psi para la madera y de 29×10^6 psi para el acero. Para un cortante vertical de 4 000 lb, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en los pernos, *b*) el esfuerzo cortante en el centro de la sección transversal. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

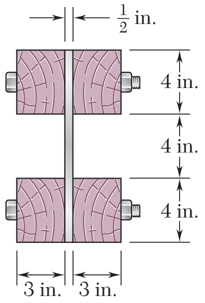


Figura P6.59

6.60 Considere la viga en voladizo *AB* analizada en la sección 6.8 y la porción *ACKJ* de la viga que está localizada a la izquierda de la sección transversal *CC*′ y por encima del plano horizontal *JK*, donde *K* es un punto a una distancia $y < y_Y$ por encima del eje neutro (figura P6.60). *a*) Si se considera que $\sigma_x = \sigma_Y$ entre *C* y *E* y $\sigma_x = (\sigma_Y/y_Y)y$ entre *E* y *K*, muestre que la magnitud de la fuerza cortante horizontal **H** ejercida sobre la cara inferior de la porción de la viga *ACKJ* es

$$H = \frac{1}{2} b\sigma_Y\left(2c - y_Y - \frac{y^2}{y_Y}\right)$$

b) Si se observa que el esfuerzo cortante en *K* es

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b}\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b}\frac{\partial H}{\partial x}$$

y se recuerda que y_Y es una función de x definida por la ecuación (6.14), deduzca la ecuación (6.15).

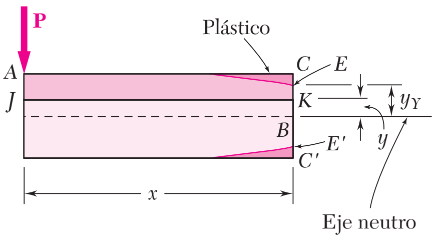


Figura P6.60

*6.9 CARGA ASIMÉTRICA DE ELEMENTOS DE PARED DELGADA. CENTRO DE CORTANTE

El análisis de los efectos de cargas transversales en el capítulo 5 y en las secciones precedentes se limitó a elementos con un plano vertical de simetría y a cargas aplicadas en ese plano. Se observó que los elementos se flexionaban en el plano de carga (figura 6.42) y en cualquier sección transversal, el momento flector **M** y el cortante **V** (figura 6.43) fueron a parar en esfuerzos normales y cortantes definidos, respectivamente, por las ecuaciones:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

y

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

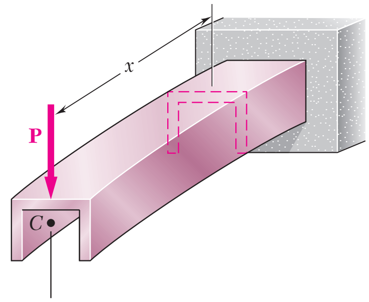
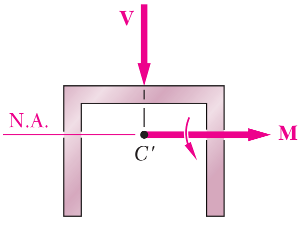


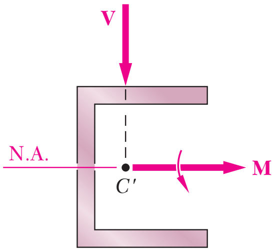
Figura 6.42

En esta sección se analizarán los efectos de cargas transversales en *elementos de pared delgada sin plano vertical de simetría*. Suponga, por ejemplo, que el elemento en canal de la figura 6.42 ha girado 90° y que la línea de acción de **P** pasa todavía por el centroide de la sección final. El vector par **M** que representa el momento flector en una sección dada todavía se dirige a lo largo del eje principal de la sección (figura 6.44), y el eje neutro coincidirá con ese eje (véase sección 4.13). Por tanto, la ecuación (4.16) se aplica y puede utilizarse para calcular los esfuerzos normales en la sección. Sin embargo, la ecuación (6.6) no puede usarse para calcular los esfuerzos cortantes en la sección, ya que se dedujo para un cuerpo con un plano vertical de simetría (véase sección 6.7). En realidad, se observará que el elemento se *flexionará y torcerá* bajo la carga aplicada (figura 6.45) y la distribución resultante de esfuerzos cortantes será muy diferente de la definida por la ecuación (6.6).



$(V = P, M = Px)$

Figura 6.43



$(V = P, M = Px)$

Figura 6.44

Ahora surge la siguiente pregunta: ¿Es posible aplicar la carga vertical **P** de tal manera que el elemento en canal de la figura 6.45 *se flexione sin torsión*?; y si es así, ¿dónde debe aplicarse **P**? Si el elemento se flexiona sin torsión, entonces el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección puede obtenerse de la ecuación (6.6), en donde Q es el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro (figura 6.46a), y la distribución de esfuerzos será la de la figura 6.46b, con $\tau = 0$ tanto en A como en E. Se nota

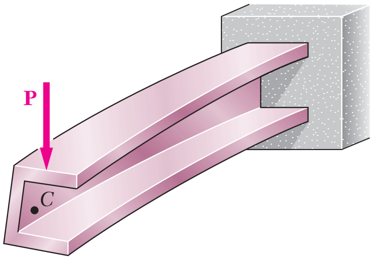
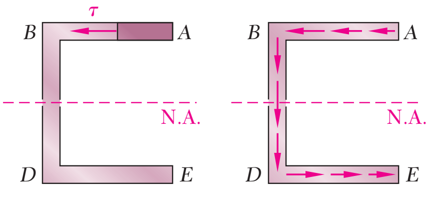


Figura 6.45

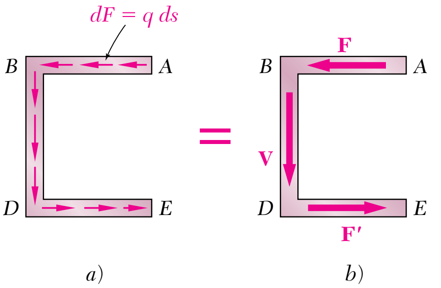


a)   *b*)

Figura 6.46

que la fuerza cortante ejercida sobre un pequeño elemento de área $dA = t\,ds$ es $dF = \tau dA = \tau t\,ds$, o $dF = q\,ds$ (figura 6.47*a*), donde q es el flujo de cortante $q = \tau t = VQ/I$ en el punto considerado. Se encuentra que la resultante de las fuerzas cortantes ejercida sobre los elementos de la aleta superior *AB* del canal es una fuerza horizontal **F** (figura 6.47*b*) de magnitud

$$F = \int_A^B q\,ds \qquad (6.17)$$



a) *b*)

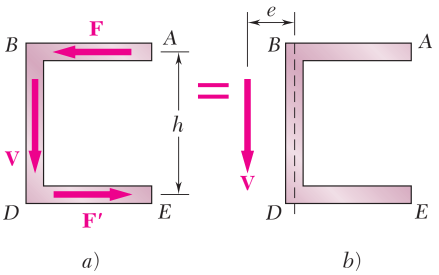
Figura 6.47

Debido a la simetría del canal con respecto a su eje neutro, la resultante de las fuerzas cortantes ejercida sobre la aleta inferior *DE* es una fuerza **F′** de igual magnitud a **F** pero de sentido contrario. Se concluye que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre el alma *BD* debe ser igual a la fuerza cortante vertical **V** en la sección:

$$V = \int_B^D q\,ds \qquad (6.18)$$

Ahora se observa que las fuerzas **F** y **F′** forman un par de momento Fh, donde h es la distancia entre las líneas centrales de las aletas *AB* y *DE* (figura 6.48*a*). Este par puede eliminarse si el cortante vertical **V** se mueve a la izquierda a una distancia e tal que el momento de **V** con respecto a *B* sea igual a Fh (figura 6.48*b*). Se escribe $Ve = Fh$ o

$$e = \frac{Fh}{V} \qquad (6.19)$$



a) *b*)

Figura 6.48

y se concluye que, cuando la fuerza **P** se aplica a una distancia e a la izquierda de la línea central del alma *BD*, el elemento se flexiona sin torsión en un plano vertical (figura 6.49).

El punto *O*, donde la línea de acción de **P** corta el eje de simetría de la sección externa, es el *centro de cortante* de la sección. Note que en el caso de una carga oblicua **P** (figura 6.50*a*), el elemento también estará libre de cualquier torsión si la carga **P** se aplica en el centro de cortante de la sección. En realidad, la carga **P** puede descomponerse en dos componentes $\mathbf{P}_z$ y $\mathbf{P}_y$ (figura 6.50*b*) correspondientes, respectivamente, a las condiciones de carga de las figuras 6.42 y 6.49, ninguna de las cuales hace que el elemento se torsione.

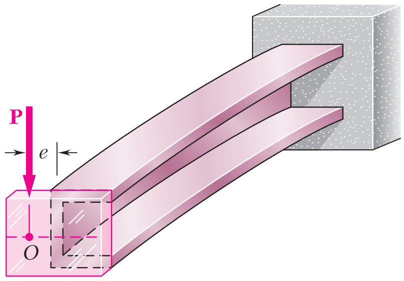
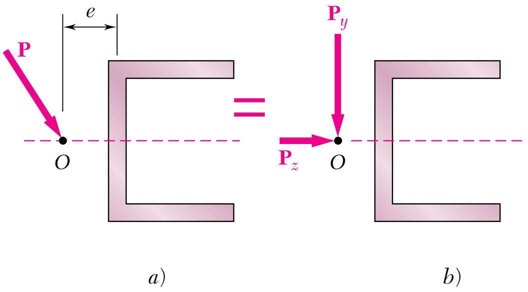


Figura 6.49



a) *b*)

Figura 6.50

EJEMPLO 6.05

Determine el centro de cortante O de una sección en canal de espesor uniforme (figura 6.51), considerando que $b = 4$ in., $h = 6$ in. y $t = 0.15$ in.

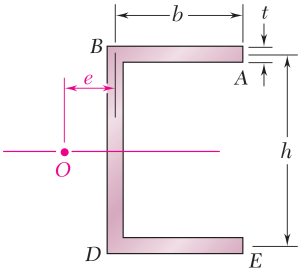


Figura 6.51

Suponiendo que el elemento no está torcido, se obtiene primero el flujo de cortante q en la aleta AB a una distancia s de A (figura 6.52). Recordando la ecuación (6.5) y observando que el primer momento Q del área sombreada con respecto al eje neutro es $Q = (st)(h/2)$, se escribe

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I} \tag{6.20}$$

donde V es el cortante vertical e I el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.

Recordando la ecuación (6.17), se determina la magnitud de la fuerza cortante $\mathbf{F}$ ejercida sobre la aleta AB integrando el flujo de cortante q desde A hasta B:

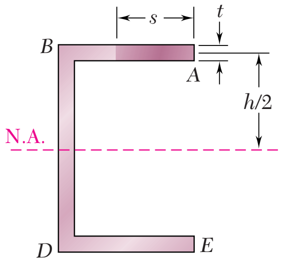


Figura 6.52

$$F = \int_0^b q\,ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \tag{6.21}$$

La distancia e desde la línea central del alma BD al centro de cortante O puede obtenerse ahora de la ecuación (6.19):

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I}\frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I} \tag{6.22}$$

El momento de inercia I de la sección canal puede expresarse como:

$$I = I_{\text{alma}} + 2I_{\text{aleta}}$$

$$= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

Olvidando el término en t^3, por muy pequeño, se tiene

$$I = \tfrac{1}{12}th^3 + \tfrac{1}{2}tbh^2 = \tfrac{1}{12}th^2(6b + h) \tag{6.23}$$

Sustituyendo esta expresión en la (6.22), se escribe

$$e = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{b}{2 + \dfrac{h}{3b}} \tag{6.24}$$

Se nota que la distancia e no depende de t y que puede variar de 0 a $b/2$, de acuerdo con el valor de la relación $h/3b$. Para la sección de canal dada, se tiene

$$\frac{h}{3b} = \frac{6 \text{ in.}}{3(4 \text{ in.})} = 0.5$$

y

$$e = \frac{4 \text{ in.}}{2 + 0.5} = 1.6 \text{ in.}$$

EJEMPLO 6.06

Para la sección en canal del ejemplo 6.05, halle la distribución de esfuerzos cortantes producidos por un cortante vertical **V** de 2.5 kips aplicado en el centro de cortante *O* (figura 6.53).

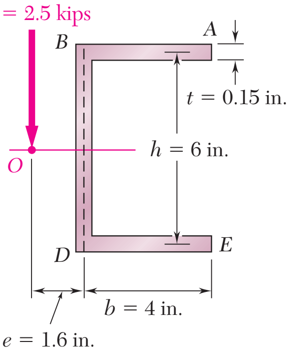


Figura 6.53

Esfuerzos cortantes en las aletas. Como **V** se aplica en el centro de cortante, no hay torsión y los esfuerzos en la aleta *AB* se obtienen de la ecuación (6.20), del ejemplo 6.05. Se tiene

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I}s \tag{6.25}$$

que muestra que la distribución de esfuerzos en la aleta *AB* es lineal. Haciendo $s = b$ y sustituyendo por I de la ecuación (6.23), se obtiene el valor del esfuerzo cortante en B:

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2(\frac{1}{12}th^2)(6b + h)} = \frac{6Vb}{th(6b + h)} \tag{6.26}$$

Haciendo $V = 2.5$ kips y usando las dimensiones dadas,

$$\tau_B = \frac{6(2.5\text{ kips})(4\text{ in.})}{(0.15\text{ in.})(6\text{ in.})(6 \times 4\text{ in.} + 6\text{ in.})}$$
$$= 2.22\text{ ksi}$$

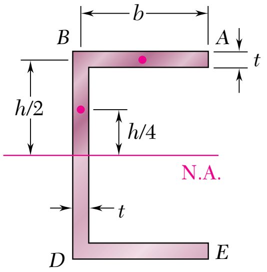


Figura 6.54

Esfuerzos cortantes en el alma. La distribución de los esfuerzos cortantes en el alma *BD* es parabólica, como en el caso de la viga W, y el máximo esfuerzo ocurre en el eje neutro. Calculando el primer momento de la mitad superior de la sección transversal con respecto al eje neutro (figura 6.54), se escribe

$$Q = bt(\tfrac{1}{2}h) + \tfrac{1}{2}ht(\tfrac{1}{4}h) = \tfrac{1}{8}ht(4b + h) \tag{6.27}$$

Sustituyendo por I y Q de (6.23) y (6.27), respectivamente, en la expresión para el esfuerzo cortante, se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{8}ht)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

o, con los datos dados

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3(2.5\text{ kips})(4 \times 4\text{ in.} + 6\text{ in.})}{2(0.15\text{ in.})(6\text{ in.})(6 \times 4\text{ in.} + 6\text{ in.})}$$
$$= 3.06\text{ ksi}$$

Distribución de esfuerzos sobre la sección. En la figura 6.55 se muestra la gráfica de la distribución de esfuerzos cortantes sobre la sección completa del canal.

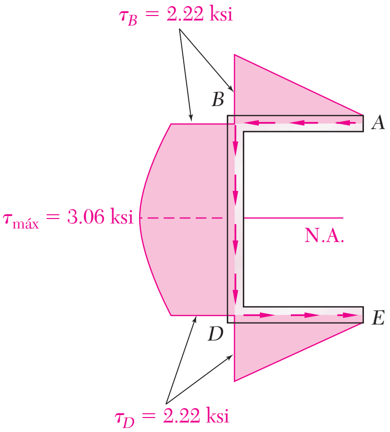


Figura 6.55

EJEMPLO 6.07

Para la sección en canal del ejemplo 6.05, y despreciando concentraciones de esfuerzos, determine el máximo esfuerzo cortante causado por una fuerza cortante vertical **V** de 2.5 kips aplicada en el centroide *C* de la sección, que está localizado a 1.143 in. a la derecha de la línea central del alma *BD* (figura 6.56).

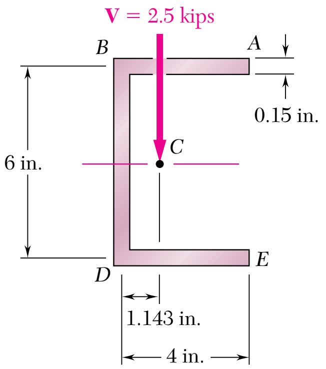


Figura 6.56

Sistema equivalente fuerza-par en el centro del cortante. El centro de cortante *O* de la sección transversal se determinó en el ejemplo 6.05 y se encontró a una distancia $e = 1.6$ in. a la izquierda de la línea central del alma *BD*. El cortante **V** (figura 6.57*a*) se reemplazará por un sistema equivalente fuerza-par en el centro de cortante *O* (figura 6.57*b*). Este sistema consta de una fuerza **V** de 2.5 kips y de un par de torsión **T** de magnitud

$$\begin{aligned} T &= V(OC) = (2.5 \text{ kips})(1.6 \text{ in.} + 1.143 \text{ in.}) \\ &= 6.86 \text{ kips} \cdot \text{in.} \end{aligned}$$

Esfuerzos debidos a la flexión. La fuerza **V** de 2.5 kips flexiona el elemento, y la distribución correspondiente de esfuerzos cortantes en la sección (figura 6.57*c*) se determinó en el ejemplo 6.06. Recuerde que el máximo valor del esfuerzo debido a esta fuerza era

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{flexión}} = 3.06 \text{ ksi}$$

Esfuerzos debidos a la torsión. El par **T** torsiona el elemento y la correspondiente distribución de esfuerzos se ilustra en la figura 6.57*d*. Recuerde, de la sección 3.12, que la analogía de la membrana muestra que, en un elemento de pared delgada de espesor uniforme, el esfuerzo causado por un par de torsión **T** es máximo a lo largo del borde de la sección. Usando las ecuaciones (3.45) y (3.43)

$$\begin{aligned} a &= 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.} + 4 \text{ in.} = 14 \text{ in.} \\ b &= t = 0.15 \text{ in.} \qquad b/a = 0.0107 \end{aligned}$$

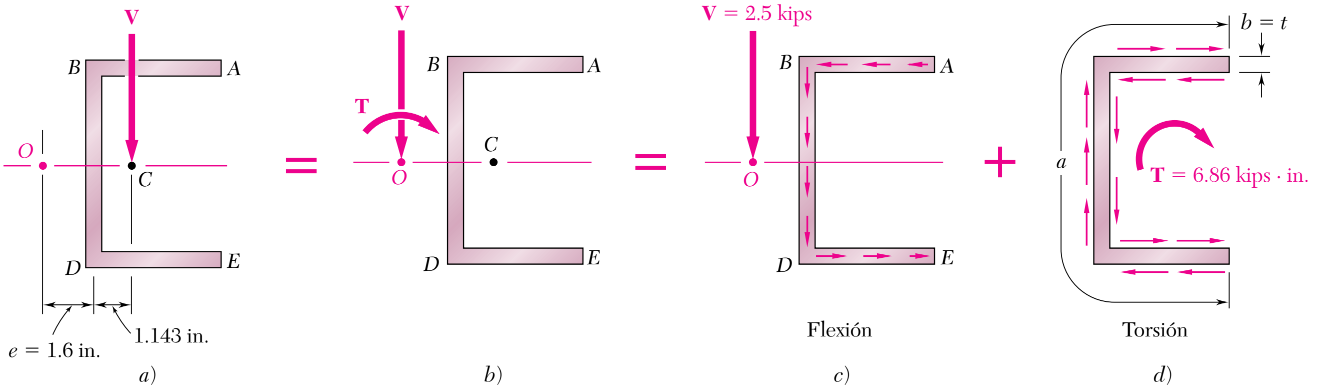
se tiene

$$c_1 = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630b/a) = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630 \times 0.0107) = 0.331$$

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{torsión}} = \frac{T}{c_1 a b^2} = \frac{6.86 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{(0.331)(14 \text{ in.})(0.15 \text{ in.})^2} = 65.8 \text{ ksi}$$

Esfuerzos combinados. El esfuerzo máximo debido a flexión y torsión combinada ocurre en el eje neutro, en la superficie interna del alma, y es

$$\tau_{\text{máx}} = 3.06 \text{ ksi} + 65.8 \text{ ksi} = 68.9 \text{ ksi}$$



a) *b*) *c*) *d*)

Figura 6.57

Volviendo la atención a elementos de pared delgada sin plano de simetría, considere el caso de un ángulo sometido a una carga vertical **P**. Si el elemento se orienta de manera que la carga **P** sea perpendicular a uno de los ejes principales centroidales Cz de la sección, el vector par **M**, que representa el momento flector en una sección dada, se dirigirá a lo largo de Cz (figura 6.58) y el eje neutro coincidirá con ese eje (véase sección 4.13). La ecuación (4.16) es aplicable y puede usarse para calcular los esfuerzos normales en la sección. Ahora se debe determinar dónde se aplica la fuerza **P** si la ecuación (6.6) ha de definir los esfuerzos cortantes en la sección, es decir, si el elemento ha de *flexionarse sin torsión*.

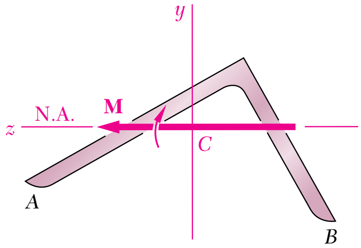


Figura 6.58

Suponga que los esfuerzos cortantes en la sección están dados por la ecuación (6.6). Como en el caso de la sección en canal considerada antes, las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la sección pueden expresarse como $dF = q\,ds$, con $q = VQ/I$, donde Q es el primer momento con respecto al eje neutro (figura 6.59*a*).

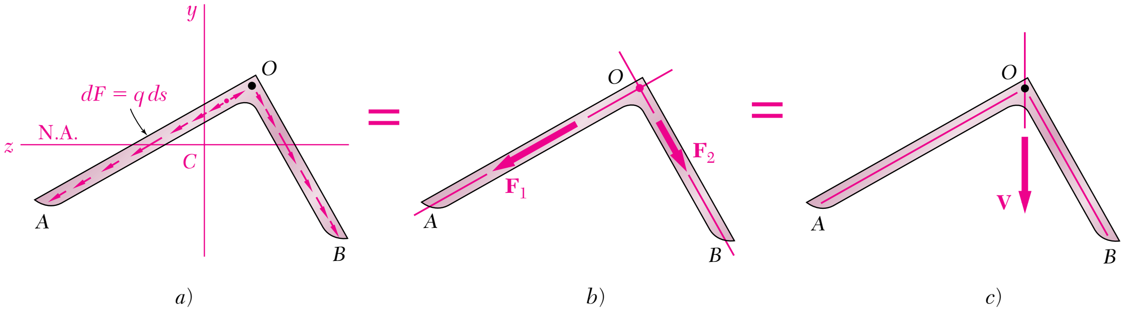


Figura 6.59

Observe que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre la porción OA de la sección es una fuerza $\mathbf{F}_1$ dirigida según OA, y que la resultante de las fuerzas cortantes en OB es una fuerza $\mathbf{F}_2$ aplicada a lo largo de OB (figura 6.59*b*). Como $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ pasan por el punto O en la esquina del ángulo, se sigue que su propia resultante, que es el cortante **V** de la sección, debe pasar también por O (figura 6.59*c*). Se concluye que el elemento no se torcerá si la línea de acción de **P** pasa por la esquina O de la sección en la cual se aplica.

El mismo razonamiento puede aplicarse cuando la carga **P** es perpendicular al otro eje principal centroidal Cy de la sección. Y, como cualquier carga **P** aplicada en la esquina O de la sección puede descomponerse en componentes perpendiculares a los ejes principales, se sigue que el elemento no se torsionará si cada carga se aplica en la esquina O de la sección. Se concluye que O es el centro de cortante de la sección.

En muchas estructuras se usan ángulos colocados de tal manera que una de sus aletas queda vertical y la otra horizontal. Del análisis anterior se sigue que tales elementos no se torcerán si se aplican fuerzas verticales a lo largo de la línea central de su aleta vertical. Observe en la figura 6.60 que la

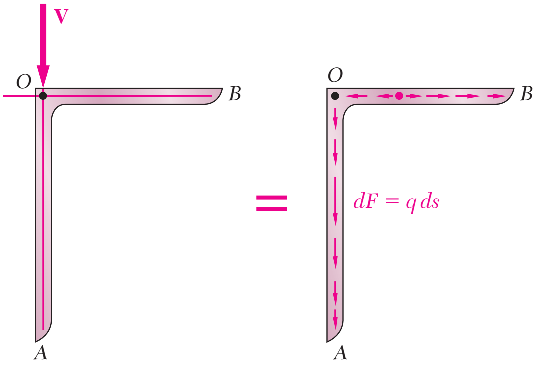


Figura 6.60

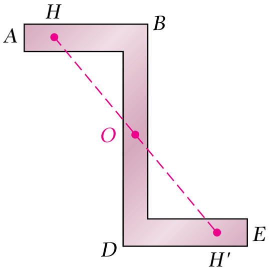


Figura 6.61

resultante de las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la porción vertical *OA* de una sección dada será igual al cortante **V**, mientras la resultante de las fuerzas cortantes en la porción horizontal *OB* será cero.

$$\int_O^A q\,ds = V \qquad \int_O^B q\,ds = 0$$

Esto *no* significa, sin embargo, que no habrá esfuerzo cortante en el ala horizontal del elemento. Descomponiendo el cortante **V** en componentes perpendiculares a los ejes principales centroidales de la sección y calculando el esfuerzo cortante en todo punto, se comprobaría que τ es cero en sólo un punto entre *O* y *B* (véase problema modelo 6.6).

Otro tipo de elemento de pared delgada que se encuentra con frecuencia en la práctica es la forma Z. Aunque la sección transversal de un perfil Z no posee ejes de simetría, sí posee un *centro de simetría O* (figura 6.61). Esto significa que a cualquier punto *H* de la sección transversal, corresponde otro punto *H'* tal que el segmento *HH'* es bisecado por *O*. Claramente, el centro de simetría *O* coincide con el centroide de la sección transversal. Como se verá pronto, el punto *O* es también el centro de cortante de la sección.

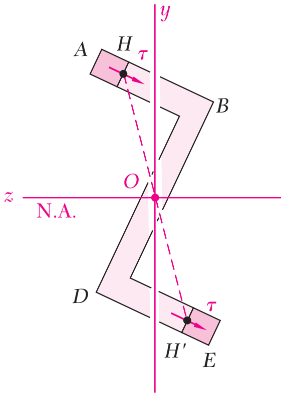


Figura 6.62

Como se hizo antes en el caso del perfil angular, se supondrá que las cargas se aplican en un plano perpendicular a uno de los ejes principales de la sección de modo que este eje es también el eje neutro de la sección (figura 6.62). Además se supone que los esfuerzos cortantes en la sección se definen por la ecuación (6.6), es decir, que el elemento se flexiona sin torsión. Si *Q* es el primer momento con respecto al eje neutro de la porción *AH* de la sección transversal y *Q'* es el primer momento de la porción *EH'*, se nota que $Q' = -Q$. Así, los esfuerzos cortantes en *H* y *H'* tienen la misma magnitud y dirección, y las fuerzas cortantes ejercidas sobre pequeños elementos de área *dA* localizados, respectivamente, en *H* y *H'* son fuerzas iguales que tienen momentos iguales y opuestos con respecto a *O* (figura 6.63). Puesto que esto es cierto para cualquier par de elementos simétricos, se sigue que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección tiene un momento nulo con respecto a *O*. Esto significa que el cortante **V**, en la sección, se dirige a lo largo de una línea que pasa por *O*. Como este análisis puede repetirse cuando las cargas se aplican en un plano perpendicular al otro eje principal, se concluye que *O* es el centro de cortante de la sección.

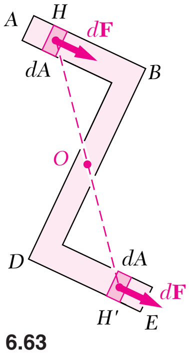
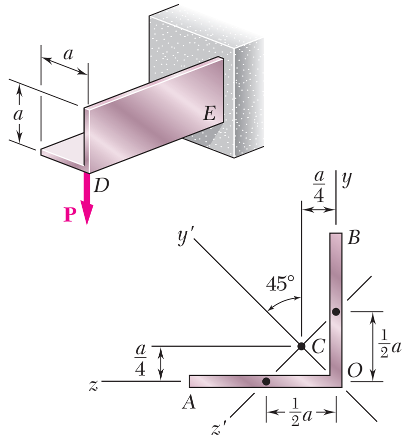


Figura 6.63

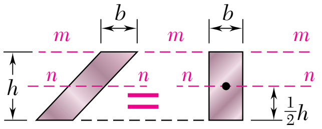
PROBLEMA MODELO 6.6

Determine la distribución de esfuerzos cortantes en el perfil angular delgado *DE* de espesor uniforme *t*, para la carga mostrada en la figura.


a
a
E
D
P
$\frac{a}{4}$
y
y'
B
45°
C
$\frac{1}{2}a$
$\frac{a}{4}$
O
z
A
z'
$\frac{1}{2}a$

SOLUCIÓN

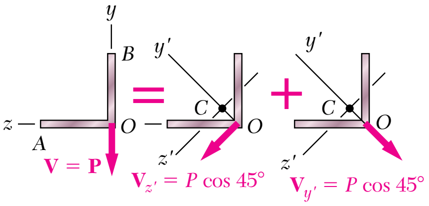
Centro de cortante. Recuerde, de la sección 6.9, que el centro cortante de la sección transversal de un perfil angular delgado está en su esquina. Como la carga **P** se aplica en *D*, causa flexión pero no torsión del perfil.


b
b
m
m
m
h
n
n
n
n
$\frac{1}{2}h$

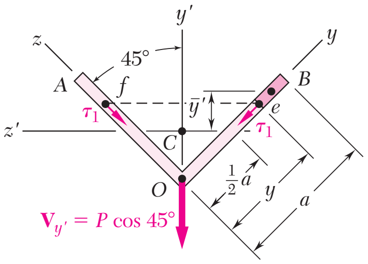
Ejes principales. Se localiza el centroide *C* de la sección dada *AOB*. Como el eje y' es un eje de simetría, los ejes y' y z' son los ejes principales centroidales de la sección. Recuerde que para el paralelogramo mostrado $I_{nn} = \frac{1}{12}bh^3$ e $I_{mm} = \frac{1}{3}bh^3$. Considerando cada aleta como un paralelogramo, determine los momentos centroidales de inercia $I_{y'}$ e $I_{z'}$:

$$I_{y'} = 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a\cos 45°)^3\right] = \frac{1}{3}ta^3$$

$$I_{z'} = 2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a\cos 45°)^3\right] = \frac{1}{12}ta^3$$


y
B
y'
y'
z
O
C
O
C
O
A
z'
z'
$\mathbf{V} = \mathbf{P}$
$\mathbf{V}_{z'} = P\cos 45°$
$\mathbf{V}_{y'} = P\cos 45°$

Superposición. El cortante **V** en la sección es igual a la carga **P**. Se descompone en componentes paralelas a los ejes principales.


y'
z
y
45°
A
f
B
τ_1
$\bar{y}'$
e
τ_1
z'
C
$\frac{1}{2}a$
y
a
O
$\mathbf{V}_{y'} = P\cos 45°$

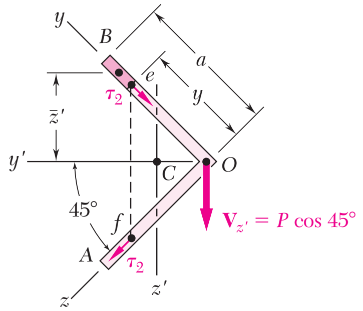
Esfuerzos cortantes debidos a $\mathbf{V}_{y'}$. Se halla el esfuerzo cortante en el punto *e* de coordenada *y*:

$$\bar{y}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45° - \tfrac{1}{2}a\cos 45° = \tfrac{1}{2}y\cos 45°$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \tfrac{1}{2}t(a - y)y\cos 45°$$

$$\tau_1 = \frac{V_{y'}Q}{I_{z'}t} = \frac{(P\cos 45°)\left[\frac{1}{2}t(a - y)y\cos 45°\right]}{\left(\frac{1}{12}ta^3\right)t} = \frac{3P(a - y)y}{ta^3}$$

El esfuerzo cortante en el punto *f* está representado por una función similar de *z*.


y
B
a
e
τ_2
y
$\bar{z}'$
y'
C
O
45°
f
A
τ_2
z
z'
$\mathbf{V}_{z'} = P\cos 45°$

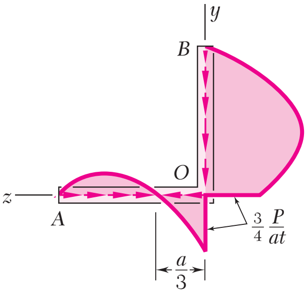
Esfuerzos cortantes debidos a $\mathbf{V}_{z'}$. Considere de nuevo el punto *e*:

$$\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45°$$

$$Q = (a - y)t\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a^2 - y^2)t\cos 45°$$

$$\tau_2 = \frac{V_{z'}Q}{I_{y'}t} = \frac{(P\cos 45°)\left[\frac{1}{2}(a^2 - y^2)t\cos 45°\right]}{\left(\frac{1}{3}ta^3\right)t} = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3}$$

El esfuerzo cortante en el punto *f* está representado por una función similar de *z*.


y
B
O
z
A
$\frac{3}{4}\frac{P}{at}$
$\frac{a}{3}$

Esfuerzos combinados. ***A lo largo de la aleta vertical.*** El esfuerzo cortante en el punto *e* es

$$\tau_e = \tau_2 + \tau_1 = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3} + \frac{3P(a - y)y}{ta^3} = \frac{3P(a - y)}{4ta^3}[(a + y) + 4y]$$

$$\tau_e = \frac{3P(a - y)(a + 5y)}{4ta^3} \quad ◀$$

A lo largo de la aleta horizontal. El esfuerzo cortante en el punto *f* es

$$\tau_f = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3P(a^2 - z^2)}{4ta^3} - \frac{3P(a - z)z}{ta^3} = \frac{3P(a - z)}{4ta^3}[(a + z) - 4z]$$

$$\tau_f = \frac{3P(a - z)(a - 3z)}{4ta^3} \quad ◀$$

PROBLEMAS

6.61 a 6.64 Determine la localización del centro de cortante O de una viga de pared delgada con espesor uniforme que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

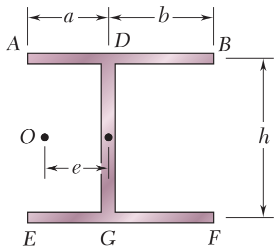

a
b
A
D
B
O
e
h
E
G
F

Figura P6.61

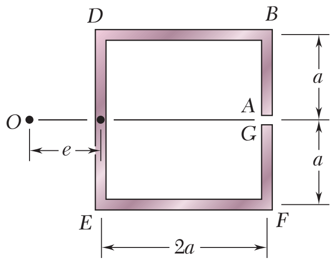

D
B
a
A
O
G
e
a
E
F
2a

Figura P6.62

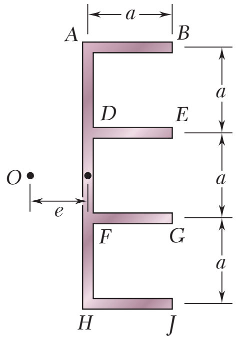

a
A
B
a
D
E
O
a
e
F
G
a
H
J

Figura P6.63

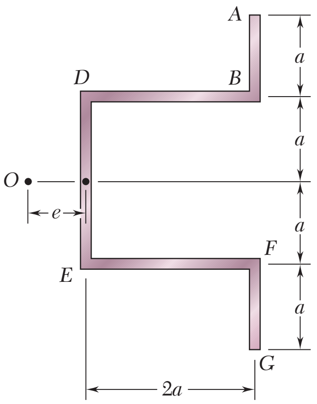

A
a
D
B
a
O
e
a
F
E
a
G
2a

Figura P6.64

6.65* y *6.66 Una viga extruida tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine *a*) la localización del centro de cortante O, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por una fuerza cortante vertical de 2.75 kip que se aplica en O.

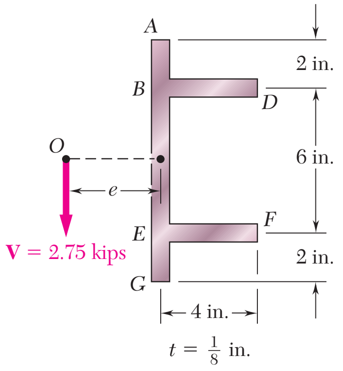

A
2 in.
B
D
O
6 in.
e
F
E
V = 2.75 kips
2 in.
G
4 in.
t = 1/8 in.

Figura *P6.65*

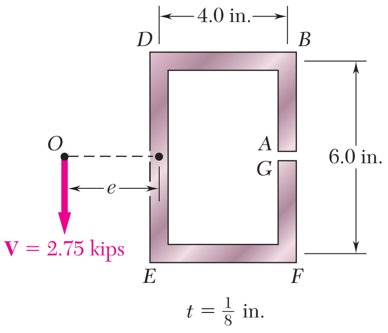

4.0 in.
D
B
O
A
6.0 in.
G
e
V = 2.75 kips
E
F
t = 1/8 in.

Figura *P6.66*

6.67 y 6.68 Para una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada en la figura, determine *a*) la localización del centro de cortante *O*, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por la fuerza cortante vertical **V** que se muestra en la figura y que se aplica en *O*.

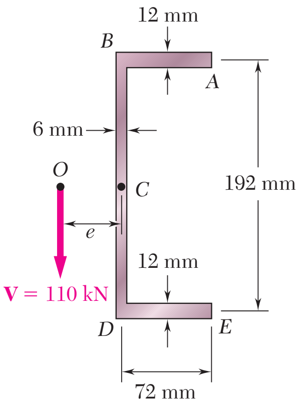

12 mm
B
A
6 mm
O
C
192 mm
e
12 mm
V = 110 kN
D
E
72 mm

Figura P6.67

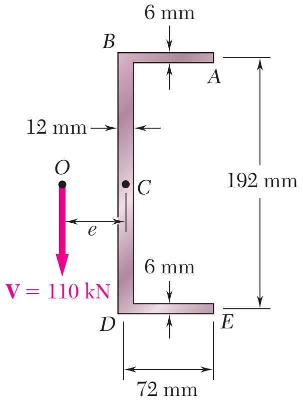

6 mm
B
A
12 mm
O
C
192 mm
e
6 mm
V = 110 kN
D
E
72 mm

Figura P6.68

6.69 a *6.74* Determine la localización del centro de cortante *O* de una viga de pared delgada con espesor uniforme que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

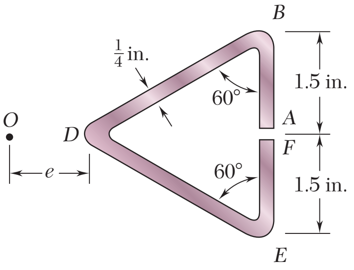

B
$\frac{1}{4}$ in.
60°
1.5 in.
O
D
A
F
e
60°
1.5 in.
E

Figura P6.69

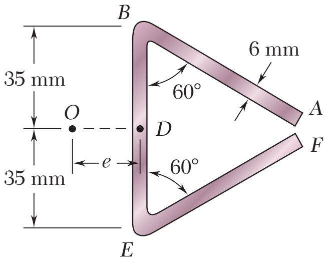

B
6 mm
35 mm
60°
A
O
D
F
e
35 mm
60°
E

Figura P6.70

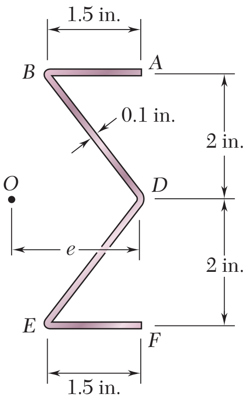

1.5 in.
A
B
0.1 in.
2 in.
O
D
e
2 in.
E
F
1.5 in.

Figura P6.71

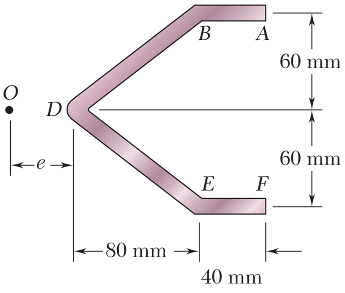

B
A
60 mm
O
D
e
60 mm
E
F
80 mm
40 mm

Figura P6.72

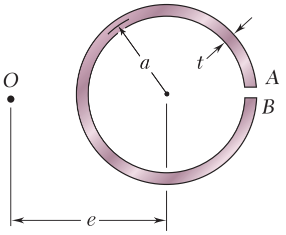


Figura *P6.73*

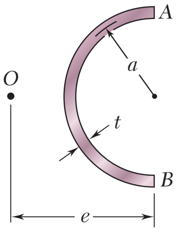


Figura *P6.74*

6.75 y 6.76 Una viga de pared delgada con espesor uniforme tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la localización del centro de cortante O de la sección transversal.

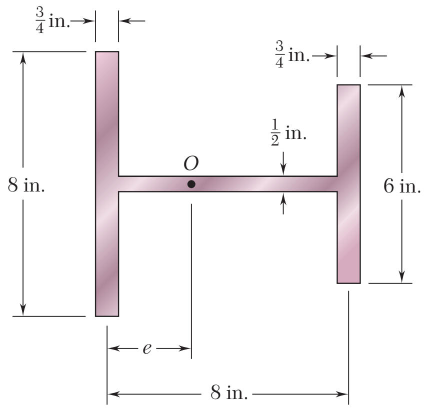


Figura P6.75

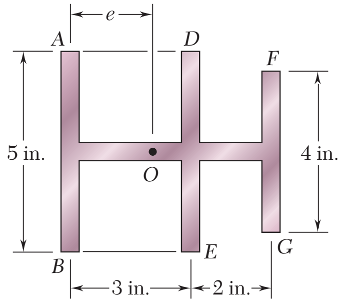


Figura P6.76

6.77 y 6.78 Una viga de pared delgada con espesor uniforme tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la dimensión b para la cual el centro de cortante O de la sección transversal se localiza en el punto indicado.

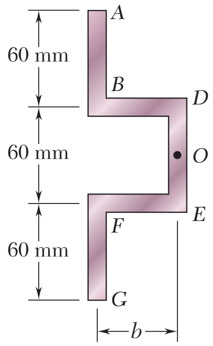


Figura P6.77

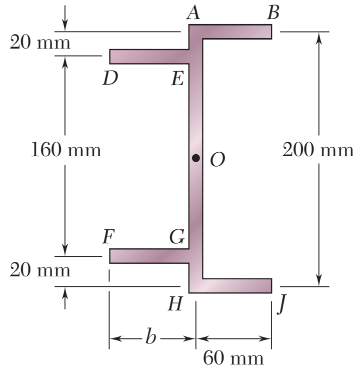


Figura P6.78

6.79 Para el perfil angular y la carga del problema modelo 6.6, verifique que $\int q\,dz = 0$ a lo largo del patín horizontal del ángulo y que $\int q\,dy = P$ a lo largo de su rama vertical.

6.80 Para el perfil angular y la carga del problema modelo 6.6, *a*) determine los puntos donde el esfuerzo cortante es máximo y los valores correspondientes de esfuerzo, *b*) verifique que los puntos obtenidos se encuentran localizados sobre el eje neutro correspondiente a la carga dada.

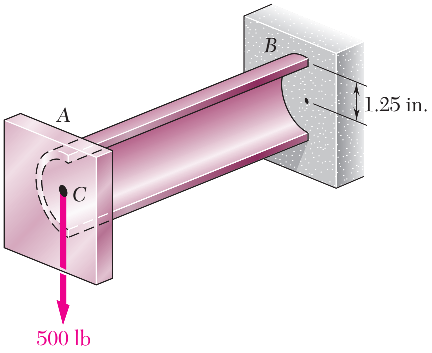
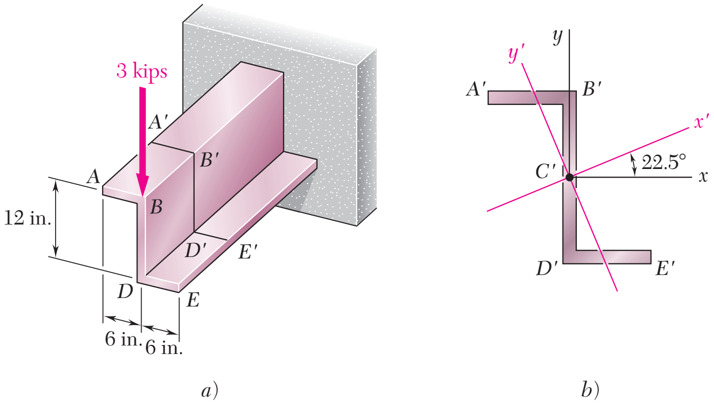


Figura P6.81

***6.81** La viga en voladizo AB que consiste en la mitad de un tubo de pared delgada con un radio medio de 1.25 in. y un espesor de pared de $\frac{3}{8}$ in., se somete a una carga vertical de 500 lb. Si se sabe que la línea de acción de la carga pasa a través del centroide C de la sección transversal de la viga, determine *a*) el sistema par-fuerza equivalente en el centro de cortante de la sección transversal, *b*) el máximo esfuerzo cortante sobre la viga. (*Sugerencia*: Se demostró en el problema 6.74 que el centro de cortante O de esta sección transversal se localiza al doble de distancia de su diámetro vertical de lo que se encuentra su centroide C.)

***6.82** Retome el problema 6.81, y ahora suponga que el espesor de la viga se reduce a $\frac{1}{4}$ in.

***6.83** La viga en voladizo que se muestra en la figura consta de un perfil Z de $\frac{1}{4}$ in. de espesor. Para la carga dada, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $A'B'$ en el ala horizontal superior del perfil Z. Los ejes x' y y' son los ejes centroidales principales de la sección transversal y los momentos de inercia correspondientes son $I_{x'} = 166.3$ in.^{4} e $I_{y'} = 13.61$ in.^{4}



a) *b*)

Figura *P6.83*

***6.84** Para la viga en voladizo y la carga del problema 6.83, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $B'D'$ en el alma vertical del perfil Z.

***6.85** Para la carga mostrada, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $D'B'$ en el patín horizontal del perfil angular que se muestra en la figura. Los ejes x' y y' son los ejes centroidales principales de la sección transversal.

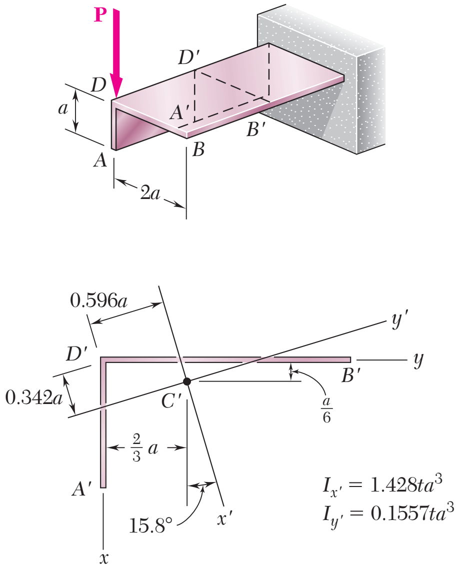


Figura P6.85

***6.86** Para el perfil angular y la carga del problema 6.85, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $D'A'$ en el patín vertical.

***6.87** Una placa de acero, con 160 mm de ancho y 8 mm de grosor, se dobla para formar el canal mostrado en la figura. Si se sabe que la carga vertical **P** actúa en un punto del plano medio del alma del canal, determine *a*) el par de torsión **T** que causaría que el canal se torciera de la misma forma que lo hace bajo la carga **P**, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el canal causado por la carga **P**.

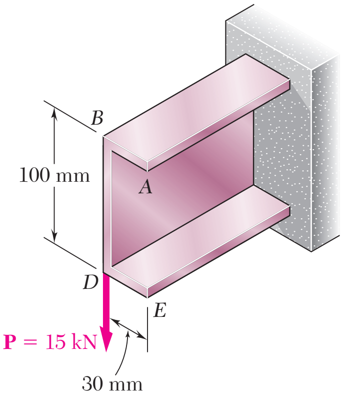


Figura P6.87

***6.88** Retome el problema 6.87, y ahora suponga que, para formar el canal mostrado en la figura, se dobla una placa con 6 mm de espesor.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 6

Esfuerzos en un elemento de viga

Este capítulo se dedicó al análisis de vigas y de elementos de pared delgada sometidos a cargas transversales.

En la sección 6.1 se consideró un pequeño elemento localizado en el plano vertical de simetría de una viga bajo carga transversal (figura 6.2) y se encontró que los esfuerzos normales σ_x y los esfuerzos cortantes τ_{xy} se ejercen en las caras transversales de dicho elemento, mientras que los esfuerzos cortantes τ_{yx}, con igual magnitud que τ_{xy}, se ejercen en sus caras horizontales.

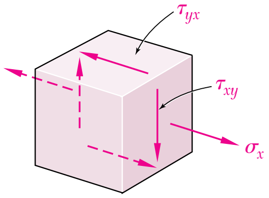


Figura 6.2

Cortante horizontal en una viga

En la sección 6.2 se consideró una viga prismática *AB* con un plano vertical de simetría que soporta varias cargas concentradas y distribuidas (figura 6.5). A una distancia *x* desde el extremo *A* se desprendió de la viga un elemento *CDD′C′* de longitud Δx que se extiende por el ancho de la viga desde la superficie superior de ella hasta un plano horizontal localizado a una distancia y_1 desde el eje neutro (figura 6.6). Se encontró que la magnitud de la fuerza cortante $\Delta\mathbf{H}$ ejercida sobre la cara inferior del elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \qquad (6.4)$$

donde V = cortante vertical en la sección transversal dada
Q = primer momento con respecto al eje neutro de la sección sombreada $\mathcal{A}$ de la sección
I = momento centroidal de inercia de toda el área de la sección transversal.

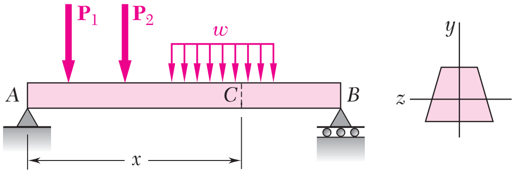


Figura 6.5

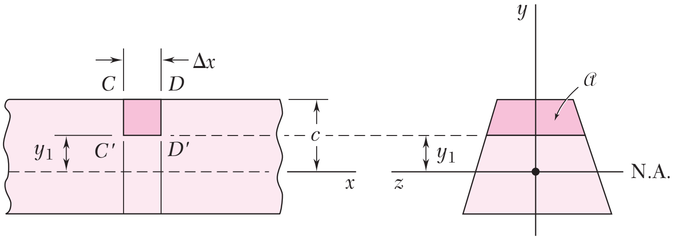


Figura 6.6

Flujo cortante

El *cortante horizontal* por *unidad de longitud*, o *flujo cortante*, que fue representado por la letra q, se obtuvo dividiendo ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

Esfuerzos cortantes en una viga

Dividiendo ambos miembros de la ecuación (6.4) entre el área ΔA de la cara horizontal del elemento y observando que $\Delta A = t\,\Delta x$, donde t es el espesor del elemento en el corte, se obtuvo en la sección 6.3 la siguiente expresión para el *esfuerzo cortante promedio* sobre la cara horizontal del elemento

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

Se advirtió además que, como los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} ejercidos respectivamente sobre un plano transversal y uno horizontal a través de D' son iguales, la expresión en la ecuación (6.6) también representa el valor promedio de τ_{xy} a lo largo de la línea $D_1' D_2'$ (figura 6.12).

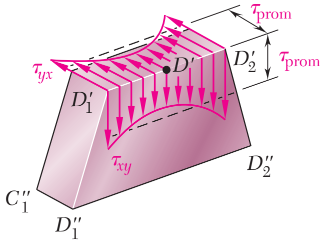


Figura 6.12

Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular

En las secciones 6.4 y 6.5 se analizaron los esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular. Se encontró que la distribución de esfuerzos es parabólica y que el máximo esfuerzo, que ocurre en el centro de la sección, es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{6.10}$$

donde A es el área de la sección rectangular. Para vigas con patines anchos, se encontró que una buena aproximación al esfuerzo cortante máximo puede obtenerse al dividir el cortante V entre el área transversal del alma.

Cortante longitudinal en una superficie curva

En la sección 6.6 se mostró que las ecuaciones (6.4) y (6.5) aún pueden utilizarse para determinar, respectivamente, la fuerza cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ y el flujo cortante q ejercidos sobre un elemento de viga si el elemento se encuentra limitado por una superficie curva arbitraria en lugar de un plano horizontal (figura 6.24). Esto permitió extender el uso, en

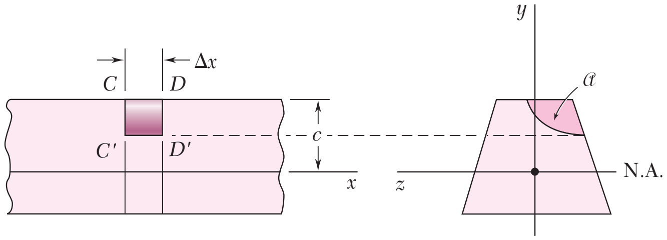


Figura 6.24

la sección 6.7, de la ecuación (6.6) para determinar el esfuerzo cortante promedio en elementos de pared delgada como las vigas de patín ancho y las vigas de caja, en los patines de dichos elementos y en sus almas (figura 6.32).

Esfuerzos cortantes en los elementos de pared delgada

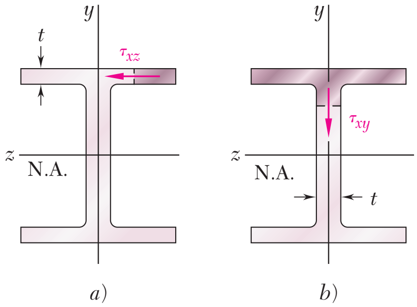


Figura 6.32

Deformaciones plásticas

En la sección 6.8 se consideró el efecto de las deformaciones plásticas sobre la magnitud y distribución de los esfuerzos cortantes. Del capítulo 4 se recordó que una vez iniciada la deformación plástica, la carga adicional provoca que las zonas plásticas penetren en el núcleo elástico de una viga. Tras demostrar que los esfuerzos cortantes pueden ocurrir sólo en el núcleo elástico de la viga, se advirtió que tanto un incremento en la carga como un decremento resultante en el tamaño del núcleo elástico contribuyen al incremento en los esfuerzos cortantes.

Carga asimétrica
Centro de corte

En la sección 6.9 se consideraron elementos prismáticos *sin* carga sobre su plano de simetría y se observó que, en general, ocurrirán tanto flexión como torsión. Se aprendió a localizar el punto O de la sección transversal, conocido como el *centro de corte*, donde las cargas deberán aplicarse si el elemento ha de doblarse sin torcerse (figura 6.49) y se encontró que si las cargas se aplican en dicho punto, la siguiente ecuación permanece válida:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \qquad (4.16, 6.6)$$

Utilizando el principio de la superposición, también se explicó cómo determinar los esfuerzos en elementos de pared delgada como canales, ángulos y vigas extruidas [véase ejemplo 6.07 y problema modelo 6.6].

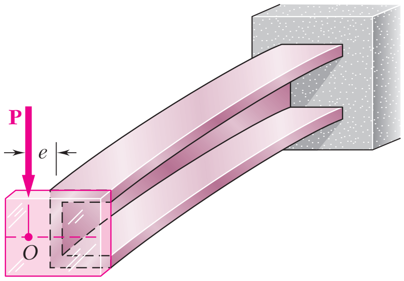


Figura 6.49

PROBLEMAS DE REPASO

6.89 Tres tablas, cada una con una sección transversal rectangular de 1.5 × 3.5 in., se clavan para formar una viga sometida a un corte vertical de 250 lb. Si se sabe que el espaciamiento entre cada par de clavos es de 2.5 in., determine la fuerza cortante en cada clavo.

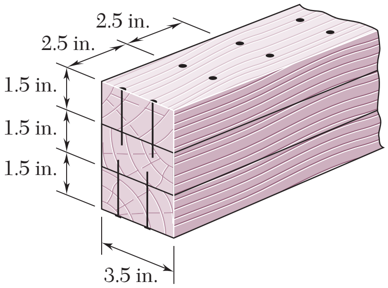


Figura P6.89

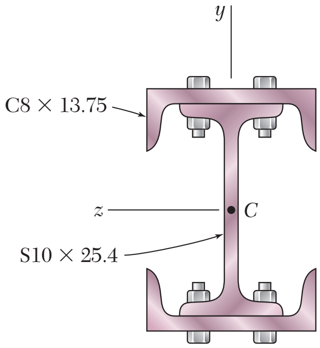
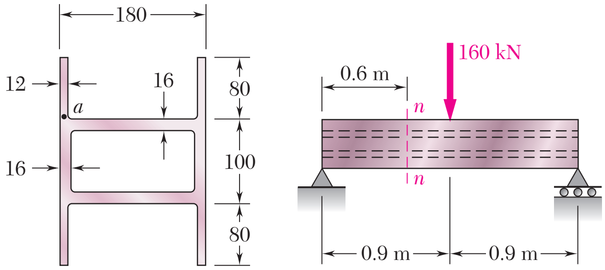


Figura *P6.90*

6.90 Una columna se fabrica al conectar los elementos de acero laminado mostrados en la figura mediante pernos de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro espaciados longitudinalmente cada 5 in. Determine el esfuerzo cortante promedio sobre los pernos causado por una fuerza cortante de 30 kips paralela al eje *y*.

6.91 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en dicha sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a*.



Dimensiones en mm

Figura P6.91

6.92 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

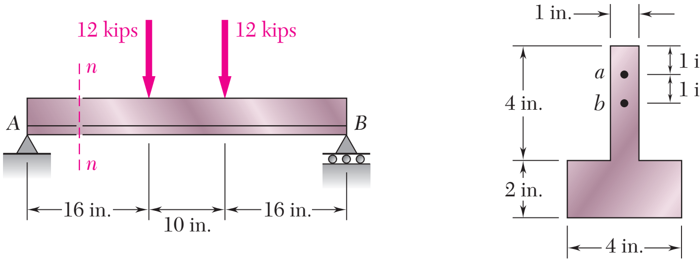
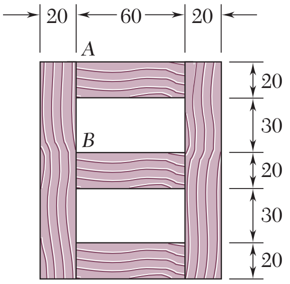


Figura P6.92

6.93 Para la viga y las cargas que se muestran en el problema 6.92, determine el esfuerzo cortante máximo en la sección *n-n*.

6.94 Algunas tablas se pegan para formar la viga tipo caja que se muestra en la figura. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 3 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.

6.95 Si se sabe que una viga de acero laminado W360 × 122 está sujeta a un cortante vertical de 250 kN, determine el esfuerzo cortante *a*) en el punto *a*, *b*) en el centroide *C* de la sección.



Dimensiones en mm

Figura P6.94

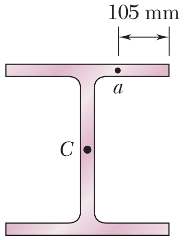


Figura *P6.95*

6.96 Una viga consiste en cinco tablas con sección transversal de 1.5 × 6 in. conectadas mediante pernos de acero con un espaciamiento longitudinal de 9 in. Si se sabe que el cortante en la viga es vertical e igual a 2 000 lb, y que el esfuerzo cortante promedio permisible en cada perno es de 7 500 psi, determine el mínimo diámetro permisible que puede utilizarse para los pernos.

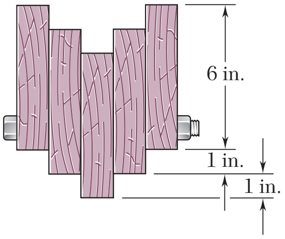
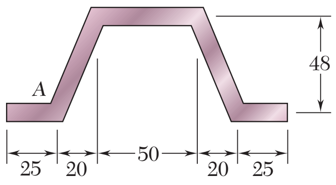


Figura P6.96

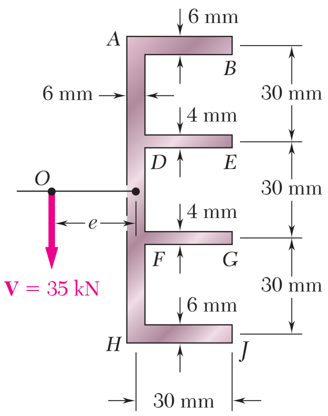
6.97 Una placa de 4 mm de espesor se dobla como lo muestra la figura y después se emplea como viga. Para un cortante vertical de 12 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. También elabore un esquema del flujo cortante en la sección transversal.


A
48
25
20
50
20
25

Dimensiones en mm

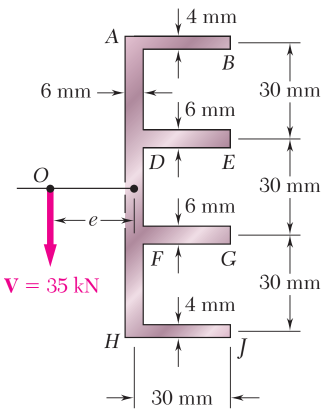
Figura P6.97

6.98 y *6.99* Para una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada, determine *a*) la localización del centro de cortante *O*, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por la fuerza cortante vertical **V** que se muestra en la figura y que se aplica en *O*.


6 mm
A
B
6 mm
30 mm
4 mm
D
E
O
30 mm
e
4 mm
F
G
V = 35 kN
30 mm
6 mm
H
J
30 mm

$I_z = 1.149 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Figura P6.98


4 mm
A
B
6 mm
30 mm
6 mm
D
E
O
30 mm
e
6 mm
F
G
V = 35 kN
30 mm
4 mm
H
J
30 mm

$I_z = 0.933 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Figura *P6.99*

6.100 Determine la localización del centro de cortante *O* de una viga de pared delgada con espesor uniforme que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

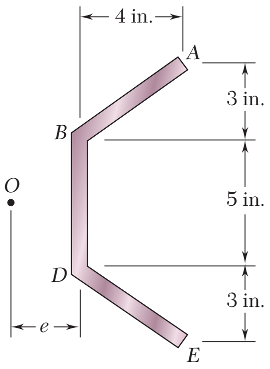

4 in.
A
3 in.
B
O
5 in.
D
3 in.
e
E

Figura P6.100

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para resolverse con la ayuda de una computadora.

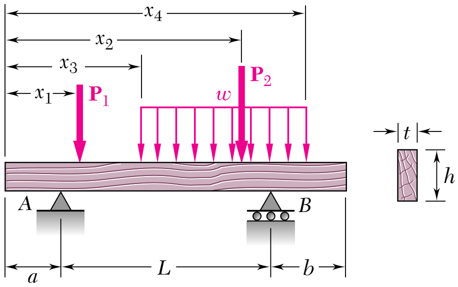


Figura P6.C1

6.C1 Una viga de madera se diseñará para soportar una carga distribuida y hasta dos cargas concentradas, como se indica en la figura. Una de las dimensiones de su sección transversal rectangular uniforme ha sido especificada y la otra se determinará de tal manera que el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la viga no excedan los valores permisibles dados σ_{perm} y τ_{perm}. Midiendo x desde el extremo A y utilizando unidades SI, escriba un programa para computadora que calcule, en secciones transversales sucesivas, desde $x = 0$ hasta $x = L$ y utilizando incrementos dados Δx, el corte, el momento flector, y el mínimo valor de la dimensión desconocida que satisfaga en dicha sección 1) el requerimiento del esfuerzo normal permisible, 2) el requerimiento del esfuerzo cortante permisible. Utilice este programa para diseñar las vigas de sección transversal uniforme de los siguientes problemas, suponiendo $\sigma_{\text{perm}} = 12$ MPa y $\tau_{\text{perm}} = 825$ kPa, y utilizando los incrementos indicados: *a*) problema 5.65 ($\Delta x = 0.1$ m), *b*) problema 5.157 ($\Delta x = 0.2$ m).

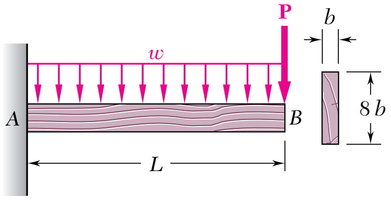


Figura P6.C2

6.C2 Una viga de madera en voladizo AB de longitud L y con la sección rectangular mostrada en la figura soporta una carga concentrada **P** en su extremo libre y una carga uniformemente distribuida w a lo largo de toda su longitud. Escriba un programa para computadora que determine la longitud L y el ancho b de la viga para el que tanto el máximo esfuerzo normal y el máximo esfuerzo cortante en la viga alcanzan sus máximos valores permisibles. Suponiendo $\sigma_{\text{perm}} = 1.8$ ksi y $\tau_{\text{perm}} = 120$ psi, utilícese este programa para determinar las dimensiones L y b cuando *a*) $P = 1\,000$ lb y $w = 0$, *b*) $P = 0$ y $w = 12.5$ lb/in., *c*) $P = 500$ lb y $w = 12.5$ lb/in.

6.C3 Una viga con la sección transversal mostrada está sujeta a un cortante vertical **V**. Escriba un programa para computadora que, para cargas y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades americanas, pueda utilizarse para calcular el esfuerzo cortante a lo largo de la línea entre dos áreas rectangulares adyacentes cualesquiera que formen la sección transversal. Utilice este programa para resolver *a*) el problema 6.10, *b*) el problema 6.12, *c*) el problema 6.21.

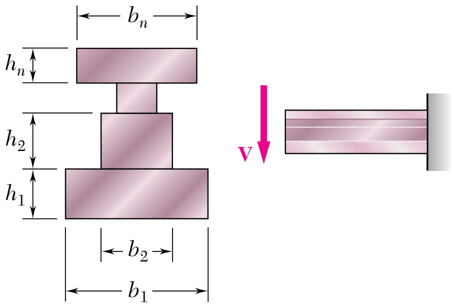


Figura P6.C3

6.C4 Una placa con espesor uniforme t se dobla, como se muestra en la figura, para formar un perfil con un plano vertical de simetría y después se utiliza como viga. Escriba un programa para computadora que, para cargas y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades americanas, pueda utilizarse para determinar la distribución de esfuerzos cortantes causados por un cortante vertical **V**. Utilice este programa para *a*) resolver el problema 6.47, *b*) encontrar el esfuerzo cortante en el punto E para el perfil y la carga del problema 6.50, suponiendo un espesor $t = \frac{1}{4}$ in.

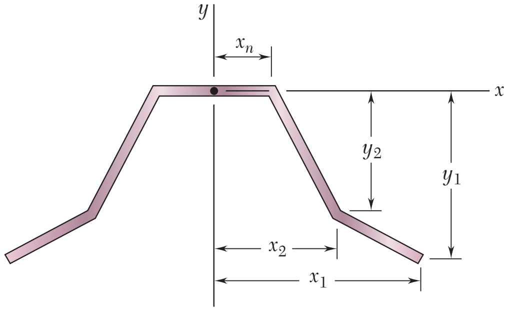


Figura P6.C4

6.C5 La sección transversal de una viga extruida es simétrica con respecto al eje x y consta de varios segmentos rectos como se observa en la figura. Escriba un programa para computadora que, para cargas y dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades americanas, pueda utilizarse para determinar *a*) la localización del centro de corte O, *b*) la distribución de esfuerzos cortantes causados por una fuerza vertical aplicada en O. Utilice este programa para resolver los problemas 6.66 y 6.70.

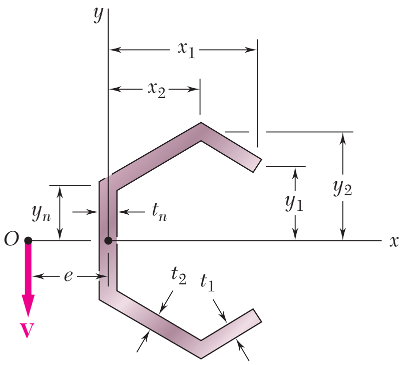


Figura P6.C5

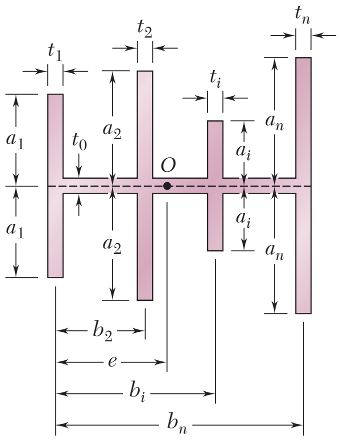


Figura P6.C6

6.C6 Una viga de pared delgada tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Escriba un programa para computadora que, para dimensiones expresadas en el sistema SI o en unidades americanas, pueda utilizarse para determinar la localización del centro de corte O de la sección transversal. Utilice este programa para resolver el problema 6.75.

CAPÍTULO

7

Transformaciones de esfuerzos y deformaciones

El avión de la fotografía se prueba para determinar la forma en que las fuerzas de elevación se distribuyen en el ala. En este capítulo se estudian los esfuerzos y deformaciones en estructuras y componentes de máquinas.

7.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 1.12 se estudió que el estado más general de esfuerzo en un punto dado Q puede representarse por seis componentes. Tres de éstas, σ_x, σ_y y σ_z, definen los esfuerzos normales ejercidos sobre las caras de un elemento cúbico centrado en Q y con la misma orientación de los ejes coordenados (figura 7.1*a*) y las otras tres, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx},[†] las componentes de los esfuerzos cortantes del mismo elemento. Como se observó entonces, el mismo estado de esfuerzos se representará mediante un conjunto diferente de componentes si se giran los ejes (figura 7.1*b*). En la primera parte de este capítulo se va a determinar cómo se transforman las componentes de los esfuerzos cuando se giran los ejes coordenados. En la segunda parte del capítulo se realizará un análisis similar de la transformación de los componentes de la deformación.

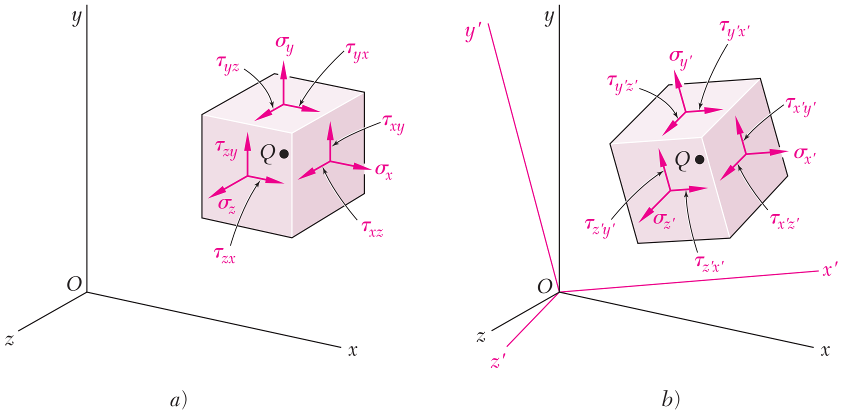

y
σ_y
τ_{yx}
τ_{yz}
τ_{xy}
τ_{zy}
Q
σ_x
σ_z
τ_{xz}
τ_{zx}
O
z
x
a)
y'
y
$\tau_{y'x'}$
$\sigma_{y'}$
$\tau_{y'z'}$
$\tau_{x'y'}$
Q
$\sigma_{x'}$
$\tau_{z'y'}$
$\sigma_{z'}$
$\tau_{x'z'}$
$\tau_{z'x'}$
x'
O
z
z'
x
b)

Figura 7.1

El análisis de la transformación de esfuerzos tratará principalmente con el *esfuerzo plano*, es decir, con una situación en la cual dos caras del cubo están libres de esfuerzo. Si el eje z se elige perpendicular a estas caras, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y las únicas componentes restantes son σ_x, σ_y y τ_{xy} (figura 7.2). Tal situación ocurre en una placa delgada sometida a fuerzas que actúan en su plano medio (figura 7.3). También ocurre en la superficie libre de un elemento estructural o elemento de máquina, es decir, en cualquier punto de la superficie de ese elemento o componente que no está sujeto a una fuerza externa (figura 7.4).

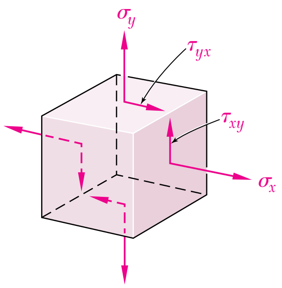

σ_y
τ_{yx}
τ_{xy}
σ_x

Figura 7.2

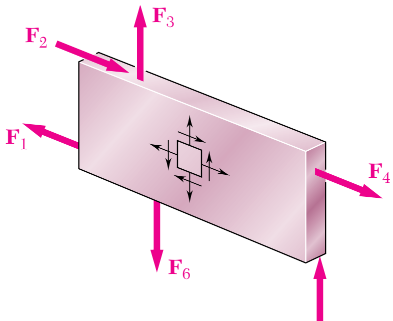

F$_2$
F$_3$
F$_1$
F$_4$
F$_6$
F$_5$

Figura 7.3

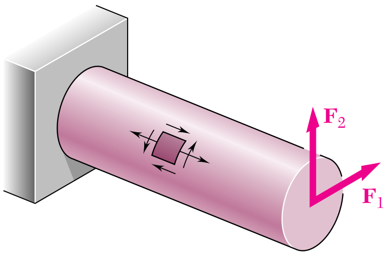


Figura 7.4

[†] Recuérdese que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ y $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Considerando (sección 7.2) un estado de *esfuerzo plano* en un punto dado Q caracterizado por los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} asociados con el elemento mostrado en la figura 7.5*a*, se aprenderá a determinar los componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con ese elemento después que ha girado un ángulo θ alrededor del eje z (figura 7.5*b*). En la sección 7.3 se definirá el valor θ_p de θ para el cual los esfuerzos $\sigma_{x'}$ y $\sigma_{y'}$ son, respectivamente, máximo y mínimo; estos valores del esfuerzo normal son los *esfuerzos principales* en el punto Q, y las caras del elemento correspondiente definen los *planos principales de esfuerzo* en ese punto. También se establecerá el valor θ_s del ángulo de rotación para el cual el esfuerzo cortante es máximo, así como el valor de dicho esfuerzo.

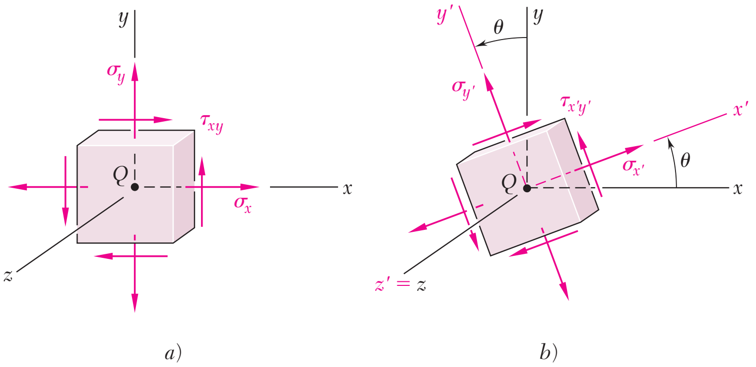


Figura 7.5

En la sección 7.4 se presentará un método alternativo para la solución de problemas que implican transformación de esfuerzo plano, basado en el uso del *círculo de Mohr*.

En la sección 7.5, se estudiará un *estado de esfuerzo tridimensional* en un punto dado y se desarrollará una ecuación para el cálculo del esfuerzo plano normal en un plano de orientación arbitraria en ese punto. En la sección 7.6 se analizarán las rotaciones de un elemento cúbico con respecto a cada uno de los ejes principales de esfuerzos y se aprenderá que las transformaciones pueden describirse mediante tres círculos de Mohr diferentes. Se observará también que, en el caso de un estado de *esfuerzo plano* en un punto dado, el máximo valor del esfuerzo cortante, obtenido antes considerando rotaciones en el plano de esfuerzo, no representa necesariamente el esfuerzo cortante máximo en ese punto. Eso llevará a considerar la diferencia entre esfuerzo cortante máximo *en el plano* y *fuera del plano*.

Varios *criterios de fluencia* para materiales dúctiles sometidos a esfuerzo plano se desarrollarán en la sección 7.7. Para predecir si un material fluirá en algún punto crítico, en condiciones de carga dadas, se determinarán los esfuerzos principales, σ_a y σ_b en ese punto y se verificará si σ_a, σ_b y el límite de fluencia σ_Y del material satisfacen alguno de esos criterios. Dos criterios comunes son: el *criterio de la máxima resistencia a cortante* y el *criterio de la máxima energía de distorsión*. En la sección 7.8 se desarrollarán, en forma similar, *criterios de fractura* para materiales frágiles sometidos a un esfuerzo plano; ellos agruparán los esfuerzos principales σ_a y σ_b en algún punto crítico y la resistencia última σ_U del material. Los dos criterios que se analizarán son: el *esfuerzo normal máximo* y el *criterio de Mohr*.

Los recipientes a presión de pared delgada son una importante aplicación del análisis de esfuerzo plano. En la sección 7.9 se analizarán los esfuerzos en recipientes cilíndricos y esféricos (véanse figuras 7.6 y 7.7).

Figura 7.6

Figura 7.7

En las secciones 7.10 y 7.11 se examinan *la transformación de deformación plana* y *el círculo de Mohr para la deformación plana*. En la sección 7.12 se verá el análisis tridimensional de la deformación y cómo pueden usarse los círculos de Mohr para determinar la deformación por cortante máximo en un punto dado. Dos casos particulares son de especial interés y no deben confundirse: el caso de *deformación plana* y el caso de *esfuerzo plano*.

Finalmente, en la sección 7.13 se analizará el uso de *galgas extensiométricas* para medir la deformación normal en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina. Se verá cómo las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, que caracterizan un estado de deformación en un punto dado, pueden calcularse a partir de las medidas efectuadas en tres galgas extensiométricas que forman una *roseta de deformación*.

7.2 TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZO PLANO

Suponga que existe un estado de esfuerzo plano en el punto Q (con $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), y definido por las componentes σ_x, σ_y y τ_{xy}, asociadas con el elemento de la figura 7.5*a*. Se pide determinar las componentes del esfuerzo $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con el elemento después que ha girado un ángulo θ con respecto al eje z (figura 7.5*b*), y expresar estas componentes en función de σ_x, σ_y, τ_{xy} y θ.

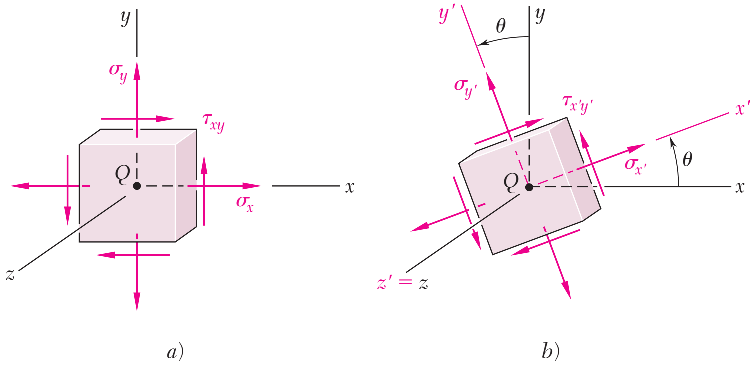

y
σ_y
τ_{xy}
Q
x
σ_x
z
a)
y'
θ
y
$\sigma_{y'}$
$\tau_{x'y'}$
x'
Q
θ
$\sigma_{x'}$
x
z' = z
b)

Figura 7.5 (repetida)

Con el objeto de determinar el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ y el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ ejercidos sobre la cara perpendicular al eje x', se estudiará un elemento prismático con caras respectivamente perpendiculares a los ejes x, y y x' (figura 7.8*a*). Observe que, si el área de la cara oblicua es ΔA, las áreas de las caras vertical y horizontal son, respectivamente, iguales a $\Delta A \cos\theta$ y $\Delta A \operatorname{sen}\theta$. De ahí se sigue que las *fuerzas* ejercidas sobre las tres caras son las que muestra la figura 7.8*b*. (No se ejercen fuerzas sobre las caras triangulares del elemento, pues los esfuerzos normales y cortantes correspondientes se han supuesto nulos.) Usando componentes a lo largo de los ejes x' y y', se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio:

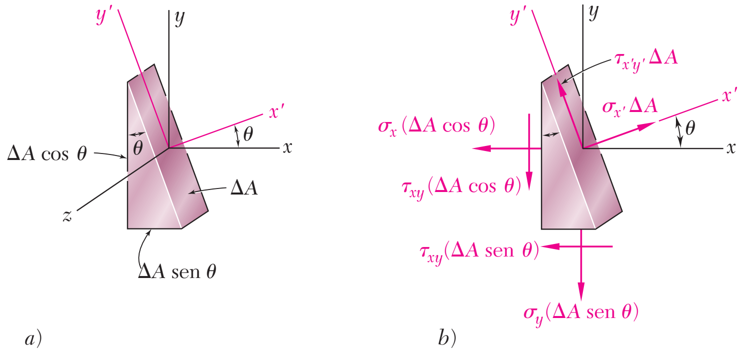

y'
y
x'
θ
x
ΔA cos θ
θ
ΔA
z
ΔA sen θ
a)
y'
y
$\tau_{x'y'}\,\Delta A$
$\sigma_{x'}\,\Delta A$
x'
θ
x
$\sigma_x\,(\Delta A\cos\theta)$
$\tau_{xy}\,(\Delta A\cos\theta)$
$\tau_{xy}(\Delta A\operatorname{sen}\theta)$
$\sigma_y(\Delta A\operatorname{sen}\theta)$
b)

Figura 7.8

$$\sum F_{x'} = 0: \qquad \sigma_{x'}\,\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$- \sigma_y(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\cos\theta = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0: \qquad \tau_{x'y'}\,\Delta A + \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta$$
$$- \sigma_y(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Resolviendo la primera ecuación para $\sigma_{x'}$ y la segunda para $\tau_{x'y'}$, se tiene:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tag{7.1}$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \tag{7.2}$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \tag{7.3}$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{7.4}$$

la ecuación (7.1) se escribe como sigue:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

o

$$\boxed{\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta} \tag{7.5}$$

Usando las relaciones (7.3) se tiene la ecuación (7.2) como

$$\boxed{\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta} \tag{7.6}$$

La expresión para el esfuerzo normal $\sigma_{y'}$ se obtiene remplazando θ en la ecuación (7.5) por el ángulo $\theta + 90°$ que el eje y' forma con el eje x. Como cos $(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y sen $(2\theta + 180°) = -\operatorname{sen} 2\theta$, se tiene

$$\boxed{\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta} \tag{7.7}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7.5) y (7.7)

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \tag{7.8}$$

Como $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$, se verifica que la suma de los esfuerzos normales ejercidos sobre un elemento cúbico de material es independiente de la orientación del elemento.[†]

[†] Véase nota en la página 88.

7.3 ESFUERZOS PRINCIPALES. ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

Las ecuaciones (7.5) y (7.6) obtenidas en la sección precedente son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se escoge un sistema de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenadas $\tau_{x'y'}$ para cualquier valor de θ, los puntos así obtenidos estarán situados en un círculo. Para comprobarlo, se elimina θ de las ecuaciones (7.5) y (7.6). Esto se hace trasponiendo primero $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ecuación (7.5) y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, luego se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación (7.6) y, finalmente, se suman miembro a miembro las ecuaciones resultantes. Se tiene

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{7.9}$$

haciendo

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.10}$$

se escribe la identidad (7.9) en la forma

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{prom}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \tag{7.11}$$

que es la ecuación de un círculo de radio R con centro en el punto C de abscisa σ_{prom} y ordenada 0 (figura 7.9). Puede observarse que, debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si, en lugar de graficar M, se hubiera graficado un punto N de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenada $-\tau_{x'y'}$ (figura 7.10). Esta propiedad se usará en la sección 7.4.

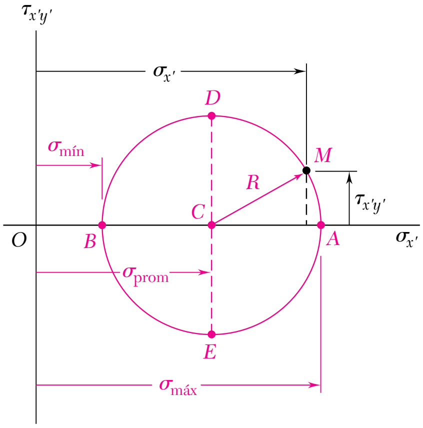


Figura 7.9

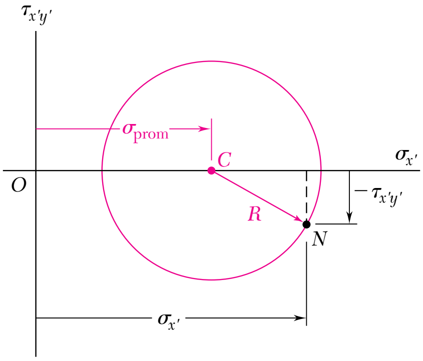


Figura 7.10

Los puntos A y B, donde el círculo de la figura 7.9 interseca el eje horizontal, son de especial interés: el punto A corresponde al valor máximo del esfuerzo normal $\sigma_{x'}$, mientras el punto B corresponde a su valor mínimo.

Además, ambos puntos tienen un valor nulo del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$. Así, los valores θ_p del parámetro θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse haciendo $\tau_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.6). Se escribe[†]

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.12}$$

Esta ecuación define dos valores $2\theta_p$ que difieren en 180° y, por tanto, dos valores θ_p que difieren en 90°. Cualquiera de estos valores puede usarse para determinar la orientación del elemento correspondiente (figura 7.11). Los planos que contienen las caras del elemento obtenido se llaman *planos principales de esfuerzo* en el punto Q, y los valores correspondientes $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ del esfuerzo normal ejercido sobre estos planos son los *esfuerzos principales* en Q. Como los dos valores θ_p, definidos por la ecuación (7.12), se obtuvieron haciendo $\tau_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.6), es claro que no hay esfuerzo cortante en los planos principales.

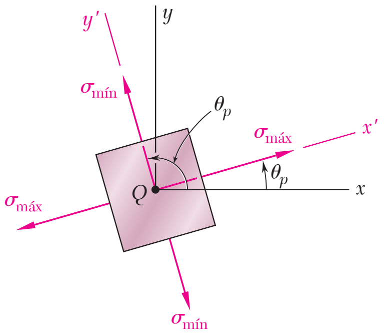


Figura 7.11

Observe en la figura 7.9 que

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{prom}} + R \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\text{mín}} = \sigma_{\text{prom}} - R \tag{7.13}$$

Sustituyendo por σ_{prom} y R de la ecuación (7.10),

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.14}$$

A menos que sea posible decir por inspección cuál de los dos planos se somete a $\sigma_{\text{máx}}$ y cuál a $\sigma_{\text{mín}}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_p en la ecuación (7.5) para determinar cuál de los dos corresponde al valor máximo del esfuerzo normal.

Refiriéndose de nuevo al círculo de la figura 7.9, se observa que los puntos D y E, localizados en el diámetro vertical del círculo, corresponden al mayor valor numérico del esfuerzo $\tau_{x'y'}$. Puesto que la abscisa de los puntos D y E es $\sigma_{\text{prom}} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, los valores θ_s del parámetro θ que corresponden a estos puntos se obtienen haciendo $\sigma_{x'} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ecuación

---

[†] Esta relación también se obtiene diferenciando $\sigma_{x'}$ en la ecuación (7.5) y haciendo la derivada igual a cero: $d\sigma_{x'}/d\theta = 0$.

(7.5). De ahí se tiene que la suma de los últimos dos términos en esa ecuación debe ser cero. Así, para $\theta = \theta_s$, se escribe[†]

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_s + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta_s = 0$$

o

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

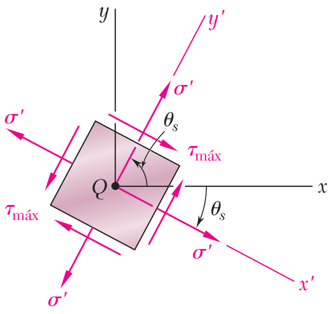


Figura 7.12

Esta ecuación define dos valores $2\theta_s$ que difieren en 180°, y por tanto dos valores de θ_s que difieren en 90°. Cualquiera de estos valores puede usarse para determinar la orientación del elemento correspondiente al esfuerzo cortante máximo (figura 7.12). Al observar en la figura 7.9 que el valor máximo del esfuerzo cortante es igual al radio R del círculo y, recordando la segunda de las ecuaciones (7.10), se tiene:

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

Como se observó antes, el esfuerzo normal correspondiente a la condición de esfuerzo cortante máximo es

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

Comparando las ecuaciones (7.12) y (7.15) se nota que $\tan 2\theta_s$ es el inverso negativo de $\tan 2\theta_p$, lo cual significa que los ángulos $2\theta_s$ y $2\theta_p$ difieren en 90° y, por tanto, que θ_s y θ_p difieren en 45°. Así se concluye que los *planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales*. Esto confirma los resultados obtenidos en la sección 1.12 para el caso de carga axial céntrica (figura 1.40) y en la sección 3.4, para el caso de carga torsional (figura 3.20).

Se debe estar consciente de que el análisis sobre la transformación de esfuerzo plano se ha limitado a las rotaciones *en el plano de esfuerzo*. Si el elemento cúbico de la figura 7.7 se gira con respecto a un eje distinto del eje z, sus caras pueden someterse a esfuerzos cortantes mayores que los dados por la ecuación (7.16). Como se verá en la sección 7.5, esto ocurrirá cuando los esfuerzos principales definidos por la ecuación (7.14) tengan el mismo signo, es decir, cuando ambos sean de tensión o ambos de compresión. En tales casos, el valor obtenido mediante la ecuación (7.16) se refiere al esfuerzo cortante máximo *en el plano*.

[†] Esta relación también se obtiene diferenciando $\tau_{x'y'}$ en la ecuación (7.6) y haciendo la derivada igual a cero: $d\tau_{x'y'}/d\theta = 0$.

EJEMPLO 7.01

Para el estado de esfuerzo plano de la figura 7.13, determine: *a*) los planos principales, *b*) los esfuerzos principales, *c*) el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

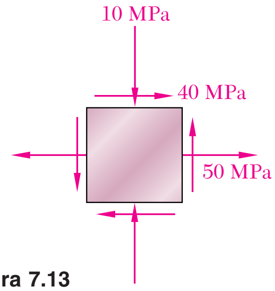


Figura 7.13

a) Planos principales. Siguiendo la convención usual de signos, las componentes del esfuerzo se escriben como

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.12)

$$\begin{aligned} \tan 2\theta_p &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50-(-10)} = \frac{80}{60} \\ 2\theta_p &= 53.1^\circ \quad \text{y} \quad 180^\circ + 53.1^\circ = 233.1^\circ \\ \theta_p &= 26.6^\circ \quad \text{y} \quad 116.6^\circ \end{aligned}$$

b) Esfuerzos principales. La ecuación (7.14) da

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx, mín}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2} \\ \sigma_{\text{máx}} &= 20 + 50 = 70 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{mín}} &= 20 - 50 = -30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Los planos principales y los esfuerzos principales se esquematizan en la figura 7.14. Haciendo $\theta = 26.6^\circ$ en la ecuación (7.5), se verifica que el esfuerzo normal en la cara *BC* del elemento es el esfuerzo máximo:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{50-10}{2} + \frac{50+10}{2} \cos 53.1^\circ + 40 \operatorname{sen} 53.1^\circ \\ &= 20 + 30 \cos 53.1^\circ + 40 \operatorname{sen} 53.1^\circ = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\text{máx}} \end{aligned}$$

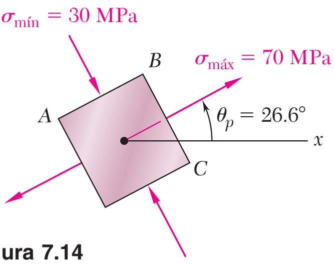

$\sigma_{\text{mín}}$ = 30 MPa
B
$\sigma_{\text{máx}}$ = 70 MPa
A
θ_p = 26.6°
x
C

Figura 7.14

c) Esfuerzos cortantes máximos. De la ecuación (7.16):

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Puesto que $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ tienen signos opuestos, el valor obtenido para $\tau_{\text{máx}}$ representa el valor máximo del esfuerzo cortante en el punto considerado. La orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo y el sentido de los esfuerzos cortantes se determinan mejor efectuando un corte a lo largo del plano diagonal *AC* del elemento de la figura 7.14. Como los planos principales contienen las caras *AB* y *BC* del elemento, el plano diagonal *AC* debe ser uno de los planos de esfuerzo cortante máximo (figura 7.15). Además, las condiciones de equilibrio para el elemento prismático *ABC* requieren que los esfuerzos cortantes en *AC* estén dirigidos como se indica. En la figura 7.16 se muestra el elemento cúbico correspondiente al esfuerzo cortante máximo. El esfuerzo normal en cada una de las cuatro caras del elemento lo da la ecuación (7.17):

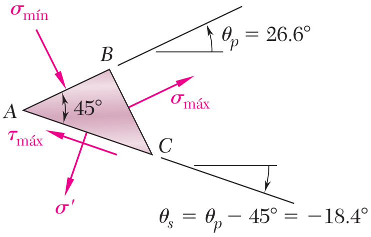


Figura 7.15

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50-10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

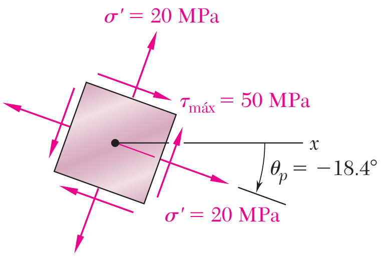
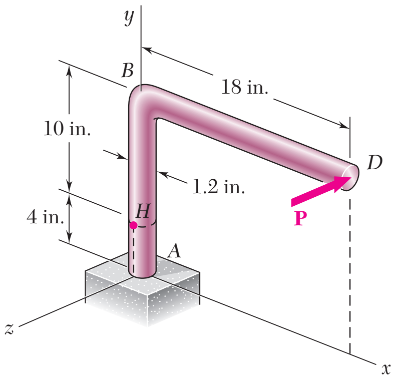
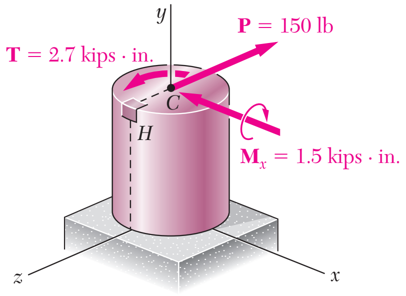


Figura 7.16



PROBLEMA MODELO 7.1

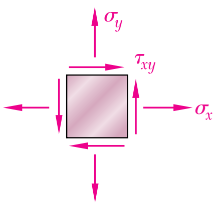
Una fuerza única horizontal de magnitud **P** = 150 lb se aplica el extremo *D* de la palanca *ABD*. Sabiendo que la porción *AB* de la palanca tiene un diámetro de 1.2 in., determine: *a*) los esfuerzos normal y cortante en un elemento situado en el punto *H*, con lados paralelos a los ejes *x* y *y*, *b*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H*.



SOLUCIÓN

Sistema de par de fuerzas. Se remplaza la fuerza **P** por un sistema equivalente de par de fuerzas en el centro *C* de la sección transversal que contiene al punto *H*:

$$P = 150 \text{ lb} \qquad T = (150 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = 2.7 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$
$$M_x = (150 \text{ lb})(10 \text{ in.}) = 1.5 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

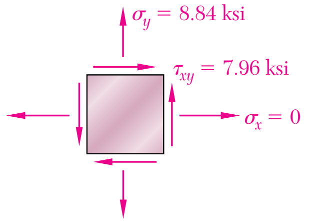


***a*) Esfuerzos σ_x, σ_y, τ_{xy} en el punto H.** Usando la convención de signos mostrada en la figura 7.2, se determina el sentido y el signo de cada componente del esfuerzo examinando cuidadosamente el esquema del sistema de par de fuerzas en el punto *C*:

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = +\frac{Mc}{I} = +\frac{(1.5 \text{ kips} \cdot \text{in.})(0.6 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi\,(0.6 \text{ in.})^4} \qquad \sigma_y = +8.84 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$\tau_{xy} = +\frac{Tc}{J} = +\frac{(2.7 \text{ kips} \cdot \text{in.})(0.6 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi\,(0.6 \text{ in.})^4} \qquad \tau_{xy} = +7.96 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Note que la fuerza cortante **P** no causa esfuerzo cortante en *H*.



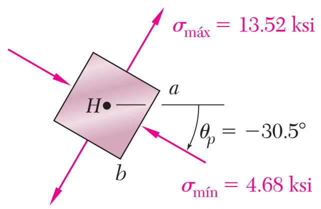
***b*) Planos principales y esfuerzos principales.** Sustituyendo los valores de los esfuerzos en la ecuación (7.12), se determina la orientación de los planos principales:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.80$$
$$2\theta_p = -61.0° \quad \text{y} \quad 180° - 61.0° = +119°$$
$$\theta_p = -30.5° \quad \text{y} \quad +59.5° \blacktriangleleft$$

Sustituyendo en la ecuación (7.14), se establecen las magnitudes de los esfuerzos principales:

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2} = +4.42 \pm 9.10$$

$$\sigma_{\text{máx}} = +13.52 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -4.68 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$



$\sigma_{\text{máx}}$ = 13.52 ksi
H
a
θ_p = −30.5°
b
$\sigma_{\text{mín}}$ = 4.68 ksi

Considerando la cara *ab* del elemento mostrado en la figura, se hace $\theta_p = -30.5°$ en la ecuación (7.5) y se halla $\sigma_{x'} = -4.68$ ksi. Se concluye que los esfuerzos principales son los que se muestran.

PROBLEMAS

7.1 a 7.4 Para el estado de esfuerzo dado, determine los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre la cara oblicua del elemento triangular sombreado que se muestra en la figura. Use un método de análisis basado en las ecuaciones de equilibrio de dicho elemento, como se hizo en las deducciones de la sección 7.2.

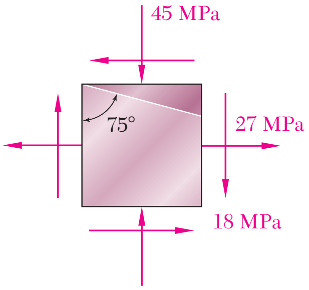

45 MPa
27 MPa
75°
18 MPa

Figura P7.1

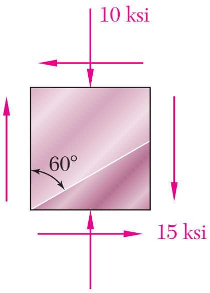

10 ksi
60°
15 ksi

Figura P7.2

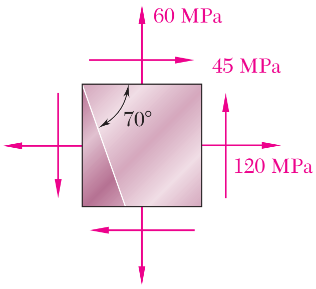

60 MPa
45 MPa
70°
120 MPa

Figura P7.3

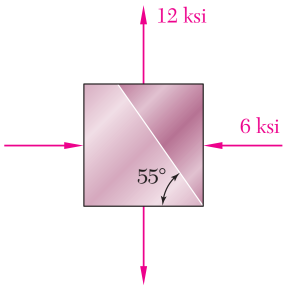

12 ksi
6 ksi
55°

Figura P7.4

7.5 a 7.8 Para el estado de esfuerzo dado, determine *a*) los planos principales, *b*) los esfuerzos principales.

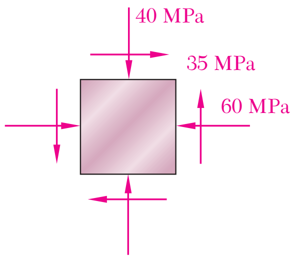

40 MPa
35 MPa
60 MPa

Figura P7.5 y P7.9

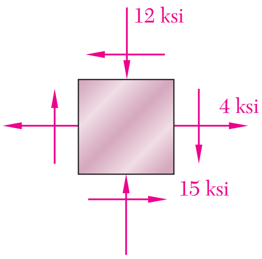

12 ksi
4 ksi
15 ksi

Figura *P7.6* y P7.10

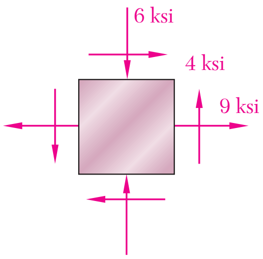

6 ksi
4 ksi
9 ksi

Figura *P7.7* y P7.11

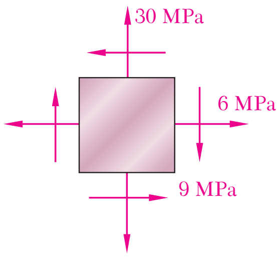

30 MPa
6 MPa
9 MPa

Figura P7.8 y P7.12

7.9 a 7.12 Para el estado de esfuerzo dado, determine *a*) la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo, *b*) el esfuerzo normal correspondiente.

***7.13* a 7.16** Para el estado de esfuerzo dado, determine los esfuerzos normal y cortante después de girar el elemento mostrado *a*) 25° en el sentido de las manecillas del reloj, *b*) 10° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

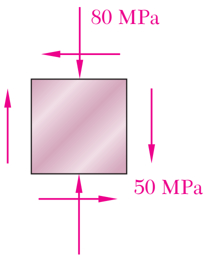

80 MPa
50 MPa

Figura *P7.13*

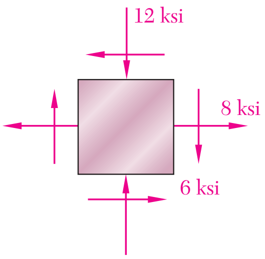

12 ksi
8 ksi
6 ksi

Figura P7.14

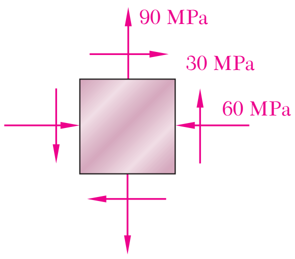

90 MPa
30 MPa
60 MPa

Figura *P7.15*

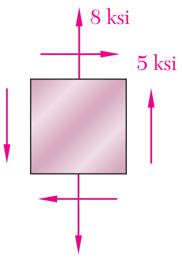


Figura P7.16

7.17 y 7.18 La fibra de un elemento de madera forma un ángulo de 15° con la vertical. Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la fibra, *b*) el esfuerzo normal perpendicular a la fibra.

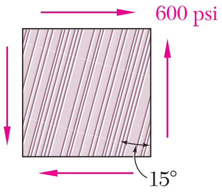


Figura P7.17

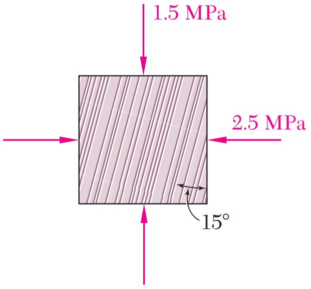


Figura P7.18

7.19 Dos elementos de sección transversal uniforme de 50 × 80 mm se pegan a lo largo del plano *a-a* que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Si se sabe que los esfuerzos permisibles para la junta pegada son $\sigma = 800$ kPa $\tau = 600$ kPa, determine la carga axial máxima **P** que puede aplicarse.

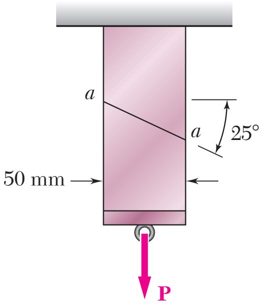


Figura *P7.19*

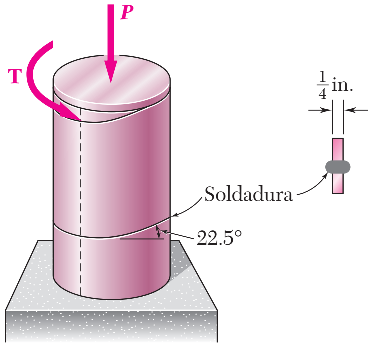


Figura P7.20

7.20 Un tubo de acero con 12 in. de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa con $\frac{1}{4}$ in. de espesor, la cual se suelda a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 22.5° con un plano perpendicular al eje del tubo. Si se aplica una fuerza axial **P** de 40 kips y un par de torsión **T** de 80 kips · in., cada uno de ellos con la dirección mostrada, determine respectivamente σ y τ en las direcciones normal y tangencial a la soldadura.

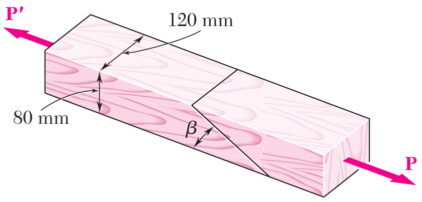


Figura *P7.21* y P7.22

7.21 Dos elementos de madera con una sección transversal uniforme de 80 × 120 mm se pegan mediante el empalme simple al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 25°$ y que se aplican cargas céntricas de magnitud $P = 10$ kN a los elementos, como se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo al empalme, *b*) el esfuerzo normal perpendicular al empalme.

7.22 Dos elementos de madera con una sección transversal uniforme de 80 ×120 mm se pegan mediante el empalme simple al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 22°$ y que los esfuerzos máximos permisibles en la junta son, respectivamente, de 400 kPa en tensión (perpendicular al empalme) y de 600 kPa en corte (paralelo al empalme), determine la máxima carga céntrica **P** que puede aplicarse.

7.23 Se aplica una fuerza de 19.5 kN en el punto *D* del poste de hierro fundido que se muestra en la figura. Si se sabe que el poste tiene un diámetro de 60 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

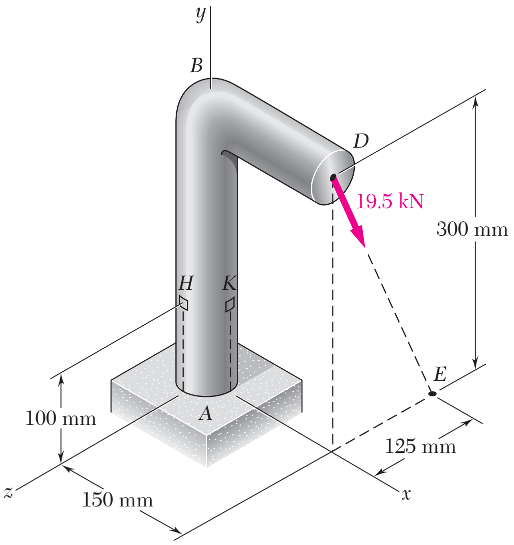

y
B
D
19.5 kN
300 mm
H
K
E
100 mm
A
125 mm
z
150 mm
x

Figura P7.23 y P7.24

7.24 Se aplica una fuerza de 19.5 kN en el punto *D* del poste de hierro fundido que se muestra en la figura. Si se sabe que el poste tiene un diámetro de 60 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

7.25 El eje de un automóvil está sometido a las fuerzas y al par que se muestran en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje sólido es de 1.25 in., determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H* localizado en la parte superior del eje, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el mismo punto.

7.26 Se aplican varias fuerzas en el ensamble de tubería que se muestra en la figura. Si se sabe que los diámetros interior y exterior de la tubería son iguales a 1.50 in. y 1.75 in. respectivamente, determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H* localizado en la superficie exterior del tubo, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el mismo punto.

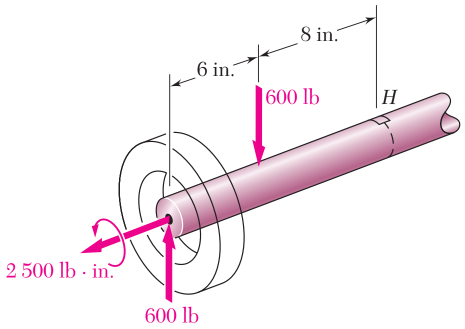

8 in.
6 in.
600 lb
H
2 500 lb · in.
600 lb

Figura P7.25

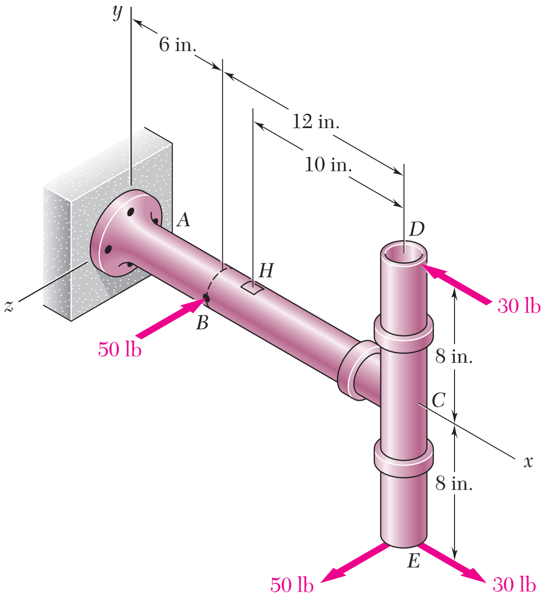

y
6 in.
12 in.
10 in.
D
A
H
z
B
50 lb
30 lb
8 in.
C
x
8 in.
E
50 lb
30 lb

Figura P7.26

7.27 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor máximo de σ_y para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 75 MPa.

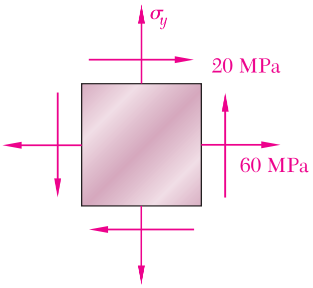


Figura P7.27

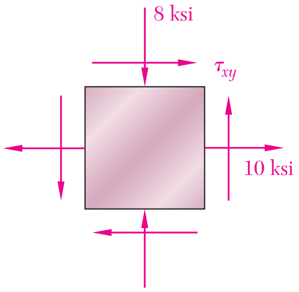


Figura *P7.28*

7.28 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor máximo de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 12 ksi, *b*) los esfuerzos principales correspondientes.

7.29 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la soldadura es cero, *b*) los esfuerzos principales correspondientes.

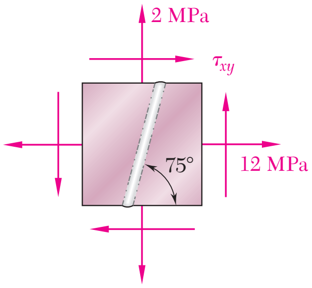


Figura P7.29

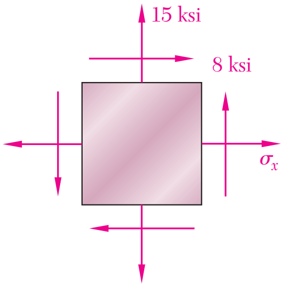


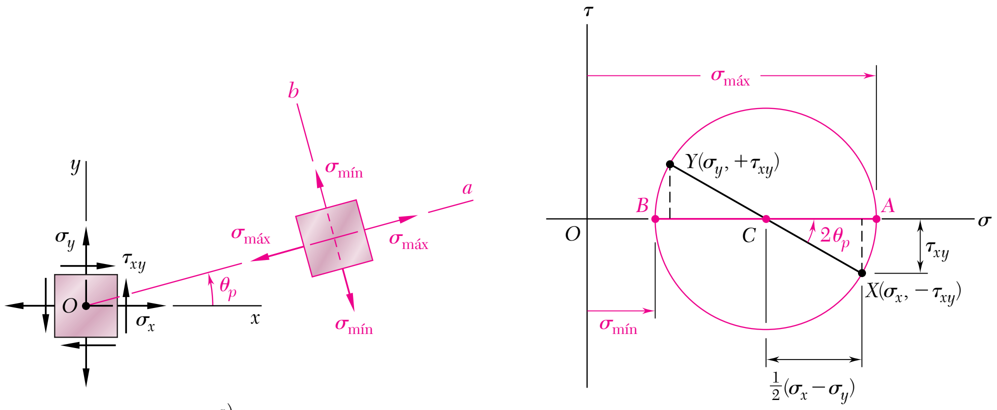
Figura *P7.30*

7.30 Determine el rango de valores de σ_x para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 10 ksi.

7.4 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZO PLANO

El círculo usado en la sección anterior para obtener algunas de las ecuaciones básicas relativas a la transformación de un esfuerzo plano lo introdujo el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), por lo que se conoce como *círculo de Mohr* para esfuerzo plano. Como se verá, este círculo puede utilizarse como método alternativo de solución para los problemas considerados en las secciones 7.2 y 7.3. Este método se basa en consideraciones geométricas simples y no requiere el uso de ecuaciones especializadas. Aunque fue diseñado para obtener soluciones gráficas, se puede aplicar muy bien empleando una calculadora.

Considere un elemento cuadrado de un material sometido a esfuerzo plano (figura 7.17*a*), y sean σ_x, σ_y y τ_{xy} las componentes del esfuerzo ejercido sobre el elemento. Dibuje un punto *X* de coordenas σ_x y $-\tau_{xy}$, y un punto *Y* de coordenadas σ_y y $+\tau_{xy}$ (figura 7.17*b*). Si τ_{xy} es positivo, como se supone en la figura 7.17*a*, el punto *X* está situado debajo del eje σ y el punto *Y* encima, como se muestra en la figura 7.17*b*. Si τ_{xy} es negativo, *X* se sitúa encima del eje σ y *Y* debajo. Uniendo *X* y *Y* mediante una línea recta se define el punto *C* de intersección de la línea *XY* con el eje σ y se dibuja el círculo de centro en *C* y diámetro *XY*. Al observar que la abscisa de *C* y el radio del círculo son respectivamente iguales a las cantidades σ_{prom} y *R* definidas por las ecuaciones (7.10), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para esfuerzo plano. Así, las abscisas de los puntos *A* y *B*, en donde el círculo interseca el eje σ, representan respectivamente los esfuerzos principales $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ en el punto considerado.



a)

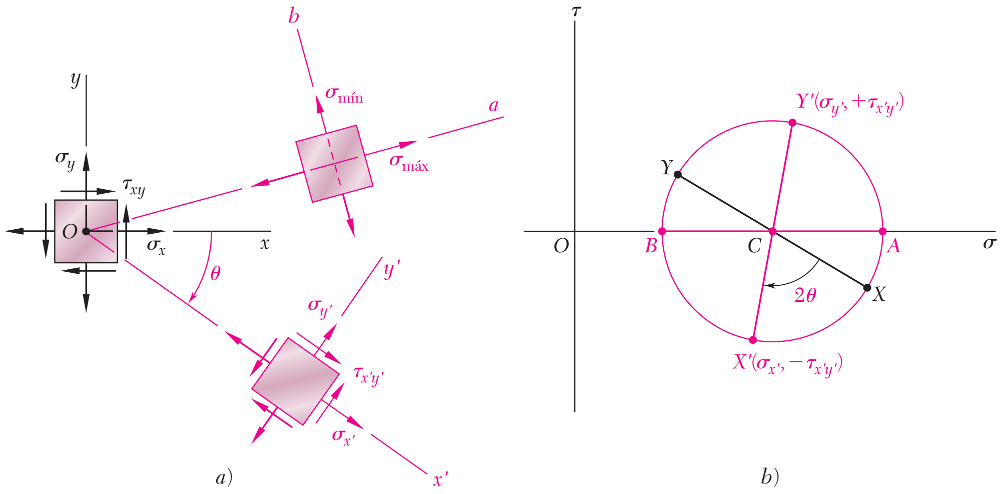
b)

Figura 7.17

Se nota también que como tan $(XCA) = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$, el ángulo *XCA* es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_p$ que satisfacen las ecuaciones (7.12). Así, el ángulo θ_p que define la figura 7.17*a* la orientación del plano principal correspondiente al punto *A* en la figura 7.17*b* puede obtenerse dividiendo entre la mitad el ángulo *XCA* medido en el círculo de Mohr. Observe además que si $\sigma_x > \sigma_y$ y $\tau_{xy} > 0$, como en el caso considerado aquí, la rotación que trae *CX* a *CA* es en sentido contrario a las agujas del reloj. Pero en ese caso el ángulo θ_p obtenido de la ecuación (7.12), el cual define la dirección de la normal *Oa* al plano principal, es positivo; por ello la rotación que trae *Ox* a *Oa* es también en sentido contrario al de las agujas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 7.17 son los mismos. Si se requiere un giro $2\theta_p$ para llevar *CX* a *CA* en el círculo Mohr, una rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj θ_p llevará *Ox* a *Oa* en la figura 7.17*a*.[†]

[†] Esto se debe al hecho de estar usando el círculo de la figura 7.10, en lugar del círculo de la figura 7.9, como círculo de Mohr.

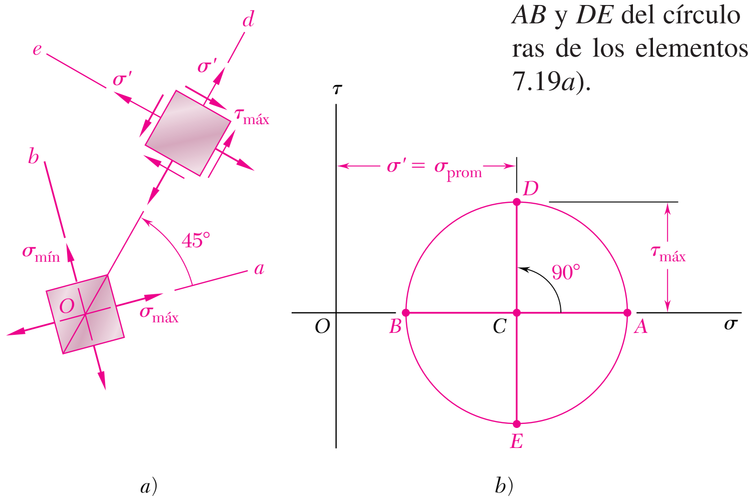
Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo puede obtenerse considerando las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$, correspondiente a los ejes x' y y' de la figura 7.18*a*. El punto X' de las coordenadas $\sigma_{x'}$ y $-\tau_{x'y'}$, y el punto Y' de coordenadas $\sigma_{y'}$ y $+\tau_{x'y'}$, están, por tanto, localizadas en el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ de la figura 7.18*b* debe ser el doble del ángulo $x'Oa$ de la figura 7.18*a*. Como el ángulo XCA es el doble del ángulo xOa, se sigue que el ángulo XCX' de la figura 7.18*b* es el doble del xOx' de la figura 7.18*a*. Así el diámetro $X'Y'$ que define los esfuerzos normales y cortantes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ puede obtenerse girando el diámetro XY un ángulo igual al doble del ángulo θ formado por los ejes x' y x de la figura 7.18*a*. Se observa que la rotación que hace coincidir el diámetro XY con el diámetro $X'Y'$, en la figura 7.18*b*, tiene igual sentido que la rotación que superpone los ejes xy a los ejes $x'y'$ en la figura 7.18*a*.


b
y
$\sigma_{\text{mín}}$
a
σ_y
τ_{xy}
$\sigma_{\text{máx}}$
O
σ_x
x
θ
y'
$\sigma_{y'}$
$\tau_{x'y'}$
$\sigma_{x'}$
x'
τ
$Y'(\sigma_{y'}, +\tau_{x'y'})$
Y
O
B
C
A
σ
2θ
X
$X'(\sigma_{x'}, -\tau_{x'y'})$

a) *b*)

Figura 7.18

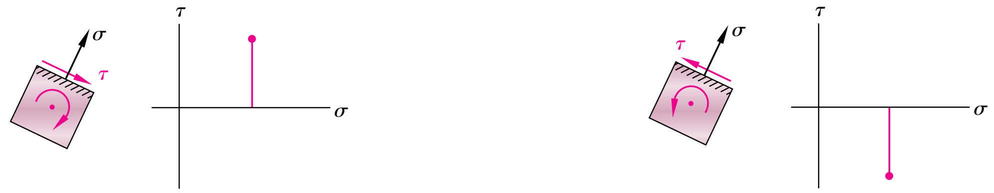
La propiedad que se acaba de indicar puede usarse para verificar el hecho de que los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales. Ciertamente, recuerde que los puntos D y E del círculo de Mohr corresponden a los planos de esfuerzo cortante máximo, mientras A y B corresponden a los planos principales (figura 7.19*b*). Puesto que los diámetros AB y DE del círculo de Mohr están a 90° el uno del otro, se tiene que las caras de los elementos correspondientes están a 45° la una de la otra (figura 7.19*a*).


d
e
σ'
σ'
$\tau_{\text{máx}}$
b
45°
$\sigma_{\text{mín}}$
a
O
$\sigma_{\text{máx}}$
τ
$\sigma' = \sigma_{\text{prom}}$
D
$\tau_{\text{máx}}$
90°
O
B
C
A
σ
E

a) *b*)

Figura 7.19

La construcción del círculo de Mohr para esfuerzo plano se simplifica mucho si se considera separadamente cada cara del elemento usado para definir las componentes del esfuerzo. De las figuras 7.17 y 7.18 observe que cuando el esfuerzo cortante ejercido *sobre una cara dada* tiende a hacer girar el elemento *en el sentido de las agujas del reloj*, el punto correspondiente a esa cara está colocado *por encima* del eje σ en el círculo de Mohr. Cuando el esfuerzo cortante en una cara tiende a hacer girar el elemento en el sentido contrario a las agujas del reloj, el punto correspondiente a esa cara está localizado *debajo* del eje σ (figura 7.20).[†] En cuanto a los esfuerzos normales, se usa la convención usual, es decir, un esfuerzo de tensión se considera positivo y se grafica a la derecha, mientras una compresión es negativa y se grafica hacia la izquierda.



a) En el sentido de las agujas del reloj → Arriba

b) En el sentido contrario a las agujas del reloj → Abajo

Figura 7.20

EJEMPLO 7.02

Para el estado de esfuerzo plano considerado en el ejemplo 7.01, *a*) trace el círculo de Mohr, *b*) determine los esfuerzos principales, *c*) halle el esfuerzo cortante máximo y el correspondiente esfuerzo normal.

a) Construcción del círculo de Mohr. Se advierte en la figura 7.21*a* que el esfuerzo normal ejercido sobre la cara orientada hacia el eje x es de tensión (positiva) y que el esfuerzo cortante ejercido sobre esa cara tiende a rotar el elemento en el sentido contrario a las agujas del reloj. El punto X del círculo de Mohr, por tanto, se dibujará a la derecha del eje vertical y debajo del eje horizontal (figura 7.21*b*). Una inspección similar de los esfuerzos normal y cortante ejercidos sobre la cara superior del elemento muestra que el punto Y debe dibujarse a la izquierda del eje vertical y encima del eje horizontal. Dibujando la línea XY, se obtiene el centro C del círculo de Mohr; su abscisa es:

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Como los lados del triángulo sombreado son

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \qquad \text{y} \qquad FX = 40 \text{ MPa}$$

el radio del círculo es

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

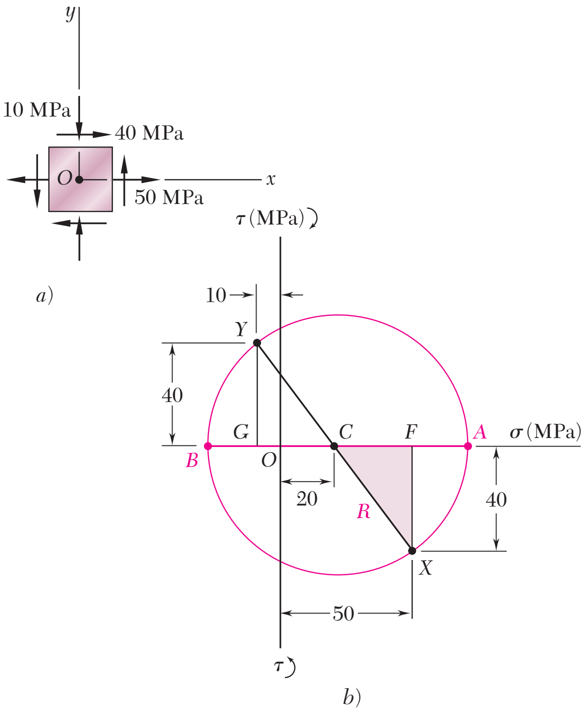


Figura 7.21

[†] La siguiente frase en inglés ayudará a memorizar esta convención: “In the kitchen, the *clock* is above, and the *counter* is below.”

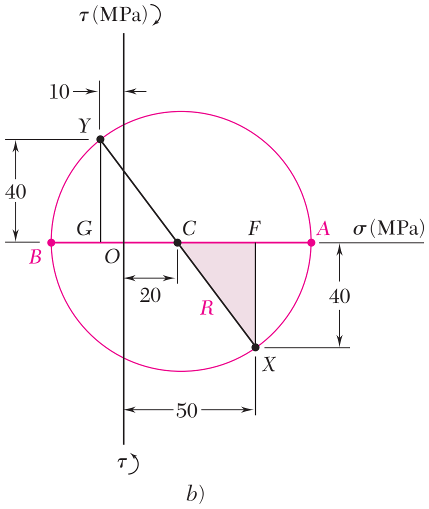

τ (MPa)
10
Y
40
G
C
F
A
σ (MPa)
B
O
20
R
40
X
50
τ
b)

Figura 7.21*b*) (repetida)

b) Esfuerzo y planos principales. Los esfuerzos principales son

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Recordando que el ángulo ACX representa $2\theta_p$ (figura 7.21*b*), se escribe:

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53.1° \qquad \theta_p = 26.6°$$

Como la rotación que lleva CX a CA, en la figura 7.22*b*, es en sentido contrario a las agujas del reloj, la rotación que lleva a Ox hasta el eje Oa, que corresponde a $\sigma_{\text{máx}}$ en la figura 7.22*a*, es también en sentido contrario a las agujas del reloj.

c) Esfuerzo cortante máximo. Ya que una rotación adicional de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj CA a CD en la figura 7.22*b*, una rotación adicional de 45° en sentido contrario a las agujas del reloj llevará el eje Oa a Od que corresponde al esfuerzo cortante máximo en la figura 7.22*a*. Se observa en la figura 7.22*b* que $\tau_{\text{máx}} = R = 50$ MPa y que el esfuerzo normal correspondiente es $\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = 20$ MPa. Como el punto D está por encima del eje σ en la figura 7.22*b*, los esfuerzos cortantes ejercidos sobre las caras perpendiculares a Od en la figura 7.22*a* deben dirigirse de manera que tiendan a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj.

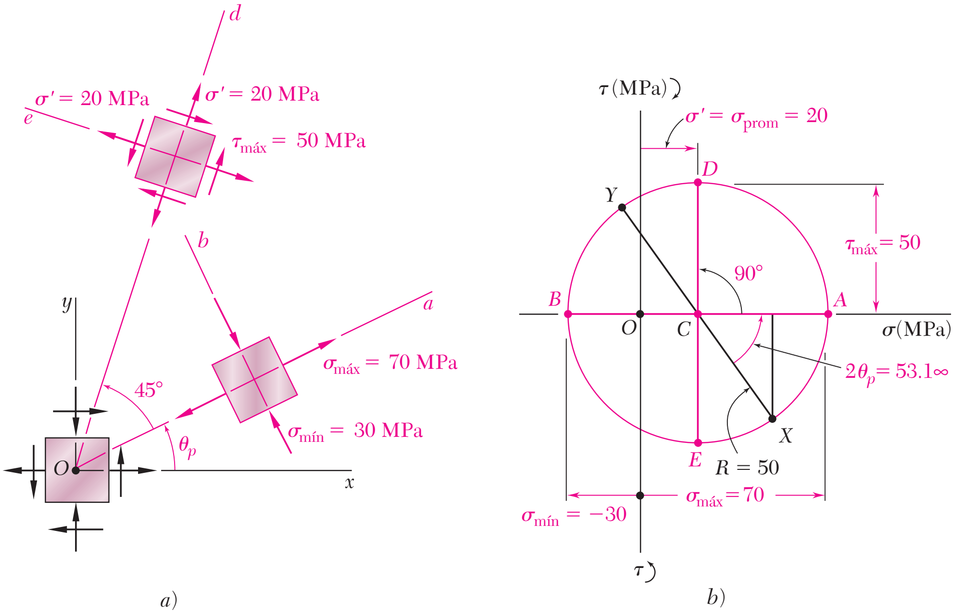

d
$\sigma' = 20$ MPa
e
$\sigma' = 20$ MPa
$\tau_{\text{máx}} = 50$ MPa
b
y
a
$\sigma_{\text{máx}} = 70$ MPa
45°
θ_p
$\sigma_{\text{mín}} = 30$ MPa
O
x
a)
τ (MPa)
$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = 20$
D
Y
$\tau_{\text{máx}} = 50$
90°
B
A
O
C
σ (MPa)
$2\theta_p = 53.1∞$
X
E
$R = 50$
$\sigma_{\text{mín}} = -30$
$\sigma_{\text{máx}} = 70$
τ
b)

Figura 7.22

El círculo de Mohr ofrece un modo conveniente de verificar los resultados obtenidos antes para esfuerzos bajo carga axial céntrica (véase sección 1.12) y bajo carga torsional (sección 3.4). En el primer caso (figura 7.23*a*), se tiene $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$. Los puntos correspondientes *X* y *Y* definen un círculo de radio $R = P/2A$ que pasa por el origen de coordenadas (figura 7.23*b*). Los puntos *D* y *E* dan la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo (figura 7.23*c*), así como los valores de $\tau_{\text{máx}}$ y el correspondiente esfuerzo normal σ':

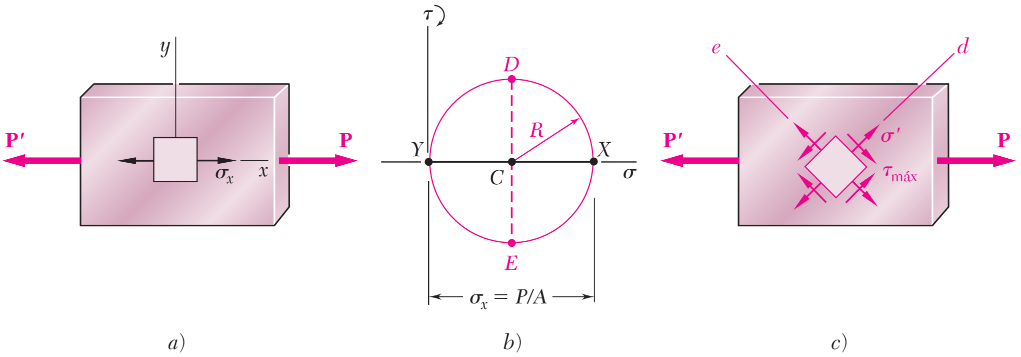


Figura 7.23 Círculo de Mohr para carga axial céntrica.

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \tag{7.18}$$

En el caso de torsión (figura 7.24*a*), se tiene $\sigma_x = \sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = \tau_{\text{máx}} = Tc/J$. Los puntos *X* y *Y* están localizados en el eje τ y el círculo de Mohr tiene un radio $R = Tc/J$ centrado en el origen (figura 7.24*b*). Los puntos *A* y *B* definen los planos principales (figura 7.24*c*) y los esfuerzos principales:

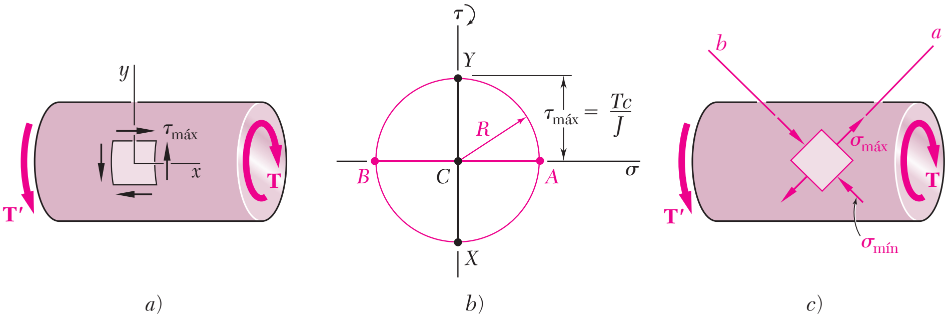
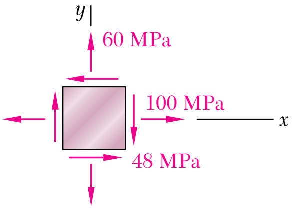


Figura 7.24 Círculo de Mohr para carga axial torsional.

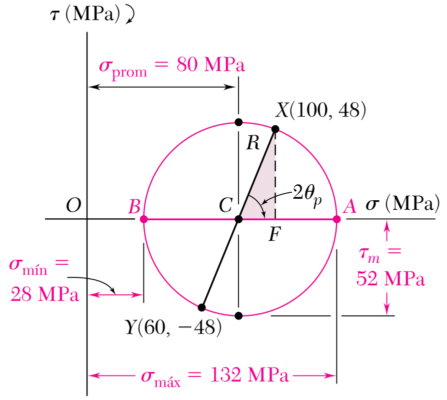
$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \tag{7.19}$$

PROBLEMA MODELO 7.2

Para el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine: *a*) los esfuerzos principales y los planos principales, *b*) las componentes del esfuerzo ejercidas sobre el elemento obtenido rotando el elemento dado 30° en sentido contrario a las agujas del reloj.



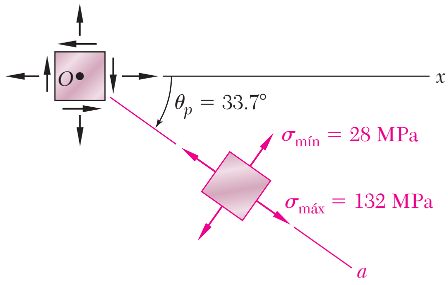
SOLUCIÓN



Construcción del círculo de Mohr. Note que en una cara perpendicular al eje *x*, el esfuerzo normal es de tensión y el esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj. Así, se elabora la gráfica de *X* en un punto 100 unidades a la derecha del eje vertical y 48 unidades sobre el eje horizontal. En forma similar, se examinan las componentes del esfuerzo en la cara superior y se elabora la gráfica del punto *Y*(60, −48). Uniendo los puntos *X* y *Y* mediante una recta, se define el centro *C* del círculo de Mohr. La abscisa de *C*, que representa σ_{prom}, y el radio *R* del círculo pueden medirse directamente o calcularse como sigue:

$$\sigma_{\text{prom}} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$



***a*) Planos principales y esfuerzos principales.** Se rota el diámetro *XY* en el sentido de las agujas del reloj $2\theta_p$ hasta que coincida con el diámetro *AB*. Se tiene

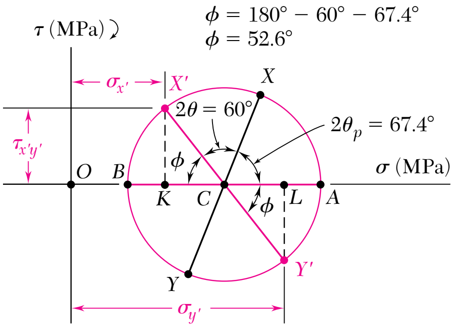
$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \qquad 2\theta_p = 67.4^\circ \curvearrowright \qquad \theta_p = 33.7^\circ \curvearrowright \blacktriangleleft$$

Los esfuerzos principales están representados por las abscisas de los puntos *A* y *B*:

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + CA = 80 + 52 \qquad \sigma_{\text{máx}} = +132 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - BC = 80 - 52 \qquad \sigma_{\text{mín}} = +\ 28 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Como la rotación que trae *XY* hasta *AB* es en el sentido de las agujas del reloj, la rotación que trae *Ox* al eje *Oa*, que corresponde a $\sigma_{\text{máx}}$, es también en el mismo sentido. Se obtiene la orientación mostrada para los planos principales.



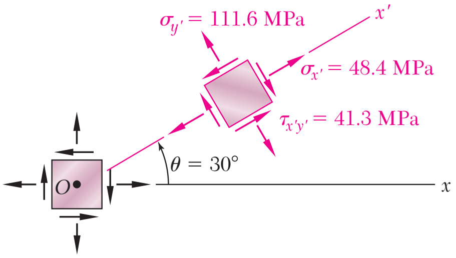
***b*) Componentes del esfuerzo en elemento rotado 30° ↺.** Los puntos X' y Y' que corresponden en el círculo de Mohr a las componentes del esfuerzo en el elemento rotado, se obtienen girando *XY* en el sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo $2\theta = 60^\circ$. Se tiene:

$$\phi = 180^\circ - 60^\circ - 67.4^\circ \qquad \phi = 52.6^\circ \blacktriangleleft$$

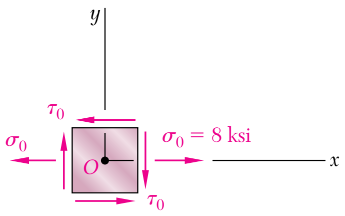
$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6^\circ \qquad \sigma_{x'} = +\ 48.4 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6^\circ \qquad \sigma_{y'} = +111.6 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \text{ sen } 52.6^\circ \qquad \tau_{x'y'} = \ 41.3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



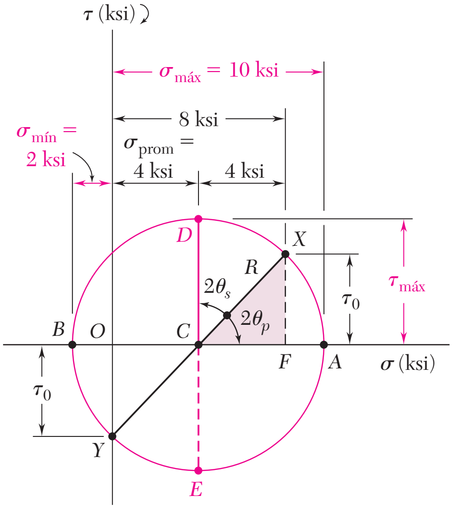
Como X' se localiza por encima del eje horizontal, el esfuerzo cortante en la cara normal a Ox' tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj.



y
τ_0
σ_0
$\sigma_0 = 8$ ksi
O
x
τ_0

PROBLEMA MODELO 7.3

Un estado de esfuerzo plano consiste en un esfuerzo de tensión $\sigma_0 = 8$ ksi ejercido sobre las superficies verticales y en esfuerzo cortante desconocidos. Determine: *a*) la magnitud del esfuerzo cortante τ_0 para el cual el mayor esfuerzo normal es 10 ksi, *b*) el correspondiente esfuerzo cortante máximo.



τ (ksi)
$\sigma_{\text{máx}} = 10$ ksi
8 ksi
$\sigma_{\text{mín}} =$ 2 ksi
$\sigma_{\text{prom}} =$ 4 ksi
4 ksi
D
X
R
$2\theta_s$
$2\theta_p$
τ_0
$\tau_{\text{máx}}$
B
O
C
F
A
σ (ksi)
τ_0
Y
E

SOLUCIÓN

Construcción del círculo de Mohr. Se supondrá que los esfuerzos cortantes actúan en los sentidos mostrados. En consecuencia, el esfuerzo cortante τ_0 en una cara normal al eje *x* tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj y se traza el punto *X* de coordenadas 8 ksi y τ_0 por encima del eje horizontal. Considerando una cara horizontal del elemento, se observa que $\sigma_y = 0$ y que τ_0 tiende a rotar el elemento en sentido contrario al de las agujas del reloj; por tanto, se traza el punto *Y* a una distancia τ_0 por debajo de *O*.

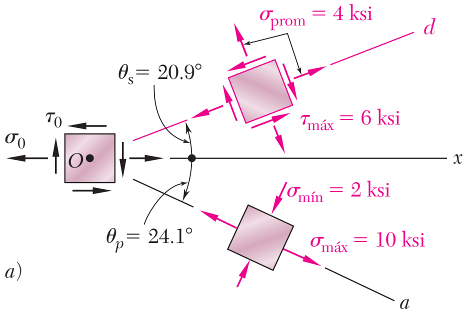
Se observa que la abscisa del centro *C* del círculo de Mohr es

$$\sigma_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(8 + 0) = 4 \text{ ksi}$$

El radio *R* del círculo se determina observando que el máximo esfuerzo normal, $\sigma_{\text{máx}} = 10$ ksi está representado por la abscisa del punto *A* y escribiendo

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{\text{prom}} + R$$

$$10 \text{ ksi} = 4 \text{ ksi} + R \qquad R = 6 \text{ ksi}$$



$\sigma_{\text{prom}} = 4$ ksi
d
$\theta_s = 20.9°$
τ_0
σ_0
$\tau_{\text{máx}} = 6$ ksi
O
x
$\sigma_{\text{mín}} = 2$ ksi
$\theta_p = 24.1°$
$\sigma_{\text{máx}} = 10$ ksi
a

a)

***a*) Esfuerzo cortante τ_0.** Considerando el triángulo rectángulo *CFX*, se halla

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{4 \text{ ksi}}{6 \text{ ksi}} \qquad 2\theta_p = 48.2° \circlearrowright \qquad \theta_p = 24.1° \circlearrowright$$

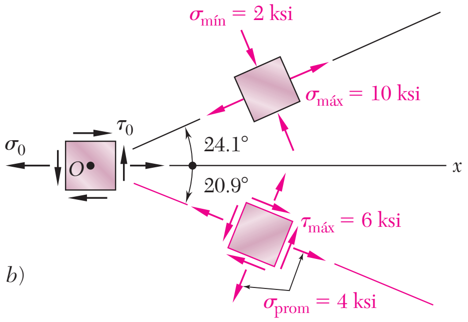
$$\tau_0 = FX = R \operatorname{sen} 2\theta_p = (6 \text{ ksi}) \operatorname{sen} 48.2° \qquad \tau_0 = 4.47 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b*) Esfuerzo cortante máximo.** Las coordenadas del punto *D* del círculo de Mohr representan el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

$$\tau_{\text{máx}} = R = 6 \text{ ksi} \qquad \tau_{\text{máx}} = 6 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$2\theta_s = 90° - 2\theta_p = 90° - 48.2° = 41.8° \circlearrowleft \qquad \theta_x = 20.9° \circlearrowleft$$

El esfuerzo cortante máximo se ejerce sobre un elemento orientado como se muestra en la figura *a*). (También se muestra el elemento sobre el cual se ejercen los esfuerzos principales.)



$\sigma_{\text{mín}} = 2$ ksi
$\sigma_{\text{máx}} = 10$ ksi
τ_0
σ_0
24.1°
O
x
20.9°
$\tau_{\text{máx}} = 6$ ksi
$\sigma_{\text{prom}} = 4$ ksi

b)

Nota: Si se invirtiera la hipótesis original sobre el sentido de τ_0 se obtendría el mismo círculo y las mismas respuestas, pero la orientación del elemento sería como la que ilustra la figura *b*).

PROBLEMAS

7.31 Utilice el círculo de Mohr para resolver los problemas 7.5 y 7.9.

7.32 Utilice el círculo de Mohr para resolver los problemas 7.6 y 7.10.

7.33 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.11.

7.34 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.12.

7.35 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.13.

7.36 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.14.

7.37 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.15.

7.38 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.16.

7.39 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.17.

7.40 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.18.

7.41 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.19.

7.42 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.20.

7.43 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.21.

7.44 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.22.

7.45 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.23.

7.46 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.24.

7.47 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.25.

7.48 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.26.

7.49 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.27.

7.50 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.28.

7.51 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.29.

7.52 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.30.

7.53 Si se sabe que la ménsula *AB* tiene un espesor uniforme de $\frac{5}{8}$ in., determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

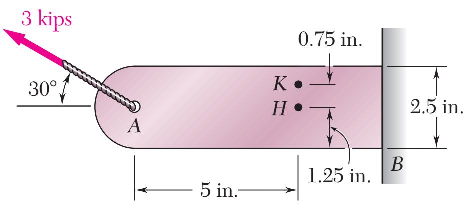


Figura *P7.53*

7.54 Retome el problema 7.53, considerando el punto *K*.

7.55 a 7.58 Determine los planos principales y los esfuerzos principales para el estado de esfuerzo plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzo que se muestran en la figura.

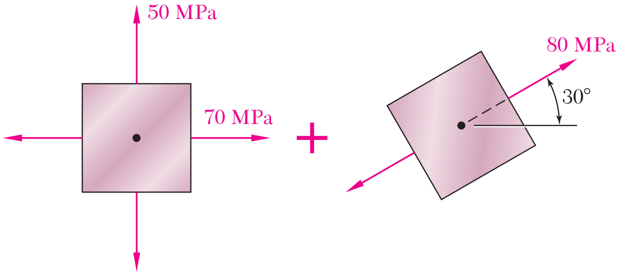

50 MPa
70 MPa
+
80 MPa
30°

Figura P7.55

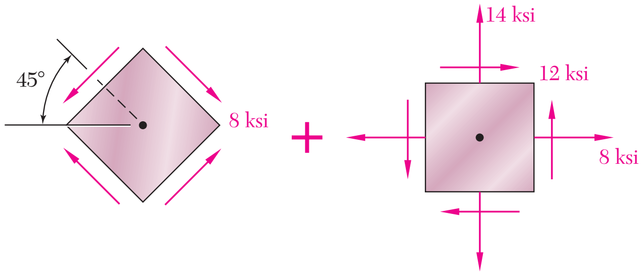

45°
8 ksi
+
14 ksi
12 ksi
8 ksi

Figura P7.56

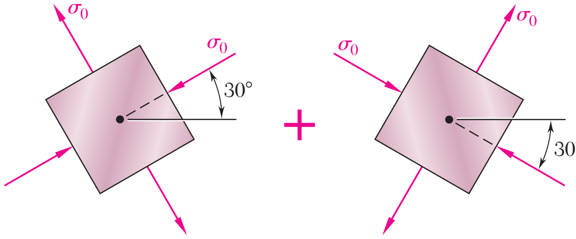

σ_0
σ_0
30°
+
σ_0
σ_0
30°

Figura P7.57

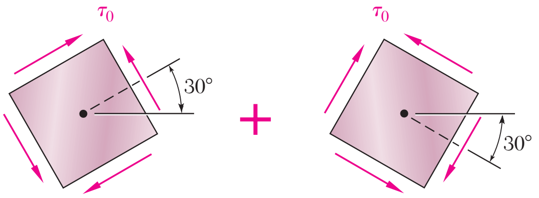

τ_0
30°
+
τ_0
30°

Figura P7.58

7.59 Para el elemento que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo de tensión máximo es menor o igual que 60 MPa.

7.60 Para el elemento que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 150 MPa.

7.61 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los cuales el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ es menor o igual que 20 ksi.

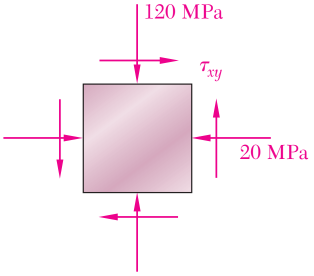

120 MPa
τ_{xy}
20 MPa

Figura *P7.59* y *P7.60*

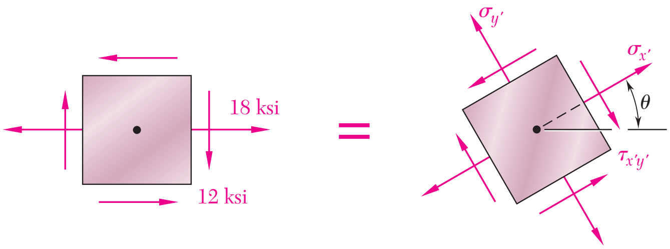

18 ksi
12 ksi
=
$\sigma_{y'}$
$\sigma_{x'}$
θ
$\tau_{x'y'}$

Figura P7.61 y P7.62

7.62 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los que el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ es menor o igual que 10 ksi.

7.63 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, se sabe que los esfuerzos normal y cortante están dirigidos como se indica y que $\sigma_x = 14$ ksi, $\sigma_y = 9$ ksi y $\sigma_{\text{mín}} = 5$ ksi. Determine *a*) la orientación de los planos principales, *b*) el esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$, *c*) el esfuerzo cortante máximo en el plano.

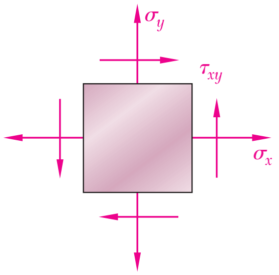


Figura P7.63

7.64 El círculo de Mohr que se muestra en la figura corresponde al estado de esfuerzo dado en la figura 7.5*a*) y *b*). Observe que $\sigma_{x'} = \text{OC} + (CX')\cos(2\theta_p - 2\theta)$ y que $\tau_{x'y'} = (CX')\operatorname{sen}(2\theta_p - 2\theta)$, deduzca las expresiones para $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ dadas en las ecuaciones (7.5) y (7.6), respectivamente. [*Sugerencia:* Utilice $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$ y $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$.]

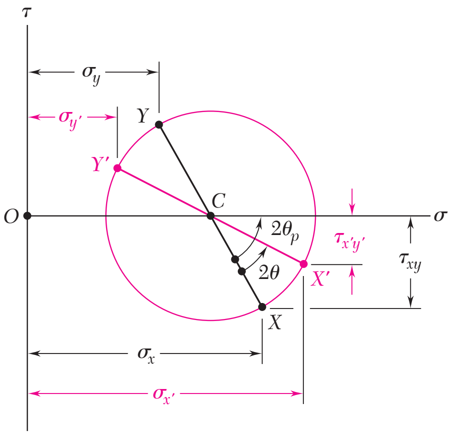


Figura P7.64

7.65 *a*) Demuestre que la expresión $\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'}$, donde $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ son componentes de esfuerzo a lo largo de los ejes rectangulares x' y y', es independiente de la orientación de dichos ejes. Asimismo, demuestre que la expresión dada representa el cuadrado de la tangente trazada desde el origen de las coordenadas al círculo de Mohr. *b*) Con la propiedad de invariancia establecida en el inciso *a*), exprese el esfuerzo cortante τ_{xy} en términos de σ_x, σ_y, y los esfuerzos principales $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$.

7.5 ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS

En las secciones precedentes se ha supuesto un estado de esfuerzo plano con $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y considerando sólo transformaciones de esfuerzo asociadas con una rotación alrededor del eje z. Ahora se considerará el estado de esfuerzo general representado en la figura 7.1*a* y la transformación de esfuerzos asociada con la rotación de ejes mostrada en la figura 7.1*b*. Sin embargo, el análisis se limitará a la determinación del *esfuerzo normal* σ_n en un plano de orientación arbitraria.

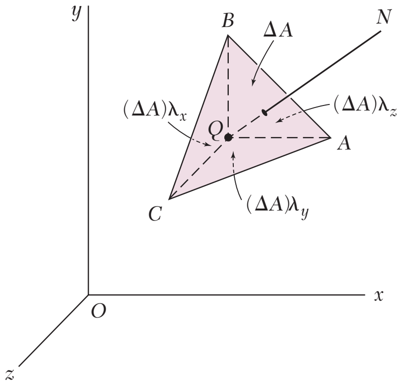


Figura 7.25

Considere el tetraedro mostrado en la figura 7.25. Tres de sus caras son paralelas a los planos coordenados, y la cuarta cara ABC es perpendicular a la línea QN. Si ΔA es el área de la cara ABC, y λ_x, λ_y, λ_z los cosenos directores de QN, se encuentra que las áreas de las caras perpendiculares a los ejes x, y y z son, respectivamente, $(\Delta A)\lambda_x$, $(\Delta A)\lambda_y$ y $(\Delta A)\lambda_z$. Si el estado de esfuerzo en el punto Q está definido por las componentes σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}, entonces las *fuerzas* ejercidas sobre las caras paralelas a los planos coordenados pueden obtenerse multiplicando las componentes apropiadas del esfuerzo por el área de cada cara (figura 7.26). Por otra parte, las fuerzas ejercidas sobre la cara ABC constan de una fuerza normal de magnitud $\sigma_n\,\Delta A$ dirigida a lo largo de QN, y de una fuerza cortante de magnitud $\tau\,\Delta A$ perpendicular a QN, pero de dirección desconocida. Note que como QBC, QCA y QAB, respectivamente, enfrentan las direcciones negativas de los ejes x, y y z, las fuerzas ejercidas sobre ellas deben mostrarse con sentidos negativos.

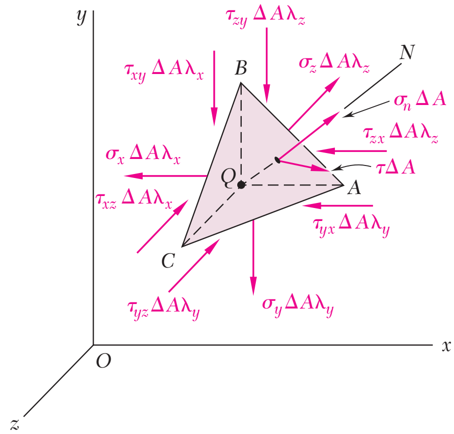

y
$\tau_{zy}\,\Delta A\lambda_z$
$\tau_{xy}\,\Delta A\lambda_x$
B
$\sigma_z\,\Delta A\lambda_z$
N
$\sigma_n\,\Delta A$
$\tau_{zx}\,\Delta A\lambda_z$
$\sigma_x\,\Delta A\lambda_x$
$\tau\Delta A$
Q
A
$\tau_{xz}\,\Delta A\lambda_x$
$\tau_{yx}\,\Delta A\lambda_y$
C
$\tau_{yz}\Delta A\lambda_y$
$\sigma_y\Delta A\lambda_y$
O
x
z

Figura 7.26

Ahora se expresa que la suma de las componentes de todas las fuerzas que actúan en el tetraedro, a lo largo de QN, es cero. Observando que las componentes de una fuerza paralela al eje x a lo largo de QN se obtiene multiplicando su magnitud por el coseno director λ_x, y que las componentes de las fuerzas paralelas a los ejes y y z se obtienen en forma similar, se escribe

$$\sum F_n = 0: \qquad \sigma_n\,\Delta A - (\sigma_x\,\Delta A\;\lambda_x)\lambda_x - (\tau_{xy}\,\Delta A\;\lambda_x)\lambda_y - (\tau_{xz}\,\Delta A\;\lambda_x)\lambda_z$$
$$- (\tau_{yx}\,\Delta A\;\lambda_y)\lambda_x - (\sigma_y\,\Delta A\;\lambda_y)\lambda_y - (\tau_{yz}\,\Delta A\;\lambda_y)\lambda_z$$
$$- (\tau_{zx}\,\Delta A\;\lambda_z)\lambda_x - (\tau_{zy}\,\Delta A\;\lambda_z)\lambda_y - (\sigma_z\,\Delta A\;\lambda_z)\lambda_z = 0$$

Dividiendo entre ΔA y despejando a σ_n,

$$\sigma_n = \sigma_x\lambda_x^2 + \sigma_y\lambda_y^2 + \sigma_z\lambda_z^2 + 2\tau_{xy}\lambda_x\lambda_y + 2\tau_{yz}\lambda_y\lambda_z + 2\tau_{zx}\lambda_z\lambda_x \qquad (7.20)$$

Se observa que la expresión obtenida para σ_n es una *forma cuadrática* en λ_x, λ_y y λ_z. Se sigue que pueden escogerse los ejes coordenados de tal manera que el miembro derecho de la ecuación (7.20) se reduzca a los tres términos que contienen los cuadrados de los cosenos directores.[†] Llamando estos ejes a, b y c, los correspondientes esfuerzos normales por σ_a, σ_b y σ_c y los cosenos directores de QN, con respecto a estos ejes, por λ_a, λ_b y λ_c, se escribe

$$\sigma_n = \sigma_a\lambda_a^2 + \sigma_b\lambda_b^2 + \sigma_c\lambda_c^2 \qquad (7.21)$$

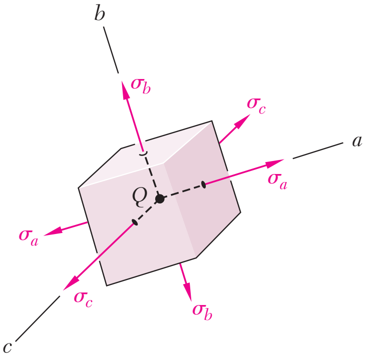

b
σ_b
σ_c
a
σ_a
Q
σ_a
σ_c
σ_b
c

Figura 7.27

Los ejes coordenados a, b, c son los *ejes principales de esfuerzo*. Como su orientación depende del estado de esfuerzo en Q y, en consecuencia, de la posición de Q, se han representado en la figura 7.27 unidos a Q. Los planos coordenados correspondientes son los *planos principales de esfuerzo* y los correspondientes esfuerzos normales σ_a, σ_b y σ_c son los *esfuerzos principales* en Q.[‡]

[†] En la sección 9.16 de *Vector Mechanics for Engineers* de Beer y Johnston, 7a. edición, McGraw-Hill, Book Company, 2004, se encuentra una forma cuadrática similar para representar el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje cualquiera. En la sección 9.17 se muestra que esta forma está asociada con una superficie cuadrática y que reduciendo la forma cuadrática a términos que contienen sólo los cuadrados de los cosenos directores se determinan los ejes principales de esa superficie.

[‡] Para un análisis de la determinación de los planos principales de esfuerzo y de los esfuerzos principales, véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, 1970, sec. 77.

7.6 APLICACIÓN DEL CÍRCULO DE MOHR AL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE ESFUERZOS

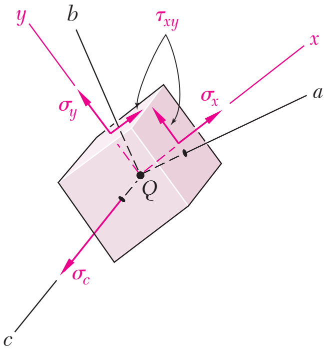


Figura 7.28

Si el elemento mostrado en la figura 7.27 gira con respecto a uno de los ejes principales en Q, por ejemplo el eje c (figura 7.28), la correspondiente transformación de esfuerzos puede analizarse mediante el círculo de Mohr, como si fuera una transformación de esfuerzo plano. Ciertamente, los esfuerzos cortantes ejercidos sobre las caras perpendiculares al eje c permanecen iguales a cero y el esfuerzo normal σ_c es perpendicular al plano ab en el cual la transformación tiene lugar y, así, no afecta esta transformación. Puede, por tanto, usarse el círculo de diámetro AB para determinar los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre las caras del elemento cuando gira con respecto al eje c (figura 7.29). Análogamente, los círculos de diámetro BC y CA pueden usarse para determinar los esfuerzos en el elemento cuando gira con respecto a los ejes a y b. Mientras este análisis se limita a rotaciones con respecto a los ejes principales, podría demostrarse que cualquier otra transformación de ejes conducirá a esfuerzos representados en la figura 7.29 por un punto dentro del área sombreada. Por consiguiente, el radio del mayor de los círculos da el esfuerzo cortante máximo en el punto Q. Notando que su diámetro es igual a la diferencia entre $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$, se escribe

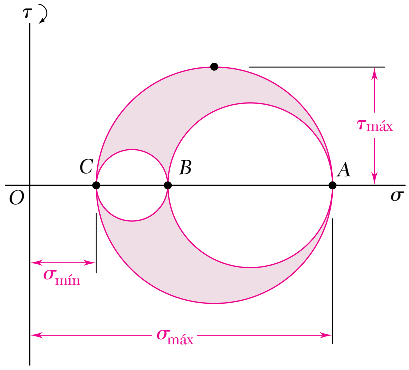


Figura 7.29

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}| \tag{7.22}$$

en donde $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ representan los valores *algebraicos* de los esfuerzos máximo y mínimo en el punto Q.

Regresemos ahora al caso particular de *esfuerzo plano*, que se estudió en las secciones 7.2 a 7.4. Recuerde que si los ejes x y y se eligen en el plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Esto significa que el eje z, es decir, el eje perpendicular al plano de esfuerzo, es uno de los tres ejes principales de esfuerzo. En un diagrama de círculo de Mohr, este eje corresponde al origen O, en donde $\sigma = \tau = 0$. Recuerde también que los otros dos ejes principales corresponden a los puntos A y B donde el círculo de Mohr, para

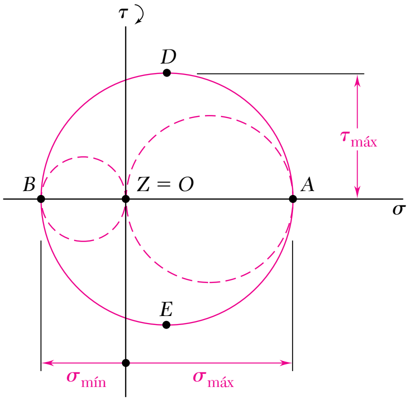
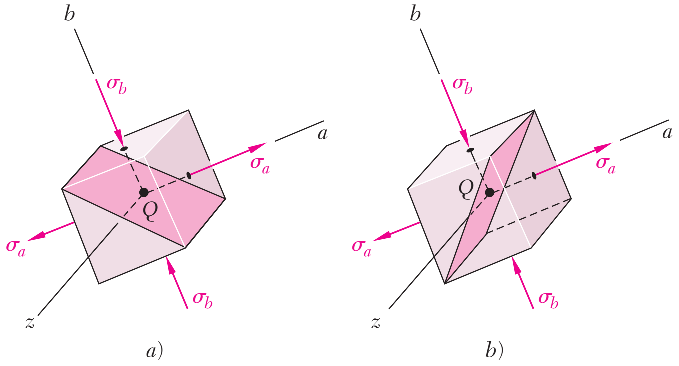


Figura 7.30

el plano xy, interseca el eje σ. Si A y B están en lados opuestos del origen O (figura 7.30), los esfuerzos principales correspondientes representan al esfuerzo máximo y mínimo normal en el punto Q, y el esfuerzo cortante máximo es igual al máximo cortante en el plano. Como se observó en la sección 7.3, los planos de esfuerzo cortante máximo corresponden a los puntos D y E del círculo de Mohr y están a 45° de los planos principales correspondientes a los puntos A y B. Son, por tanto, los planos sombreados de la figura 7.31*a* y *b*.

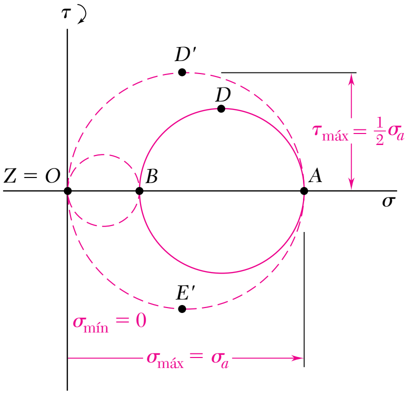


b
σ_b
a
σ_a
Q
σ_a
σ_b
z
b
σ_b
a
σ_a
Q
σ_a
σ_b
z

a) *b*)

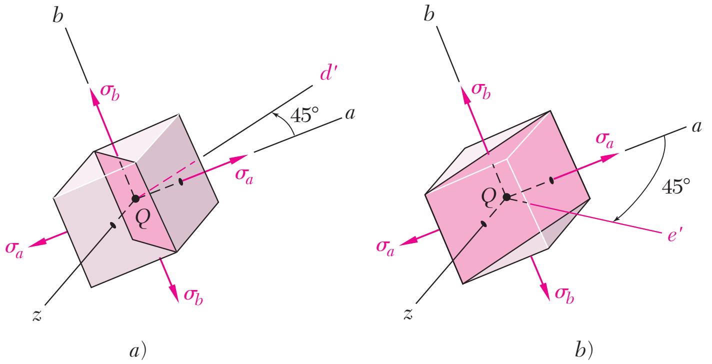
Figura 7.31

Si, por otra parte, A y B están en el mismo lado de O, esto es, si σ_a y σ_b tienen el mismo signo, entonces el círculo que define $\sigma_{\text{máx}}$, $\sigma_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ *no* es el círculo correspondiente a una transformación de esfuerzo dentro del plano xy. Si $\sigma_a > \sigma_b > 0$, como se supone en la figura 7.32, se tiene $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_a$, $\sigma_{\text{mín}} = 0$ y $\tau_{\text{máx}}$ es igual al radio del círculo definido por los puntos O y A, esto es $\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{máx}}$. También se advierte que las normales Qd' y Qe', a los planos de esfuerzo cortante máximo, se obtienen rotando el eje Qa a un ángulo de 45° dentro del plano za. Así, los planos de esfuerzo cortante máximo son los planos diagonales sombreados en la figura 7.33*a* y *b*.



τ
D'
D
$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sigma_a$
$Z = O$
B
A
σ
E'
$\sigma_{\text{mín}} = 0$
$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_a$

Figura 7.32



b
σ_b
d'
45°
a
σ_a
Q
σ_a
σ_b
z
b
σ_b
σ_a
a
45°
Q
e'
σ_a
σ_b
z

a) *b*)

Figura 7.33

EJEMPLO 7.03

Para el estado de esfuerzo plano que ilustra la figura 7.34, determine: *a*) los tres planos y esfuerzos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

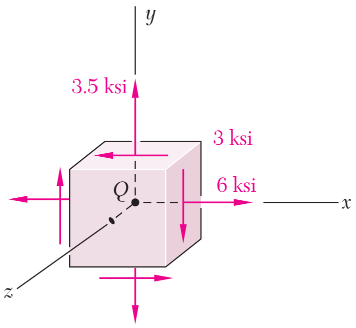


Figura 7.34

a) Esfuerzos y planos principales. Se construye el círculo de Mohr para las transformaciones de esfuerzo en el plano *xy* (figura 7.35). El punto *X* está representando 6 unidades a la derecha del eje τ y 3 unidades por encima del eje σ, ya que el correspondiente esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj. El punto *Y* está 3.5 unidades a la derecha del eje τ y 3 unidades por debajo del eje σ. Trazando la línea *XY*, se obtiene el centro *C* del círculo de Mohr para el plano *xy*; su abscisa es:

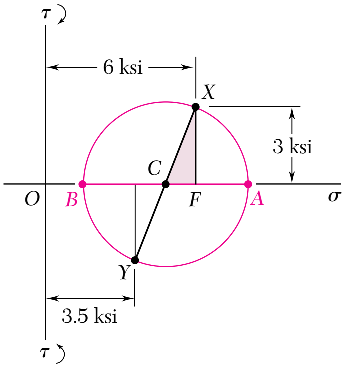


Figura 7.35

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6 + 3.5}{2} = 4.75 \text{ ksi}$$

Como los lados del triángulo *CFX* son $CF = 6 - 4.75 = 1.25$ ksi y $FX = 3$ ksi, el radio del círculo es

$$R = CX = \sqrt{(1.25)^2 + (3)^2} = 3.25 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos principales en el plano de esfuerzos son:

$$\sigma_a = OA = OC + CA = 4.75 + 3.25 = 8.00 \text{ ksi}$$
$$\sigma_b = OB = OC - BC = 4.75 - 3.25 = 1.50 \text{ ksi}$$

Puesto que las caras del elemento que son perpendiculares al eje *z* están libres de esfuerzo, éstas definen uno de los planos principales y el esfuerzo principal correspondiente es $\sigma_z = 0$. Los otros dos planos principales están definidos por los puntos *A* y *B* en el círculo de Mohr. El ángulo θ_p que el elemento debe rotar alrededor del eje *z* para que sus caras coincidan con estos planos (figura 7.36) es la mitad del ángulo *ACX*. Se tiene

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{3}{1.25}$$
$$2\theta_p = 67.4^\circ \circlearrowright \qquad \theta_p = 33.7^\circ \circlearrowright$$

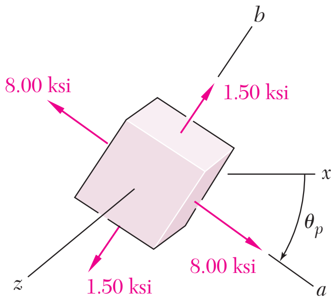


Figura 7.36

b) Esfuerzo cortante máximo. Ahora se dibujan los círculos de diámetro *OB* y *OA*, que corresponden respectivamente a rotaciones del elemento con respecto a los ejes *a* y *b* (figura 7.37). Note que el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro *OA*. Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_a = \tfrac{1}{2}(8.00 \text{ ksi}) = 4.00 \text{ ksi}$$

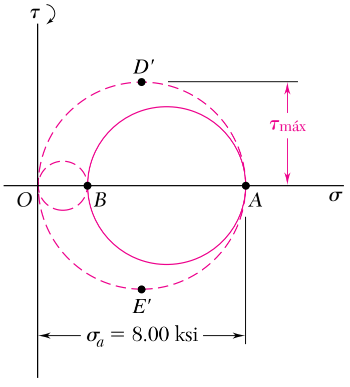


Figura 7.37

Como los puntos *D′* y *E′* que definen los planos de esfuerzo cortante máximo, están en los extremos del diámetro vertical del círculo que corresponde a una rotación con respecto al eje *b*, las caras del elemento de la figura 7.36 pueden superponerse a los planos de esfuerzo cortante máximo mediante una rotación de 45° con respecto al eje *b*.

*7.7 CRITERIOS DE FLUENCIA PARA MATERIALES DÚCTILES BAJO ESFUERZO PLANO

Los elementos estructurales y las componentes de máquinas elaborados de un material dúctil se diseñan de manera que el material no fluya bajo las condiciones esperadas de carga. Cuando el elemento o componente está sometido a esfuerzo uniaxial (figura 7.38), el valor del esfuerzo normal σ_x que hará fluir el material puede obtenerse fácilmente de una prueba de tensión llevada a cabo en una probeta del mismo material, ya que la probeta y el elemento estructural o componente de máquina están en el mismo estado de esfuerzo. En consecuencia, sin importar el mecanismo que hace fluir el material, puede afirmarse que el elemento o componente está seguro siempre que $\sigma_x < \sigma_Y$, en donde σ_Y es la resistencia a la fluencia del elemento de prueba.

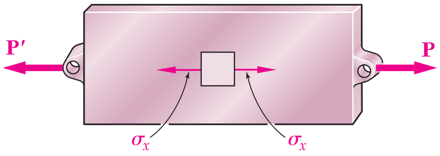
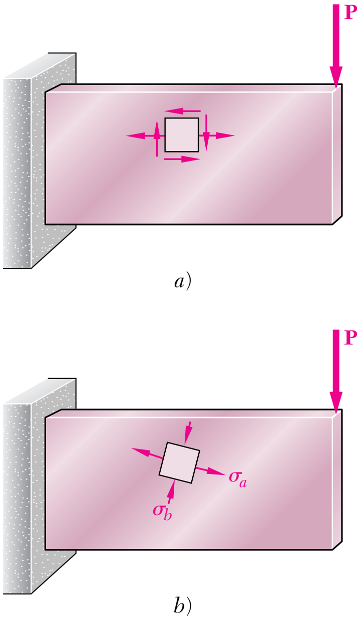


Figura 7.38



a)

b)

Figura 7.39

Por otra parte, cuando un elemento estructural o componente de máquina está en un estado de esfuerzo plano (figura 7.39*a*), es conveniente usar uno de los métodos desarrollados con anterioridad para determinar los esfuerzos principales σ_a y σ_b en cualquier punto dado (figura 7.39*b*). El material puede considerarse entonces en un estado de esfuerzo biaxial en ese punto. Como este estado es diferente del estado uniaxial típico de un elemento sometido a una prueba de tensión, es obvio que no es posible predecir, directamente de tal prueba, si el elemento estructural o el elemento de máquina bajo investigación fallará o no. Primero debe establecerse algún criterio acerca del mecanismo de falla del material que permita comparar los efectos de ambos estados de esfuerzo en el material. El propósito de esta sección es presentar los dos criterios de fluencia usados con mayor frecuencia para materiales dúctiles.

Criterio del esfuerzo cortante máximo. Este criterio se basa en la observación que sitúa la fluencia de materiales dúctiles como resultado del deslizamiento del material, a lo largo de superficies oblicuas, debido a esfuerzos cortantes (véase sección 2.3). De acuerdo con este criterio, un componente estructural es seguro siempre que el valor máximo $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante, en esa componente, permanezca por debajo del valor correspondiente del esfuerzo cortante que, en una prueba de tensión de una probeta del mismo material la hace fluir.

Recordando de la sección 1.11 que el máximo valor del esfuerzo cortante bajo una carga axial céntrica es igual a la mitad del valor del esfuerzo axial correspondiente, se concluye que el esfuerzo cortante máximo en una prueba de tensión es $\frac{1}{2}\sigma_Y$ cuando la probeta empieza a fluir. Por otra parte, se estudió en la sección 7.6 que, para el esfuerzo plano, el máximo valor $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante es $\frac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}}|$ si los esfuerzos principales son ambos positivos o ambos negativos y es $\frac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}|$ si el máximo esfuerzo es positivo o el mínimo negativo. Por consiguiente, si los esfuerzos principales σ_a y σ_b tienen el mismo signo, el criterio del esfuerzo cortante máximo da:

$$|\sigma_a| < \sigma_Y \qquad |\sigma_b| < \sigma_Y \tag{7.23}$$

Si los esfuerzos principales σ_a y σ_b tienen signos opuestos, el criterio del esfuerzo cortante máximo produce

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_Y \tag{7.24}$$

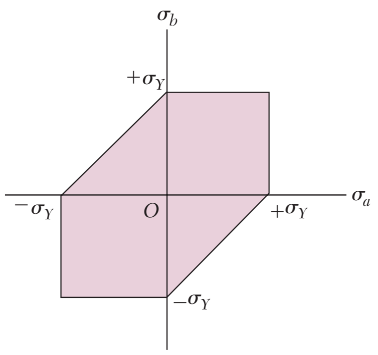


Figura 7.40

En la figura 7.40 se han representado gráficamente las relaciones obtenidas. Cualquier estado de esfuerzo se representará en esa figura por un punto de coordenadas σ_a y σ_b, en donde σ_a y σ_b son los esfuerzos principales. Si el punto cae dentro del área mostrada en la figura, el componente estructural es seguro. Si cae fuera de esta área, el componente fallará por cedencia del material. El hexágono asociado con la iniciación de la cedencia en el material se conoce como *hexágono de Tresca* en honor al ingeniero francés Henri Edouard Tresca (1814-1885).

Criterio de la máxima energía de distorsión. Se basa en el cálculo de la energía de distorsión en un material dado, es decir, de la energía asociada con cambios en la forma del material (distinto de la energía asociada con el cambio de volumen en el mismo material). De acuerdo con este criterio, también conocido como el *criterio de von Mises*, en honor del matemático germano-estadounidense Richard von Mises (1883-1953), un componente estructural dado es seguro siempre que el valor máximo de la energía de distorsión por unidad de volumen en ese material permanezca más pequeño que la energía de distorsión por unidad de volumen requerida para hacer fluir una probeta del mismo material sometida a tensión. Como se verá en la sección 11.6, la energía de distorsión por unidad de volumen en un material isotrópico bajo esfuerzo plano es

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{7.25}$$

donde σ_a y σ_b son los esfuerzos principales y G el módulo de rigidez. En el caso particular de una probeta de tensión que empieza a fluir, se tiene $\sigma_a = \sigma_Y$, $\sigma_b = 0$ y $(u_d)_Y = \sigma_Y^2/6G$. Así, el criterio de la máxima energía de distorsión indica que el componente estructural es seguro siempre que $u_d < (u_d)_Y$, o

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \tag{7.26}$$

es decir, siempre que el punto de coordenadas σ_a y σ_b caiga dentro del área mostrada en la figura 7.41. Esta área está limitada por la elipse cuya ecuación es

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_Y^2 \tag{7.27}$$

la cual interseca los ejes coordenados en $\sigma_a = \pm\sigma_Y$ y $\sigma_b = \pm\sigma_Y$. Puede verificarse que el pie mayor de la elipse biseca el primer y tercer cuadrantes desde A ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_Y$) hasta B ($\sigma_a = \sigma_b = -\sigma_Y$), mientras su eje menor se extiende desde C ($\sigma_a = -\sigma_b = -0.577\sigma_Y$) hasta D ($\sigma_a = -\sigma_b = 0.577\sigma_Y$).

En la figura 7.42 se comparan el criterio del esfuerzo cortante máximo con el de la energía máxima de distorsión. Note que la elipse pasa por los vértices del hexágono. En consecuencia, para los estados de esfuerzo representados por estos seis puntos, los dos criterios coinciden. Para cualquier otro

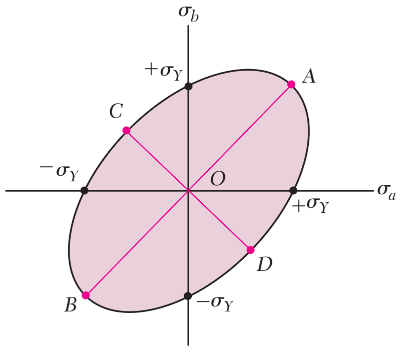


Figura 7.41

estado de esfuerzo, el criterio del esfuerzo cortante máximo es más conservador que el criterio de la máxima energía de distorsión, ya que el hexágono está dentro de la elipse.

Un estado de esfuerzo de interés particular es el que se asocia con la fluencia en la prueba de torsión. Recuerde de la figura 7.24 de la sección 7.4 que, para torsión $\sigma_{\text{mín}} = -\sigma_{\text{máx}}$; entonces, los puntos correspondientes en la figura 7.42 están localizados en el bisector del segundo y cuarto cuadrantes. Se sigue que la fluencia ocurre en una prueba de torsión cuando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0.5\sigma_Y$, de acuerdo con el criterio del esfuerzo cortante máximo y, cuando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0.577\sigma_Y$ según el criterio de la máxima energía de distorsión. Pero recordando la figura 7.24, notamos que σ_a y σ_b deben ser iguales en magnitud a $\tau_{\text{máx}}$, esto es, el valor obtenido de una prueba de torsión para la resistencia de la cedencia τ_Y del material. Como los valores del límite de cedencia σ_Y en tensión y τ_Y en cortante están dados para varios materiales dúctiles en el apéndice B, puede calcularse la razón τ_Y/σ_Y para estos materiales y verificar que los valores obtenidos están entre 0.55 y 0.60. Por consiguiente, el criterio de la máxima energía de distorsión aparece un poco más aproximado que el criterio del esfuerzo cortante máximo en cuanto se refiere a predecir cedencia en torsión.

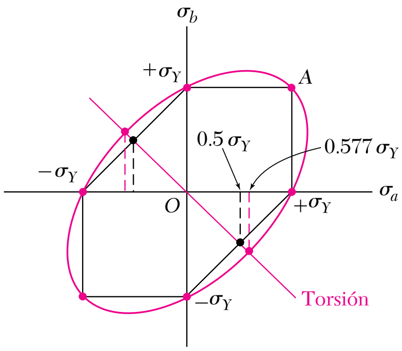


Figura 7.42

*7.8 CRITERIOS DE FRACTURA PARA MATERIALES FRÁGILES BAJO ESFUERZO PLANO

Como se vio en el capítulo 2, los materiales frágiles se caracterizan por el hecho de que cuando son sometidos a una prueba de tensión, fallan repentinamente por ruptura o fractura, sin cedencia. Cuando un elemento estructural o componente de máquina hecho de material frágil está bajo tensión uniaxial, el valor del esfuerzo normal que lo hace fallar es igual a la resistencia última del material σ_U, determinada de una prueba de tensión, puesto que ambos, la probeta de prueba de tensión y el elemento o componente bajo investigación, están en el mismo estado de esfuerzo. Sin embargo, cuando un elemento estructural o componente de máquina está en un estado de esfuerzo plano, es conveniente determinar primero los esfuerzos principales σ_a y σ_b en cualquier punto dado y usar uno de los criterios de esta sección para predecir si el elemento estructural o elemento de máquina fallará.

Criterio del esfuerzo normal máximo. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado falla cuando el esfuerzo normal máximo en el componente alcanza la resistencia última σ_U obtenida de una prueba de tensión de una probeta del mismo material. Así, el componente estructural será seguro mientras los valores absolutos de los esfuerzos principales σ_a y σ_b sean ambos menores que σ_U:

$$|\sigma_a| < \sigma_U \qquad |\sigma_b| < \sigma_U \tag{7.28}$$

El criterio del esfuerzo normal máximo puede expresarse gráficamente como se muestra en la figura 7.43. Si el punto obtenido dibujando los valores σ_a y σ_b de los esfuerzos principales cae dentro del área cuadrada mostrada en la figura, el componente estructural es seguro. Si cae fuera del área, el componente fallará.

El criterio del esfuerzo normal máximo, también conocido como *criterio de Coulomb*, en honor del físico francés Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), experimenta una importante limitación, puesto que se basa en la hipótesis de que la resistencia última del material es la misma a tensión

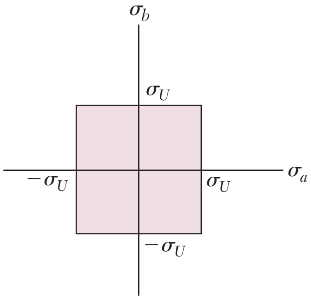


Figura 7.43

que a compresión. Como se observa en la sección 2.3 este caso se presenta raras veces, porque la presencia de fallas en el material, como grietas microscópicas o cavidades, que tienden a debilitar el material sometido a tensión, no afectan apreciablemente su resistencia a la compresión. Además, este criterio no considera efectos distintos de los esfuerzos normales en el mecanismo de falla del material.[†]

Criterio de Mohr. Este criterio, sugerido por el ingeniero alemán Otto Mohr, puede usarse para predecir el efecto de un estado dado de esfuerzo plano en un material frágil, cuando los resultados de varios tipos de pruebas están disponibles para el material.

Primero suponga que se han realizado una prueba de tensión y una de compresión en un material dado y que se han determinado los valores σ_{UT} y σ_{UC} de los esfuerzos últimos a tensión y a compresión para dicho material. El estado de esfuerzo correspondiente a la ruptura de la probeta a tensión puede representarse en un diagrama de círculo de Mohr por el círculo que interseca el eje horizontal en O y σ_{UT} (figura 7.44*a*). Análogamente, el estado de esfuerzo correspondiente a la falla de la probeta por compresión puede representarse por el círculo que corta al eje horizontal en O y en σ_{UC}. Es claro que un estado de esfuerzo representado por un círculo enteramente contenido en cualquiera de estos dos círculos será seguro. Así, si los dos esfuerzos principales son positivos, el estado de esfuerzo es seguro mientras $\sigma_a < \sigma_{UT}$ y $\sigma_b < \sigma_{UT}$; si ambos esfuerzos principales son negativos, el estado de esfuerzo es seguro siempre que $|\sigma_a| < |\sigma_{UC}|$ y $|\sigma_b| < |\sigma_{UC}|$. Dibujando el punto de coordenadas σ_a y σ_b (figura 7.44*b*), se verifica que el estado de esfuerzo es seguro mientras el punto caiga dentro de una de las áreas cuadradas mostradas en esa figura.

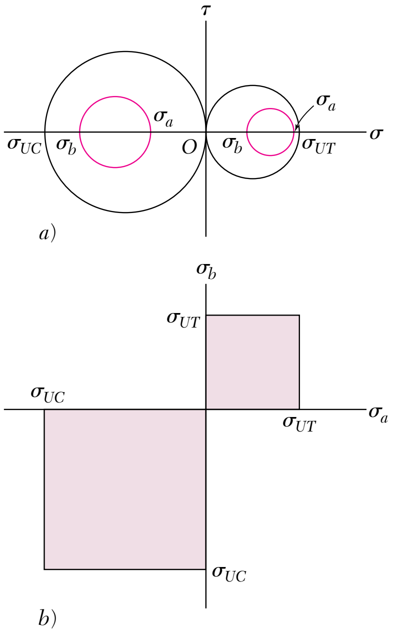


Figura 7.44

Para analizar los casos cuando σ_a y σ_b tienen signos opuestos, se supondrá que se ha realizado una prueba de torsión en el material y que se ha determinado su resistencia última a cortante, τ_U. Dibujando el círculo centrado en O, que representa el estado de esfuerzo correspondiente a la falla de la probeta en la prueba de torsión (figura 7.46*a*), se observa que cualquier estado de esfuerzo representado por un círculo contenido en ese círculo es también seguro. El criterio de Mohr es una extensión lógica de esta observación:

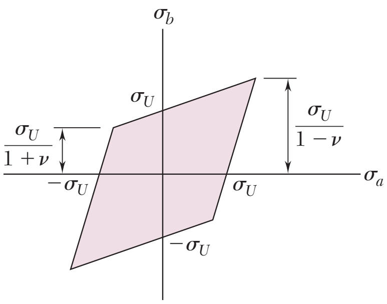


Figura 7.45

[†] Otro criterio de falla conocido como *máxima deformación normal* o de Saint-Venant, se usó ampliamente durante el siglo XIX. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado es seguro siempre que el valor máximo de la deformación normal en ese componente permanezca menor que un valor ϵ_U de la deformación a la cual fallará una probeta del mismo material a tensión. Pero, como se verá en la sección 7.12, la deformación es máxima a lo largo de uno de los ejes principales de esfuerzo, si la deformación es elástica y el material es homogéneo e isotrópico. Así, designando por ϵ_a y ϵ_b los valores de la deformación normal a lo largo de los ejes principales en el plano de esfuerzo, se escribe

$$|\epsilon_a| < \epsilon_U \qquad |\epsilon_b| < \epsilon_U \tag{7.29}$$

Haciendo uso de la ley general de Hooke (véase la sección 2.12) se podrían expresar estas relaciones en términos de los esfuerzos principales σ_a y σ_b y la resistencia última σ_U del material. Se encontraría que, de acuerdo con el criterio de la máxima deformación normal, el componente estructural es seguro mientras el punto obtenido al graficar σ_a y σ_b cae dentro del área mostrada en la figura 7.45 donde ν es la relación de Poisson para el material dado.

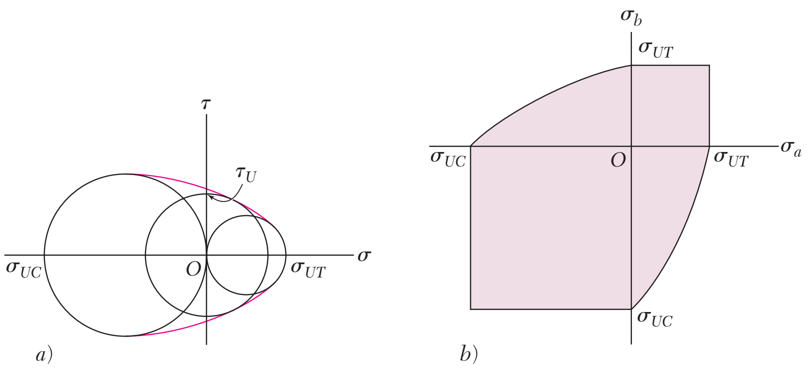


Figura 7.46

de acuerdo con el criterio de Mohr, un estado de esfuerzo es seguro si está representado por un círculo localizado enteramente dentro del área limitada por la envolvente de los círculos correspondientes a los datos disponibles. Las porciones restantes del diagrama de esfuerzos principales pueden obtenerse dibujando varios círculos tangentes a esta envolvente, determinando los valores correspondientes de σ_a y σ_b, y trazando los puntos de coordenadas σ_a y σ_b (figura 7.46*b*).

Algunos diagramas más exactos se pueden dibujar cuando hay disponibilidad de resultados de pruebas adicionales, correspondientes a varios estados de esfuerzo. Si, por otra parte, los únicos datos disponibles son las resistencias últimas σ_{UT} y σ_{UC}, la envolvente de la figura 7.46*a* se remplaza por las tangentes AB y $A'B'$ a los círculos correspondientes, respectivamente, a falla a tensión y falla a compresión (véase figura 7.47*a*). En los triángulos semejantes dibujados en esa figura, se observa que la abscisa del centro C de un círculo tangente a AB y a $A'B'$ está relacionada linealmente con su radio R. Como $\sigma_a = OC + R$ y $\sigma_b = OC - R$, se sigue que σ_a y σ_b también están linealmente relacionados. Así, el área sombreada correspondiente a este criterio simplificado de Mohr se encuentra limitada por líneas rectas en el segundo y cuarto cuadrantes (véase figura 7.47*b*).

Note que para determinar si un componente estructural estará seguro bajo una carga dada, el estado de esfuerzo debe calcularse en todos los puntos críticos del componente, es decir, en todos los puntos donde pueden ocurrir concentraciones de esfuerzos. Esto se puede hacer, en unos casos, usando los factores de concentración de esfuerzos dados en las figuras 2.64, 3.32, 4.31 y 4.32. Hay muchas instancias, sin embargo, en donde debe usarse la teoría de la elasticidad para determinar el estado de esfuerzo en un punto crítico.

Debe tenerse un especial cuidado cuando se han detectado *grietas macroscópicas* en un componente estructural. Mientras pueda suponerse que la probeta utilizada para determinar la resistencia última del material a tensión contiene el mismo tipo de fallas (es decir, *grietas microscópicas* o cavidades) que el elemento estructural en estudio, la probeta está ciertamente libre de grietas macroscópicas detectables. Cuando se identifica una grieta en un componente estructural, es necesario determinar si esa grieta tenderá a propagarse bajo las condiciones de carga esperadas y hará fallar el componente o si permanecerá estable. Esto requiere un análisis que considere la energía asociada con el crecimiento de la grieta. Tal análisis está más allá de la finalidad de este texto y debe desarrollarse mediante los métodos de la mecánica de fracturas.

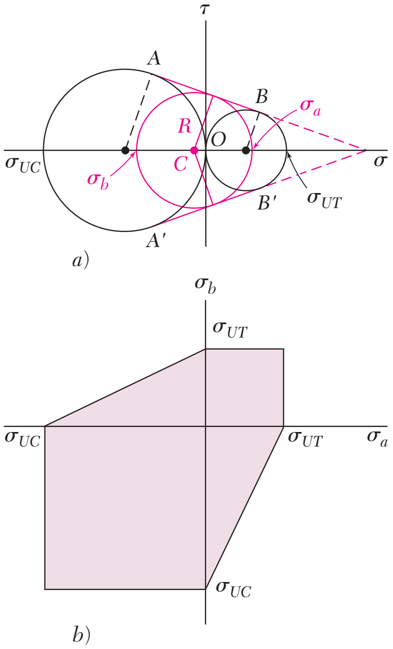
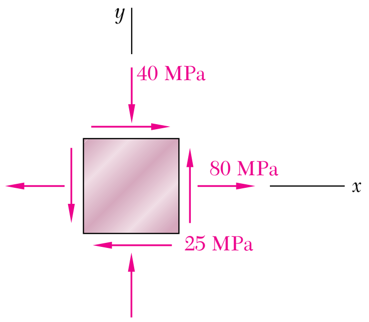


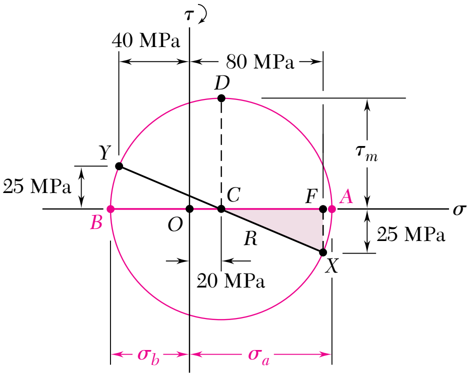
Figura 7.47



PROBLEMA MODELO 7.4

El estado de esfuerzo plano representado en la figura ocurre en un punto crítico de una máquina. Como resultado de varias pruebas de tensión, se ha encontrado que el límite de fluencia a tensión es $\sigma_Y = 250$ MPa para el grado de acero usado. Determine el factor de seguridad con respecto a la fluencia, usando: *a*) el criterio del esfuerzo cortante máximo y *b*) el criterio de la máxima energía de distorsión.

SOLUCIÓN



Círculo de Mohr. Se construye el círculo de Mohr para el estado dado de esfuerzo y se halla

$$\sigma_{\text{prom}} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65 \text{ MPa}$$

Esfuerzos principales

$$\sigma_a = OC + CA = 20 + 65 = +85 \text{ MPa}$$
$$\sigma_b = OC - BC = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$

***a*) Criterio de esfuerzo cortante máximo.** Como para el grado de acero utilizado la resistencia a tensión es $\sigma_Y = 250$ MPa, el esfuerzo cortante correspondiente a la fluencia es

$$\tau_Y = \tfrac{1}{2}\sigma_Y = \tfrac{1}{2}(250 \text{ MPa}) = 125 \text{ MPa}$$

Para $\tau_m = 65$ MPa: $$F.S. = \frac{\tau_Y}{\tau_m} = \frac{125 \text{ MPa}}{65 \text{ MPa}} \qquad F.S. = 1.92 \blacktriangleleft$$

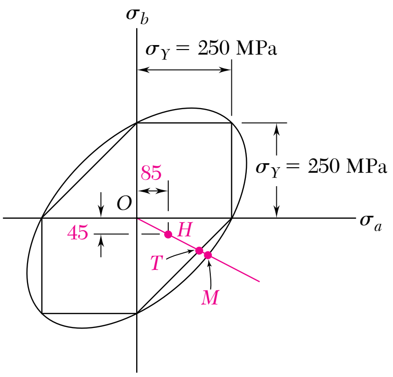
***b*) Criterio de la máxima energía de distorsión.** Introduciendo un factor de seguridad en la ecuación (7.26), se escribe

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \left(\frac{\sigma_Y}{F.S.}\right)^2$$

Para $\sigma_a = +85$ MPa, $\sigma_b = -45$ MPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, se tiene

$$(85)^2 - (85)(-45) + (45)^2 = \left(\frac{250}{F.S.}\right)^2$$

$$114.3 = \frac{250}{F.S.} \qquad F.S. = 2.19 \blacktriangleleft$$



Comentario. Para un material dúctil con $\sigma_Y = 250$ MPa, se ha dibujado el hexágono asociado con el criterio del esfuerzo cortante máximo y la elipse asociada con el criterio de la máxima energía de distorsión. El estado dado de esfuerzo plano está representado por el punto H de coordenadas $\sigma_a = 85$ MPa y $\sigma_b = -45$ MPa. Note que la línea recta dibujada por los puntos O y H interseca el hexágono en el punto T y la elipse, en el punto M. Para cada criterio, el valor obtenido del *F.S.* puede verificarse midiendo los segmentos indicados y calculando sus razones:

$$a)\ F.S. = \frac{OT}{OH} = 1.92 \qquad b)\ F.S. = \frac{OM}{OH} = 2.19$$

PROBLEMAS

7.66 Para el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_x = 0$ y $\sigma_y = 10$ ksi, *b*) $\sigma_x = 18$ ksi y $\sigma_y = 8$ ksi (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de él.)

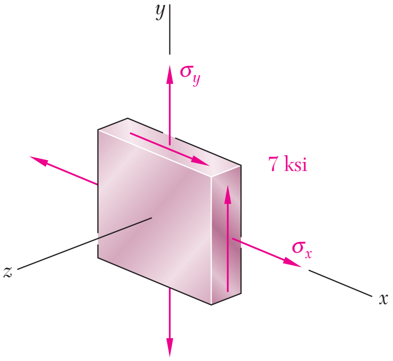


Figura P7.66 y *P7.67*

7.67 Para el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_x = 5$ ksi y $\sigma_y = 15$ ksi, *b*) $\sigma_x = 12$ ksi y $\sigma_y = 2$ ksi. (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de éste.)

7.68 Para el estado de esfuerzo plano ilustrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_y = 40$ MPa, *b*) $\sigma_y = 120$ MPa. (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de éste.)

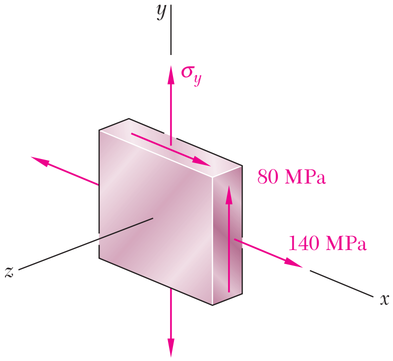


Figura P7.68 y P7.69

7.69 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_y = 20$ MPa, *b*) $\sigma_y = 140$ MPa. (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de éste.)

7.70 y 7.71 Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_z = +24$ MPa, *b*) $\sigma_z = -24$ MPa, *c*) $\sigma_z = 0$.

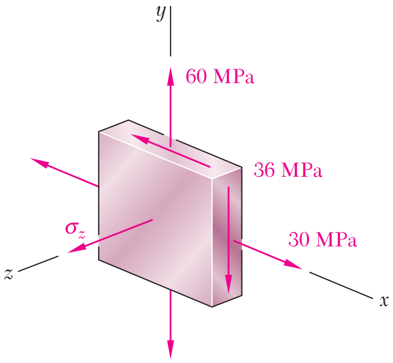


Figura P7.70

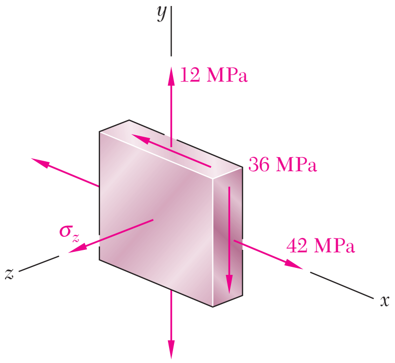


Figura P7.71

7.72 y *7.73* Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\tau_{yz} = 17.5$ ksi, *b*) $\tau_{yz} = 8$ ksi, *c*) $\tau_{yz} = 0$.

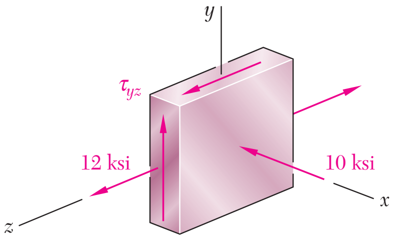

y
τ_{yz}
12 ksi
10 ksi
z
x

Figura P7.72

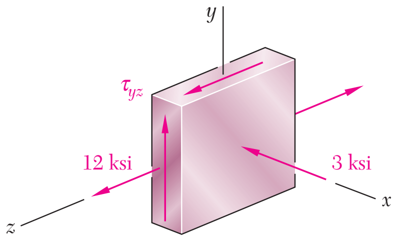

y
τ_{yz}
12 ksi
3 ksi
z
x

Figura *P7.73*

7.74 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine dos valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de *a*) 60 MPa, *b*) 78 MPa.

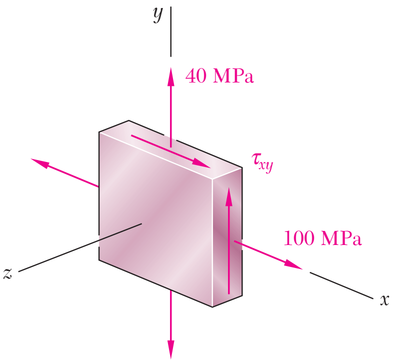

y
40 MPa
τ_{xy}
100 MPa
z
x

Figura P7.74

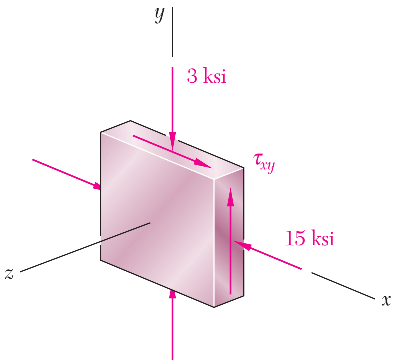

y
3 ksi
τ_{xy}
15 ksi
z
x

Figura P7.75

7.75 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es de *a*) 10 ksi, *b*) 8.25 ksi.

7.76 Para el estado de esfuerzo plano que se presenta en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de 7.5 ksi.

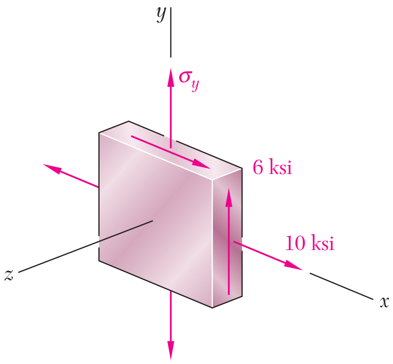

y
σ_y
6 ksi
10 ksi
z
x

Figura P7.76

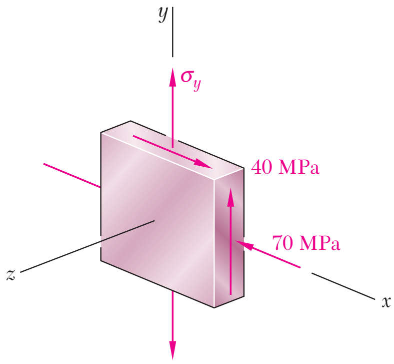

y
σ_y
40 MPa
70 MPa
z
x

Figura *P7.77*

7.77 Para el estado de esfuerzo plano que se presenta en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de 75 MPa.

7.78 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xz} para los cuales el esfuerzo cortante máximo es menor o igual que 90 MPa.

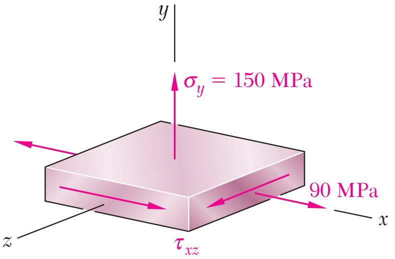


Figura P7.78

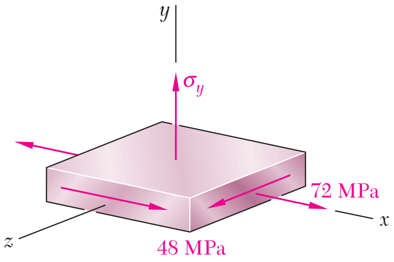


Figura *P7.79*

7.79 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de 64 MPa.

***7.80** Para el estado de esfuerzo del problema 7.69, determine *a*) el valor de σ_y para el cual el esfuerzo cortante máximo es lo más pequeño posible, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo cortante.

7.81 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurre en un componente estructural de acero de una máquina con $\sigma_Y = 325$ MPa. Con el criterio de la máxima energía de distorsión determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\sigma_0 = 200$ MPa, *b*) $\sigma_0 = 240$ MPa, *c*) $\sigma_0 = 280$ MPa. Si no ocurre cedencia, determine el factor de seguridad correspondiente.

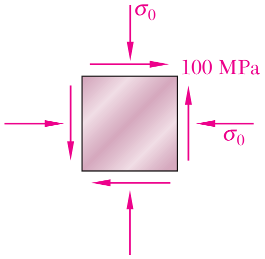


Figura P7.81

7.82 Retome el problema 7.81, y ahora considere el criterio del esfuerzo cortante máximo.

7.83 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina de acero con $\sigma_Y = 36$ ksi. Con el criterio de la máxima energía de distorsión, determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\tau_{xy} = 15$ ksi, *b*) $\tau_{xy} = 18$ ksi, *c*) $\tau_{xy} = 21$ ksi. Si la cedencia no ocurre, determine el factor de seguridad correspondiente.

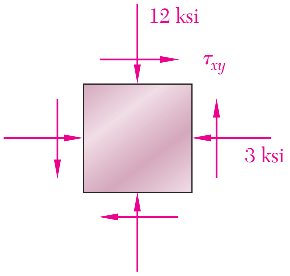


Figura P7.83

7.84 Retome el problema 7.83, y ahora use el criterio del esfuerzo cortante máximo.

7.85 El eje *AB* de 1.75 in. de diámetro está hecho de un grado de acero que tiene una resistencia a la cedencia $\sigma_Y = 36$ ksi. Con el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine la magnitud de la fuerza **P** para la cual se inicia la cedencia cuando $T = 15$ kip · in.

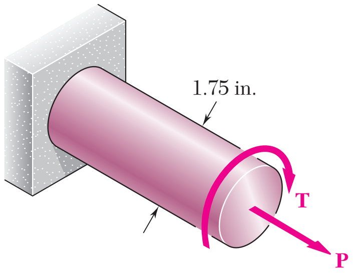


Figura P7.85

7.86 Retome el problema 7.85, y ahora use el criterio de la máxima energía de distorsión.

7.87 El eje *AB* de 36 mm de diámetro está hecho de un grado de acero cuyo esfuerzo de tensión hasta la cedencia es de 250 MPa. Con el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine la magnitud del par de torsión **T** para el que ocurre la cedencia cuando $P = 200$ kN.

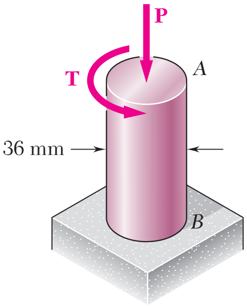


Figura *P7.87*

7.88 Retome el problema 7.87, y ahora use el criterio de la máxima energía de distorsión.

7.89 y 7.90 Se espera que el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de aluminio usada $\sigma_{UT} = 10$ ksi y $\sigma_{UC} = 30$ ksi, y con el criterio de Mohr determine si ocurrirá la ruptura del componente.

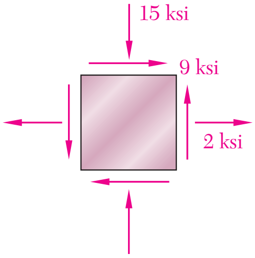


Figura P7.89

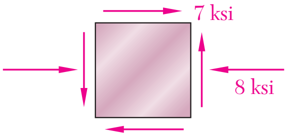


Figura P7.90

7.91 y 7.92 Se espera que el estado de esfuerzo plano ilustrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de aluminio usada $\sigma_{UT} = 80$ MPa y $\sigma_{UC} = 200$ MPa, y con el criterio de Mohr determine si se producirá la ruptura del componente.

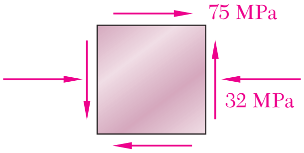


Figura P7.91

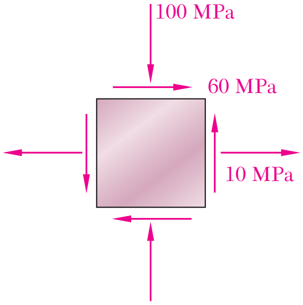


Figura P7.92

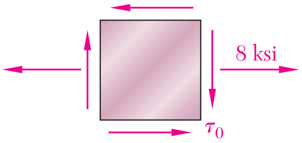


Figura *P7.93*

7.93 El estado de esfuerzo plano mostrado en la figura ocurrirá en un punto crítico de un tubo hecho de una aleación de aluminio para la cual $\sigma_{UT} = 10$ ksi y $\sigma_{UC} = 25$ ksi. Con el criterio de Mohr determine el esfuerzo cortante τ_0 en el cual puede presentarse la ruptura.

7.94 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurrirá en un punto crítico de un tubo que está hecho de una aleación de aluminio para la cual $\sigma_{UT} = 75$ MPa y $\sigma_{UC} = 150$ MPa. Use el criterio de Mohr y determine el esfuerzo cortante τ_0 para el cual se puede esperar una falla.

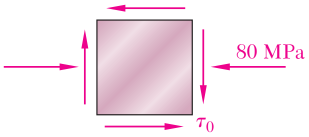


Figura P7.94

7.95 La varilla de aluminio fundido que se muestra en la figura está hecha de una aleación para la cual $\sigma_{UT} = 70$ MPa y $\sigma_{UC} = 175$ MPa. Si se sabe que la magnitud T del par aplicado se incrementa lentamente, utilice el criterio de Mohr para determinar el esfuerzo cortante τ_0 al cual se espera ocurrirá la ruptura.

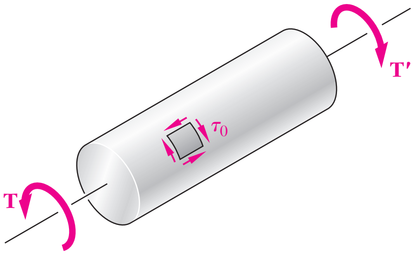


Figura P7.95

7.96 La varilla de aluminio fundido que se muestra en la figura está hecha de una aleación para la cual $\sigma_{UT} = 60$ MPa y $\sigma_{UC} = 120$ MPa. Use el criterio de Mohr y determine la magnitud del par de torsión **T** para el cual puede esperarse la ruptura.

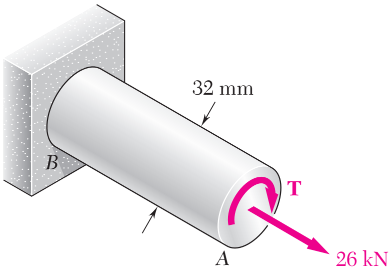


Figura P7.96

7.97 Un componente de máquina está elaborado de un hierro fundido para el cual $\sigma_{UT} = 8$ ksi y $\sigma_{UC} = 20$ ksi. Para cada estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura y con el criterio de Mohr, determine el esfuerzo normal σ_0 al cual se espera que ocurra la ruptura del componente.

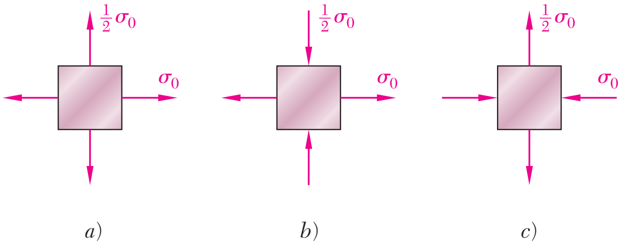


Figura *P7.97*

7.9 ESFUERZOS EN RECIPIENTES DE PARED DELGADA A PRESIÓN

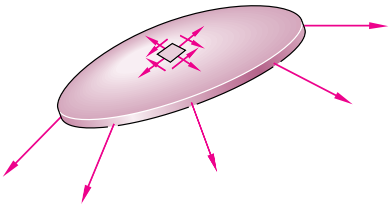


Figura 7.48

Los recipientes de pared delgada constituyen una aplicación importante del análisis de esfuerzo plano. Como sus paredes oponen poca resistencia a la flexión, puede suponerse que las fuerzas internas ejercidas sobre una parte de la pared son tangentes a la superficie del recipiente (figura 7.48). Los esfuerzos resultantes en un elemento de pared estarán contenidos en un plano tangente a la superficie del recipiente.

El análisis de esfuerzos en recipientes de pared delgada se limitará a los dos tipos que se encuentran con mayor frecuencia: recipientes cilíndricos y esféricos (figuras 7.49 y 7.50).

Figura 7.49

Figura 7.50

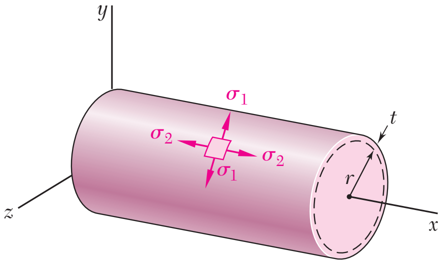


Figura 7.51

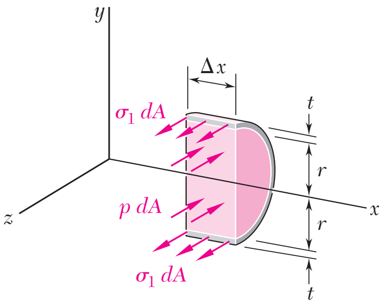


Figura 7.52

Considere un recipiente cilíndrico de radio interior r y espesor de pared t, que contiene un fluido a presión (figura 7.51). Se van a determinar los esfuerzos ejercidos sobre un pequeño elemento de pared con lados respectivamente paralelos y perpendiculares al eje del cilindro. Debido a la simetría axial del recipiente y de su contenido, es claro que no se ejercen esfuerzos cortantes sobre el elemento. Los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 mostrados en la figura 7.51 son por tanto esfuerzos principales. El esfuerzo σ_1 se conoce como *esfuerzo tangencial o de costilla* y se presenta en los aros de los barriles de madera; el esfuerzo σ_2 es el *esfuerzo longitudinal*.

Para determinar los esfuerzos de costilla σ_1 se retira una porción de recipiente y su contenido limitado por el plano xy y por dos planos paralelos al plano yz con una distancia Δx de separación entre ellos (figura 7.52). Las fuerzas paralelas al eje z que actúan en el cuerpo libre así definido consisten en las fuerzas internas elementales $\sigma_1\,dA$ en las secciones de pared y en las fuerzas de presión elementales $p\,dA$ ejercidas sobre la porción de fluido incluido en el cuerpo libre. Note que p es la *presión manométrica* del fluido, es decir, el exceso de la presión interior sobre la presión atmosférica exterior. La resultante de las fuerzas internas $\sigma_1\,dA$ es igual al producto de σ_1 y del área transversal $2t\,\Delta x$ de la pared, mientras que la resultante de las fuerzas $p\,dA$ es el producto de p y el área $2r\,\Delta x$. Escribiendo la ecuación de equilibrio $\Sigma F_z = 0$, se tiene

$$\Sigma F_z = 0: \qquad \sigma_1(2t\,\Delta x) - p(2r\,\Delta x) = 0$$

y resolviendo para el esfuerzo de costilla σ_1

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{7.30}$$

Para determinar el esfuerzo longitudinal σ_2, se realizará ahora un corte perpendicular al eje x y se considerará el cuerpo libre que consta de la parte del recipiente y de su contenido a la izquierda de la sección (figura 7.53).

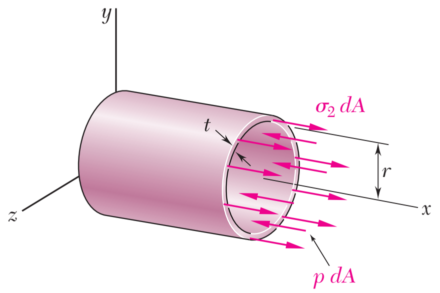


Figura 7.53

Las fuerzas que actúan en este cuerpo libre son las fuerzas internas elementales $\sigma_2\,dA$ en la sección de pared y las fuerzas elementales de presión $p\,dA$ ejercidas sobre la porción de fluido incluido en el cuerpo libre. Notando que el área de la sección de fluido es πr^2 y que el área de la sección de la pared puede obtenerse multiplicando la circunferencia $2\pi r$ del cilindro por su espesor de pared t, se escribe la ecuación de equilibrio[†]

$$\Sigma F_x = 0: \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

y despejando para el esfuerzo longitudinal σ_2

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.31}$$

Observe en las ecuaciones (7.30) y (7.31) que el esfuerzo de costilla σ_1 es el doble del esfuerzo longitudinal σ_2:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \tag{7.32}$$

[†] Usando el radio medio de la sección de la pared, $r_m = r + \frac{1}{2}t$, al calcular la resultante de las fuerzas en esa sección se obtendría un valor más aproximado del esfuerzo longitudinal:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}\frac{1}{1 + \dfrac{t}{2r}} \tag{7.31$'$}$$

Sin embargo, para un recipiente de pared delgada, el término $t/2r$ es suficientemente pequeño para permitir el uso de la ecuación (7.31) en diseño y en análisis de ingeniería. Si un recipiente de presión no es de pared delgada (si $t/2r$ no es pequeño), los esfuerzos σ_1 y σ_2 varían a través de la pared y deben calcularse por los métodos de la teoría de la elasticidad.

Dibujando el círculo de Mohr por los puntos A y B, que corresponde respectivamente a los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 (figura 7.54), y recordando que el esfuerzo cortante máximo en el plano es igual al radio del círculo, se tiene

$$\tau_{\text{máx(en el plano)}} = \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t} \tag{7.33}$$

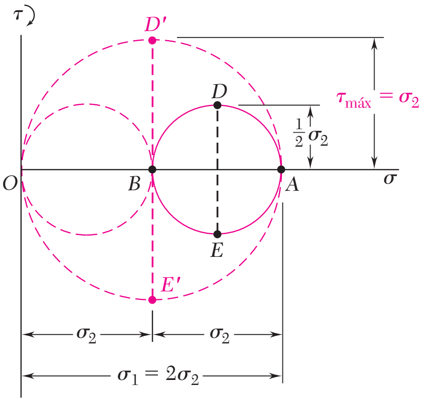


Figura 7.54

Este esfuerzo corresponde a los puntos D y E y se ejerce sobre un elemento obtenido mediante la rotación de 45° del elemento original de la figura 7.51, *dentro del plano* tangente a la superficie del recipiente. El esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente, sin embargo, es mayor. Es igual al radio del círculo de diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° alrededor de un eje longitudinal y *fuera del plano* de esfuerzo.[†] Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.34}$$

Considere ahora un recipiente esférico, de radio interior r y espesor de pared t, que contiene un fluido bajo presión manométrica p. Observe que, por simetría, los esfuerzos en las cuatro caras de un elemento pequeño de pared deben ser iguales (figura 7.55). Se tiene

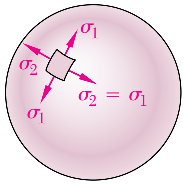


Figura 7.55

$$\sigma_1 = \sigma_2 \tag{7.35}$$

Para determinar el valor del esfuerzo, se hace un corte por el centro C del recipiente y se considera el cuerpo libre que consta de la porción de recipiente y su contenido, a la izquierda de la sección (figura 7.56) La ecuación de equilibro de este cuerpo libre es la misma que para el cuerpo libre de la figura 7.53. Así se concluye que, para un recipiente esférico,

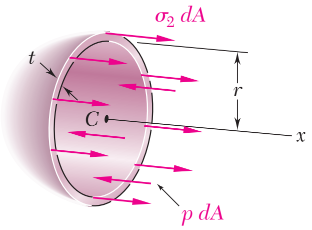


Figura 7.56

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

Como los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son iguales, el círculo de Mohr para la transformación de esfuerzos, dentro del plano tangente a la superficie del recipiente, se reduce a un punto (figura 7.57). Se concluye que el esfuerzo normal en el plano es constante y que el esfuerzo cortante máximo en el plano es cero. El esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente, sin embargo, no es cero; es igual al radio del círculo del diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° fuera del plano de esfuerzo. Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

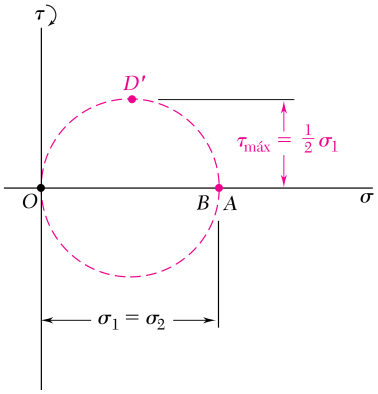
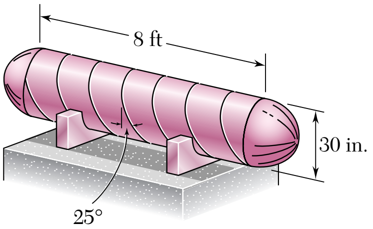


Figura 7.57

[†] Debe observarse que aunque el tercer esfuerzo principal es cero en la superficie exterior del recipiente, es igual a $-p$ en la superficie interna y está representado por un punto $C(-p, 0)$ en el diagrama de Mohr. Así, cerca a la superficie interna del recipiente, el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro CA y se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + p) = \frac{pr}{2t}\left(1 + \frac{t}{r}\right)$$

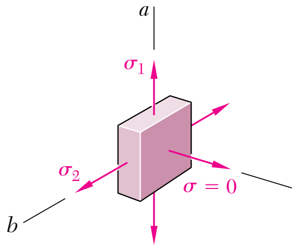
Para un recipiente de pared delgada, sin embargo, el término t/r es pequeño y puede despreciarse la variación de $\tau_{\text{máx}}$ a través de la sección de la pared. Esto se aplica también a los recipientes de presión esféricos.



PROBLEMA MODELO 7.5

Un tanque de aire comprimido está apoyado por dos soportes como se indica en la figura; uno de los soportes está diseñado de tal modo que no ejerce ninguna fuerza longitudinal sobre el tanque. El cuerpo cilíndrico del tanque tiene 30 in. de diámetro exterior y está hecho de placa de acero de $\frac{3}{8}$ in. con soldadura de botón en hélice que forma 25° con un plano transversal. Los extremos son esféricos con un espesor uniforme de $\frac{5}{16}$ in. Para una presión manométrica interior de 180 psi, determine: *a*) el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante máximo en los extremos esféricos, *b*) los esfuerzos en dirección perpendicular y paralela a la soldadura helicoidal.

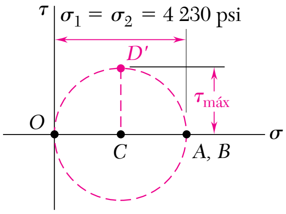
SOLUCIÓN



a) Tapa esférica. Usando la ecuación (7.36), se escribe

$$p = 180 \text{ psi}, t = \tfrac{5}{16} \text{ in.} = 0.3125 \text{ in.}, r = 15 - 0.3125 = 14.688 \text{ in.}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{(180 \text{ psi})(14.688 \text{ in.})}{2(0.3125 \text{ in.})} \qquad \sigma = 4\,230 \text{ psi} \blacktriangleleft$$



Se observa que para esfuerzos en un plano tangente a la tapa, el círculo de Mohr se reduce a un punto (*A*, *B*) en el eje horizontal y que todos los esfuerzos cortantes en el plano son cero. En la superficie de la tapa, el tercer esfuerzo principal es cero y corresponde al punto *O*. En un círculo de Mohr de diámetro *AO*, el punto *D′* es el de esfuerzo cortante máximo y ocurre en planos a 45° del plano tangente a la tapa.

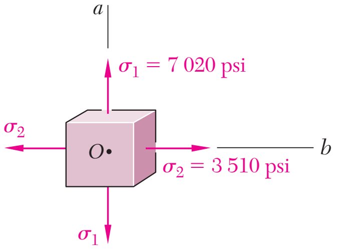
$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(4\,230 \text{ psi}) \qquad \tau_{\text{máx}} = 2\,115 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

b) Cuerpo cilíndrico del tanque. Primero se calcula el esfuerzo de costilla σ_1 y el esfuerzo longitudinal σ_2. Usando las ecuaciones (7.30) y (7.32), se escribe

$$p = 180 \text{ psi}, t = \tfrac{3}{8} \text{ in.} = 0.375 \text{ in.}, r = 15 - 0.375 = 14.625 \text{ in.}$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(180 \text{ psi})(14.625 \text{ in.})}{0.375 \text{ in.}} = 7\,020 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = 3\,510 \text{ psi}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 5\,265 \text{ psi} \qquad R = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 1\,755 \text{ psi}$$

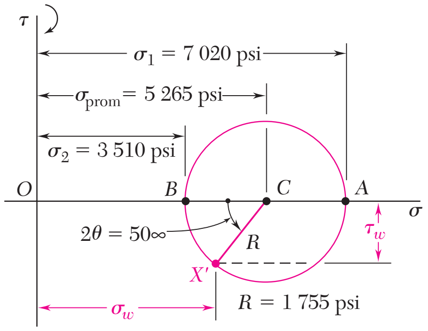


Esfuerzos en la soldadura. Notando que tanto el esfuerzo de costilla como el longitudinal son esfuerzos principales, se traza el círculo de Mohr mostrado en la figura.

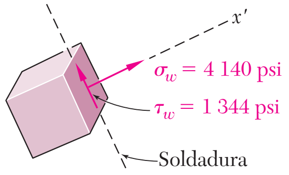
El elemento con cara paralela a la soldadura se obtiene rotando 25° la cara normal al eje *Ob* en sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces, se localiza en el círculo de Mohr el punto *X′*, que corresponde a las componentes del esfuerzo en la soldadura rotando el radio *CB* $2\theta = 50°$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

$$\sigma_w = \sigma_{\text{prom}} - R\cos 50° = 5\,265 - 1\,755 \cos 50° \qquad \sigma_w = +4\,140 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

$$\tau_w = R \operatorname{sen} 50° = 1\,755 \operatorname{sen} 50° \qquad \tau_w = 1\,344 \text{ psi} \blacktriangleleft$$



Como *X′* está por debajo del eje horizontal, τ_w tiende a rotar al elemento en sentido contrario al de las agujas del reloj.



PROBLEMAS

7.98 Una pelota de baloncesto tiene 300 mm de diámetro exterior y 3 mm de espesor de pared. Determine el esfuerzo normal en la pared cuando ésta se encuentra inflada a una presión manométrica de 120 kPa.

7.99 Se fabricará un recipiente esférico a presión de 1.2 m de diámetro externo, con un acero que tiene una resistencia última $\sigma_U = 450$ MPa. Si se desea un factor de seguridad de 4.0 y la presión manométrica puede alcanzar 3 MPa, determine el espesor mínimo de pared que debe usarse.

7.100 Un contenedor esférico para gas hecho de acero tiene 20 ft de diámetro exterior y una pared con $\frac{7}{16}$ in. de espesor. Si se sabe que la presión interna es de 75 psi, determine los esfuerzos máximos normal y cortante en el contenedor.

7.101 Un recipiente esférico a presión tiene un diámetro exterior de 3 m y un espesor de pared de 12 mm. Si se sabe que para el acero usado $\sigma_{\text{perm}} = 80$ MPa, $E = 200$ GPa, y $\nu = 0.29$, determine *a*) la presión manométrica permisible, *b*) el incremento correspondiente en el diámetro del recipiente.

7.102 Un contenedor esférico para gas de 15 ft de diámetro externo y espesor de pared de 0.90 in. está hecho de acero con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$. Si se sabe que la presión medida en el contenedor se incrementa de cero a 250 psi, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en el contenedor, *b*) el incremento en el diámetro del contenedor.

7.103 Se sabe que en un recipiente esférico a presión, con 200 mm de diámetro externo y una pared de 6 mm de espesor, se tiene una presión manométrica máxima de 10 MPa. Si el esfuerzo último en el acero usado es $\sigma_U = 400$ MPa, determine el factor de seguridad dado por la falla a tensión.

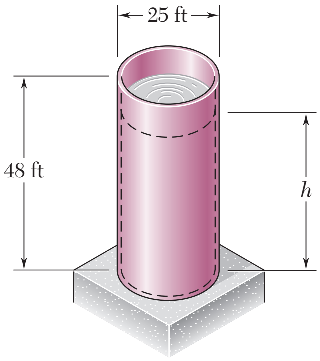


Figura P7.104

7.104 El tanque de almacenamiento no presurizado que se muestra en la figura tiene un espesor de pared de $\frac{3}{16}$ in. y está hecho de un acero con esfuerzo último en tensión de 60 ksi. Determine la altura h máxima a la cual puede llenarse con agua si se desea un factor de seguridad de 4.0 (El peso específico del agua es de 62.4 lb/ft^3.)

7.105 Para el tanque de almacenamiento del problema 7.104, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la pared cilíndrica cuando el tanque se llena a su capacidad ($h = 48$ ft).

7.106 Un tubo de acero de peso estándar con un diámetro nominal de 12 in. conduce agua bajo una presión de 400 psi. *a*) Si se sabe que el diámetro exterior es de 12.75 in. y el espesor de pared es de 0.375 in., determine el esfuerzo de tensión máximo en el tubo. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que se utiliza un tubo extrafuerte, con 12.75 in. de diámetro exterior y 0.500 in. de grosor de pared.

7.107 Un tanque de almacenamiento contiene propano líquido con una presión de 210 psi a una temperatura de 100°F. Si se sabe que el tanque tiene un diámetro exterior de 12.6 in. y un espesor de pared de 0.11 in., determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque.

7.108 El tanque de almacenamiento que se muestra en la figura 7.49 tiene un diámetro exterior de 3.5 m y un espesor de pared de 20 mm, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque cuando su presión interna es de 1.2 MPa.

7.109 Determine la máxima presión interna que puede aplicarse a un tanque cilíndrico de 1.75 m de diámetro exterior y una pared con espesor de 16 mm, si el esfuerzo normal último del acero usado es de 450 MPa y se desea un factor de seguridad de 5.0.

7.110 Una tubería de carga es de acero y tiene 750 mm de diámetro exterior y 12 mm de espesor de pared. La tubería conecta un embalse en *A* con una estación generadora en *B*. Si se sabe que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3, determine los esfuerzos normal y cortante máximos en la tubería bajo condiciones estáticas.

7.111 Una tubería de carga que es de acero y tiene 750 mm de diámetro, conecta un embalse en *A* con una estación generadora en *B*. Si se sabe que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3 y que el esfuerzo normal permisible del acero es de 85 MPa, determine el espesor mínimo que puede tener la tubería.

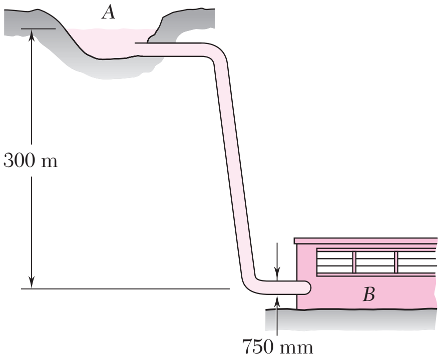


Figura P7.110 y P7.111

7.112 El tanque a presión que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 30 in. y un grosor de pared de 0.375 in. Si se sabe que las costuras de soldadura a lo largo de una hélice forman un ángulo $\beta = 50°$ con el eje longitudinal del tanque y que la presión manométrica en éste es de 200 psi, determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

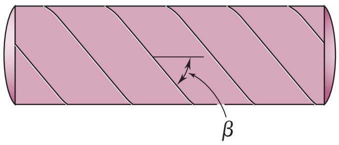


Figura P7.112 y P7.113

7.113 El tanque presurizado que se muestra en la figura se fabricó soldando tiras de placa a lo largo de una hélice que forma un ángulo β con un plano transversal. Determine el máximo valor de β que puede usarse si el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura no debe ser mayor que 85 por ciento del esfuerzo máximo en el tanque.

7.114 La porción cilíndrica del tanque de aire comprimido, que se muestra en la figura, está fabricada con una placa de 0.25 in. de espesor, soldada en hélice y formando un ángulo $\beta = 30°$ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo permisible normal a la soldadura es de 10.5 ksi, determine la máxima presión manométrica que puede usarse en el tanque.

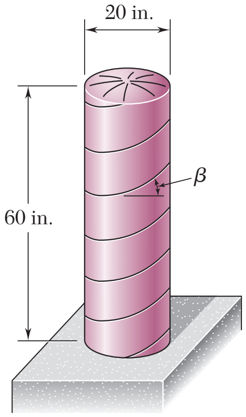
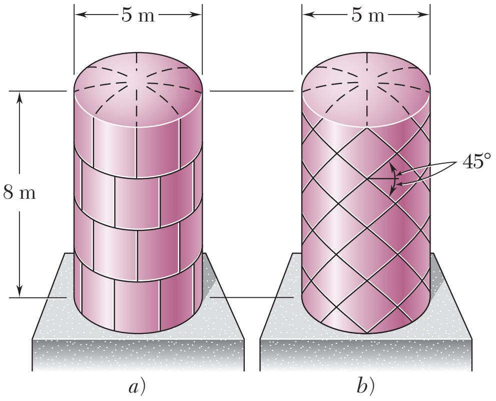


Figura *P7.114*

7.115 Para el tanque de aire comprimido del problema 7.114, determine la presión manométrica que causaría un esfuerzo cortante paralelo a la soldadura de 4 ksi.

7.116 Varias placas cuadradas, cada una de 16 mm de espesor, pueden soldarse en una de las dos formas que se muestran en la figura para construir la parte cilíndrica de un tanque de aire comprimido. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible perpendicular a la soldadura es de 65 MPa, determine la máxima presión manométrica permisible en cada caso.



a) *b*)

Figura P7.116

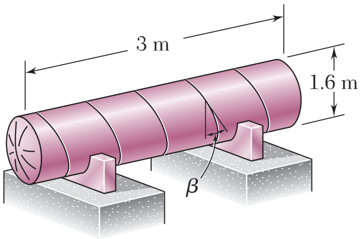


Figura P7.117

7.117 El tanque a presión que se muestra en la figura tiene una pared con 8 mm de espesor, la cual está soldada a lo largo de una hélice que forma un ángulo $\beta = 20°$ con un plano transversal. Para una presión manométrica de 600 kPa, determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

7.118 Para el tanque del problema 7.117, determine la máxima presión manométrica permisible, si se sabe que el esfuerzo normal permisible perpendicular a la soldadura es de 120 MPa y el esfuerzo cortante permisible paralelo a la soldadura es de 80 MPa.

7.119 Para el tanque del problema 7.117, determine el rango de valores de β que pueden usarse si el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura no debe exceder de 12 MPa cuando la presión manométrica sea de 600 kPa.

7.120 Un par de torsión con magnitud $T = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ se aplica al extremo de un tanque que contiene aire comprimido bajo una presión de 8 MPa. Si el tanque tiene 180 mm de diámetro interno y 12 mm de espesor de pared, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque.

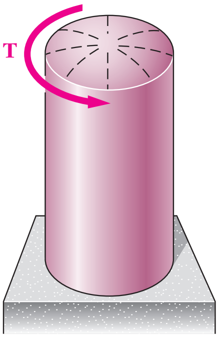


Figura *P7.120* y *P7.121*

7.121 El tanque que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 180 mm y una pared con espesor de 12 mm. Si se sabe que el tanque contiene aire comprimido a una presión de 8 MPa, determine la magnitud T del par aplicado para el cual el esfuerzo normal máximo en el tanque es de 75 MPa.

7.122 Un recipiente a presión con un diámetro interior de 10 in. y una pared con espesor de 0.25 in. está hecho de una sección *AB* de 4 ft de tubo soldado en espiral y se encuentra equipado con dos placas rígidas en los extremos. La presión manométrica dentro del recipiente es de 300 psi y se aplican fuerzas céntricas axiales **P** y **P′** de 10 kips a las placas de los extremos. Determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

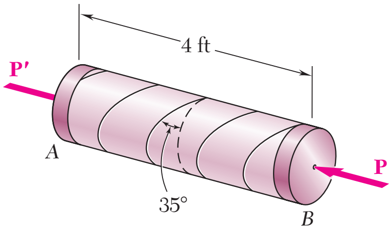


Figura P7.122

7.123 Retome el problema 7.122, y ahora suponga que la magnitud *P* de las dos fuerzas se incrementa a 30 kips.

7.124 El tanque de aire comprimido *AB* tiene un diámetro exterior de 250 mm y un espesor de pared de 8 mm. El tanque se ajusta con un collarín mediante el cual se aplica en *B* una fuerza **P** de 40 kN en la dirección horizontal. Si se sabe que la presión manométrica dentro del tanque es de 5 MPa, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

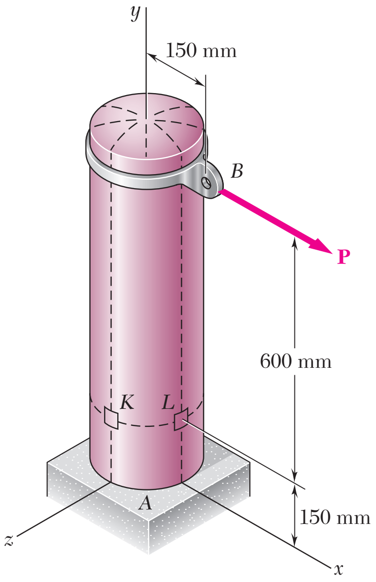
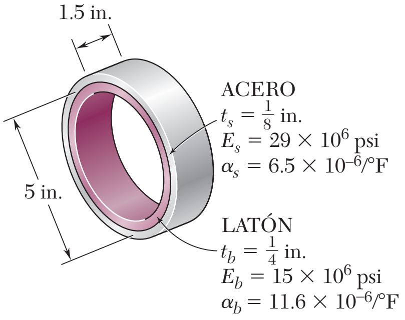


Figura P7.124

7.125 En el problema 7.124 determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto *L*.

7.126 Un anillo de latón de 5 in. de diámetro exterior y de 0.25 in. de espesor se ajusta exactamente en el interior de un anillo de acero de 5 in. de diámetro interior y 0.125 in. de espesor cuando la temperatura de los dos anillos es de 50°F. Si se sabe que la temperatura de ambos anillos se eleva a 125°F, determine *a*) el esfuerzo de tensión en el anillo de acero, *b*) la presión correspondiente ejercida por el anillo de latón sobre el de acero.



1.5 in.
5 in.
ACERO
$t_s = \frac{1}{8}$ in.
$E_s = 29 \times 10^6$ psi
$\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}/°\text{F}$
LATÓN
$t_b = \frac{1}{4}$ in.
$E_b = 15 \times 10^6$ psi
$\alpha_b = 11.6 \times 10^{-6}/°\text{F}$

Figura P7.126

7.127 Retome el problema 7.126, y ahora suponga que el anillo de latón tiene un espesor de 0.125 in. y que el anillo de acero tiene un espesor de 0.25 in.

*7.10 TRANSFORMACIÓN DE DEFORMACIÓN PLANA

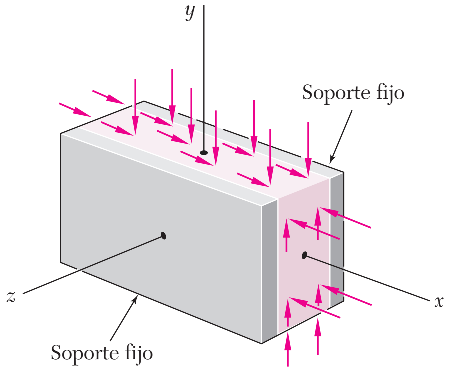


Figura 7.58

Se analizarán ahora transformaciones de la *deformación* cuando los ejes coordenados giran. El análisis primero se limitará a estados de *deformación plana*, es decir, a situaciones en donde las deformaciones del material tienen lugar dentro de planos paralelos y son las mismas en cada uno de estos planos. Si se escoge el eje z perpendicular a los planos en los cuales la deformación tiene lugar, se tiene $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, las únicas componentes de deformación que restan son ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}. Tal situación ocurre en una placa sometida a cargas uniformemente distribuidas a lo largo de sus bordes y que está impedida para expandirse o contraerse lateralmente mediante soportes fijos, rígidos y lisos (figura 7.58). También se encontrará una barra de longitud infinita sometida, en sus lados, a cargas uniformemente distribuidas ya que, por razones de simetría, los elementos situados en un plano transversal no pueden salirse de él. Este modelo idealizado muestra que en el caso real de una barra larga sometida a cargas transversales uniformemente distribuidas (véase figura 7.59), existe un estado de esfuerzo plano en cualquier sección transversal que no esté localizada demasiado cerca de uno de los extremos de la barra.[†]

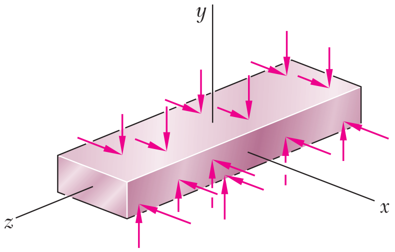


Figura 7.59

Suponga que existe un estado de esfuerzo plano en el punto Q (con $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$), definido por las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes x y y. Como se estudió en las secciones 2.12 y 2.14, esto significa que un elemento cuadrado de centro Q, con lados de longitud Δs respectivamente paralelos a los ejes x y y, se transforma en un paralelogramo con lados de longitud $\Delta s\,(1 + \epsilon_x)$ y $\Delta s\,(1 + \epsilon_y)$, formando ángulos de $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ y $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ entre sí (figura 7.60). Recuerde que, como resultado de las deformaciones de los otros elementos localizados en el plano xy, el elemento considerado también puede experimentar un movimiento de cuerpo rígido, pero tal movimiento es insignificante en lo referente a la determinación de las deformaciones en el punto Q y no se tendrá en cuenta en este análisis. El propósito es determinar en términos de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} y θ las componentes de deformación $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ asociadas con el marco de referencia $x'y'$ obtenido mediante la rotación de los ejes x y y un ángulo θ. Como se observa en la figura 7.61, estas nuevas componentes de la deformación definen el paralelogramo en que se transforma un cuadrado con lados respectivamente paralelos a los ejes x' y y'.

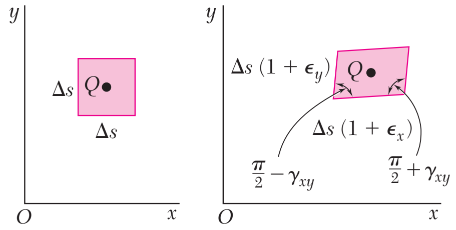


Figura 7.60

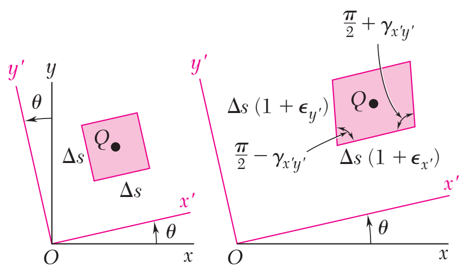
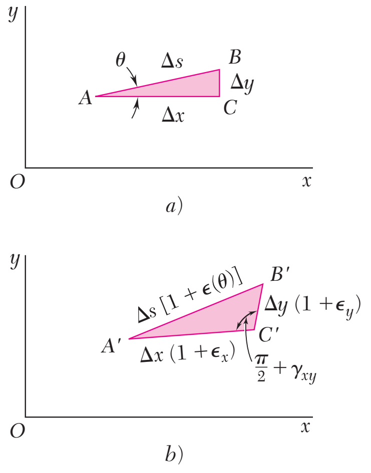


Figura 7.61

[†] Se debe observar que un estado de *deformación plana* y un estado de *esfuerzo plano* (véase la sección 7.1) no ocurren simultáneamene, excepto con materiales ideales que tienen una razón de Poisson igual a cero. Las restricciones en los elementos de la platina de la figura 7.58 y de la barra de la figura 7.59 resultan en un esfuerzo σ_z diferente de cero. Por otra parte, en el caso de la placa de la figura 7.3, la ausencia de cualquier restricción lateral se transforma en $\sigma_z = 0$ y $\epsilon_z \neq 0$.

Primero se derivará una expresión para la deformación normal $\epsilon(\theta)$ a lo largo de una línea AB que forma un ángulo arbitrario θ con el eje x. Para hacerlo considere el triángulo rectángulo ABC con AB como hipotenusa (figura 7.62*a*) y el triángulo oblicuo $A'B'C'$, en el cual se transforma el triángulo ABC (figura 7.62*b*). Si Δs es la longitud de AB, la longitud de $A'B'$ se expresa como $\Delta s\,[1 + \epsilon(\theta)]$. Análogamente, llamando Δx y Δy las longitudes AC y CB, las longitudes de $A'C'$ y $C'B'$ serán $\Delta x\,(1 + \epsilon_x)$ y $\Delta y\,(1 + \epsilon_y)$, respectivamente. Recordando, de la figura 7.60, que el ángulo recto en C en la figura 7.62*a* se transforma en un ángulo igual a $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ en la figura 7.62*b* y aplicando la ley de los cosenos al triángulo $A'B'C'$, se tiene



a)

b)

Figura 7.62

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B')\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2[1 + \epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2(1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2(1 + \epsilon_y)^2 \\ -2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \qquad (7.38)$$

Pero, de la figura 7.62*a*,

$$\Delta x = (\Delta s)\cos\theta \qquad \Delta y = (\Delta s)\,\text{sen}\,\theta \qquad (7.39)$$

y, como γ_{xy} es muy pequeño

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -\text{sen}\,\gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy} \qquad (7.40)$$

Sustituyendo de las ecuaciones (7.39) y (7.40) en la ecuación (7.38), recordando que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, y despreciando los términos de segundo orden en $\epsilon(\theta)$, ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, se escribe

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x\cos^2\theta + \epsilon_y\,\text{sen}^2\,\theta + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad (7.41)$$

La ecuación (7.41) permite hallar la deformación normal $\epsilon(\theta)$ en cualquier dirección AB, en función de las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} y del ángulo θ que forma AB con el eje x. Observe que, para $\theta = 0$, la ecuación (7.41) produce $\epsilon(0) = \epsilon_x$ y que para $\theta = 90°$, da $\epsilon(90°) = \epsilon_y$. Por otra parte, haciendo $\theta = 45°$ en la ecuación (7.41), se obtiene la deformación normal en la dirección de la bisectriz OB del ángulo entre los ejes x y y (figura 7.63). Representando esta deformación por ϵ_{OB}, se tiene

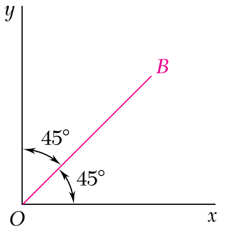


Figura 7.63

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45°) = \tfrac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \qquad (7.42)$$

Resolviendo la ecuación (7.42) para γ_{xy},

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \qquad (7.43)$$

Esta relación permite expresar la *deformación cortante* asociada con un par de ejes rectangulares en función de las *deformaciones normales* medidas a lo largo de estos ejes y de su bisectriz. Dicha relación desempeñará un papel fundamental en la derivación presente y también se usará en la sección 7.13 en conexión con la determinación experimental de las deformaciones cortantes.

Recordando que el propósito principal de esta sección es expresar las componentes de la deformación asociadas con el marco de referencia $x'y'$ de la figura 7.61 en términos del ángulo θ y de las componentes de la formación ϵ_x, ϵ_y, y γ_{xy}, asociadas con los ejes x y y, se nota que la deformación normal $\epsilon_{x'}$ a lo largo del eje x' está dada por la ecuación (7.41). Usando las relaciones trigonométricas (7.3) y (7.4), se escribe esta ecuación en la forma alternativa

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\, 2\theta \tag{7.44}$$

Reemplazando θ por $\theta + 90°$, se obtiene la deformación normal a lo largo del eje y'. Como $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y $\text{sen}\,(2\theta + 180°) = -\text{sen}\, 2\theta$, se tiene

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\, 2\theta \tag{7.45}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7.44) y (7.45), se obtiene

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y \tag{7.46}$$

Puesto que $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = 0$, se verifica, en el caso de la deformación plana, que la suma de las deformaciones normales asociadas con un elemento cúbico de material es independiente de la orientación del elemento.[†]

Reemplazando ahora θ por $\theta + 45°$ en la ecuación (7.44), se obtiene una expresión para la deformación normal a lo largo de la bisectriz OB' del ángulo formado por los ejes x' y y'. Como $\cos(2\theta + 90°) = -\text{sen}\, 2\theta$ y $\text{sen}\,(2\theta + 90°) = -\cos 2\theta$ se tiene

$$\epsilon_{OB'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \tag{7.47}$$

Escribiendo la ecuación (7.43) con respecto a los ejes x' y y', se expresa la deformación cortante $\gamma_{x'y'}$ en función de las deformaciones normales medidas a lo largo de los ejes x' y y', de la bisectriz OB';

$$\gamma_{x'y'} = 2\epsilon_{OB'} - (\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'}) \tag{7.48}$$

Sustituyendo de las ecuaciones (7.46) y (7.47) en la (7.48), se obtiene

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\,\text{sen}\, 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{7.49}$$

Las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.49) son las que definen la transformación de deformación plana bajo una rotación de ejes en el plano de deformación. Dividiendo la ecuación (7.49) entre 2, se escribe esta ecuación en la forma alternativa

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \tag{7.49$'$}$$

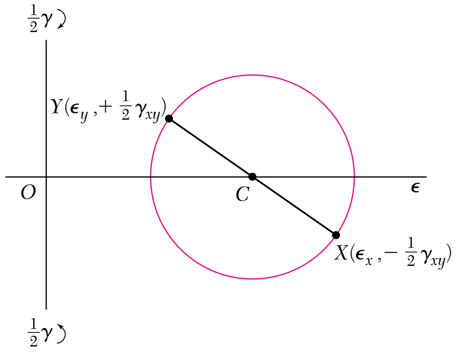
y se observa que las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.49′) para la transformación de deformación plana se parecen a las ecuaciones deducidas en la sección 7.2 para la transformación del esfuerzo plano. Aunque las primeras pueden obtenerse de las segundas reemplazando los esfuerzos normales por las correspondientes deformaciones normales, debe notarse sin embargo, que los esfuerzos cortantes τ_{xy} y $\tau_{x'y'}$ deben reemplazarse por la *mitad* de las correspondientes deformaciones cortantes, es decir, por $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ y $\frac{1}{2}\gamma_{x'y'}$, respectivamente.

[†] Véase la nota de pie de página de la p. 88.

*7.11 CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIÓN PLANA

Como las ecuaciones para la transformación de deformación plana son de la misma forma que las ecuaciones para la transformación de esfuerzo plano, el uso del círculo de Mohr puede extenderse al análisis de deformación plana. Dadas las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} que definen las deformaciones representadas en la figura 7.60, se dibujó un punto $X(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ de abscisa igual a la deformación normal ϵ_x y de ordenada igual a la mitad de la deformación cortante γ_{xy}, y un punto $Y(\epsilon_y, +\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ (figura 7.64). Dibujando el diámetro XY, se define el centro C del círculo de Mohr para deformación plana. La abscisa de C y el radio R del círculo son respectivamente:

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7.50}$$



$\frac{1}{2}\gamma$
$Y(\epsilon_y, +\frac{1}{2}\gamma_{xy})$
O
C
ϵ
$X(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$
$\frac{1}{2}\gamma$

Figura 7.64

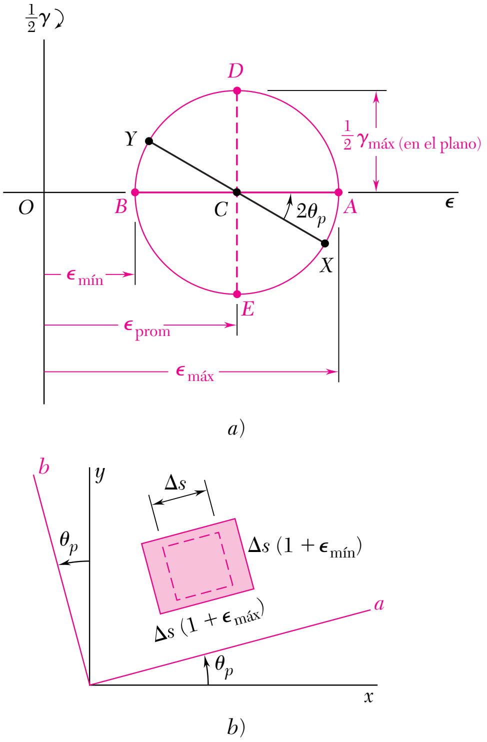
Observe que si γ_{xy} es positiva, como se supone en la figura 7.60, los puntos X y Y se trazan, respectivamente, debajo del eje horizontal y encima de éste en la figura 7.64. Pero, en ausencia de cualquier rotación de cuerpo rígido, se observa que el lado del elemento asociado con ϵ_x (figura 7.60) gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras el lado asociado con ϵ_y gira en el sentido de las agujas del reloj. En consecuencia, si la deformación de cortante hace que un lado dado gire en el sentido de las *agujas del reloj*, el punto correspondiente en el círculo de Mohr para deformación plana se dibuja *encima* del eje horizontal y si la deformación hace que el lado gire en *contra de las agujas del reloj*, el punto correspondiente se traza *debajo* del eje horizontal. Note que esta convención está de acuerdo con la usada para dibujar el círculo de Mohr para esfuerzo plano.

Los puntos A y B, en donde el círculo de Mohr interseca el eje horizontal, corresponden a las *deformaciones principales* $\epsilon_{\text{máx}}$ y $\epsilon_{\text{mín}}$ (figura 7.65*a*). Se encuentra que

$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{prom}} + R \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{\text{mín}} = \epsilon_{\text{prom}} - R \tag{7.51}$$

en donde ϵ_{prom} y R se definen en las ecuaciones (7.50). El valor correspondiente θ_p del ángulo θ se obtiene observando que la deformación cortante es cero para A y B. Haciendo $\gamma_{x'y'} = 0$, en la ecuación (7.49),

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{7.52}$$



a)

b)

Figura 7.65

Los ejes correspondientes a y b, en la figura 7.65*b*, son los *ejes principales de deformación*. El ángulo θ_p, que define la dirección del eje principal Oa en la figura 7.65*b* correspondiente al punto A en la figura 7.65*a*, es igual a la mitad del ángulo XCA medido en el círculo de Mohr, y la rotación que trae a Ox hacia Oa tiene el mismo sentido de la rotación que hace coincidir el diámetro XY del círculo de Mohr con el diámetro AB.

Recuerde de la sección 2.14 que, en el caso de la deformación elástica de un material homogéneo e isotrópico, la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortantes conduce a $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ para cualquier par de ejes rectangulares x y y. Así, $\gamma_{xy} = 0$ cuando $\tau_{xy} = 0$. Esto indica que los ejes principales de la deformación coinciden con los ejes principales del esfuerzo.

La deformación cortante máxima en el plano se define por los puntos D y E en la figura 7.65a. Es igual al diámetro del círculo de Mohr. Recordando la segunda de las ecuaciones (7.50), se escribe

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{7.53}$$

Finalmente, observe que los puntos X' y Y', que definen las componentes de la deformación correspondientes a una rotación de los ejes coordenados un ángulo θ (figura 7.61), pueden obtenerse rotando el diámetro XY del círculo de Mohr, en el mismo sentido, un ángulo 2θ (figura 7.66).

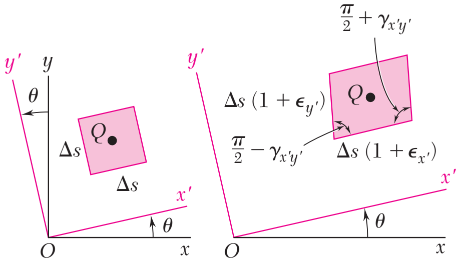


Figura 7.61 (repetida)

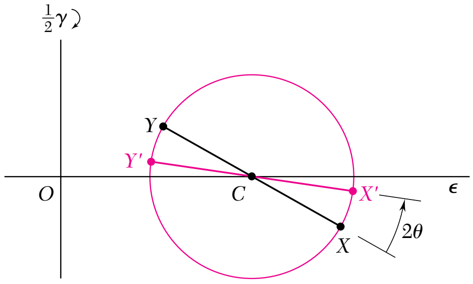


Figura 7.66

EJEMPLO 7.04

En un material en estado de deformación plana se sabe que el lado horizontal de un cuadrado de 10 × 10 mm se alarga 4 μm, mientras el lado vertical permanece constante, y que el ángulo en la esquina izquierda inferior se aumenta en 0.4 × 10^{-3} rad (figura 7.67). Determine: *a*) los ejes principales y las deformaciones principales, *b*) la deformación cortante máxima y la correspondiente deformación formal.

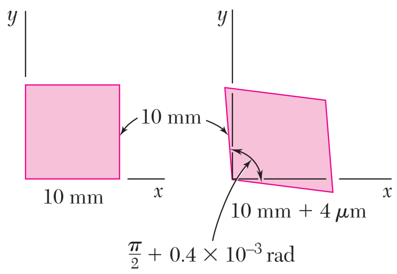


Figura 7.67

a) Esfuerzos y deformaciones principales. Primero se determinan las coordenadas de los puntos X y Y en el círculo de Mohr para deformación. Se tiene

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6}\,\text{m}}{10 \times 10^{3}\,\text{m}} = +400\,\mu \qquad \epsilon_y = 0 \qquad \left|\frac{\gamma_{xy}}{2}\right| = 200\,\mu$$

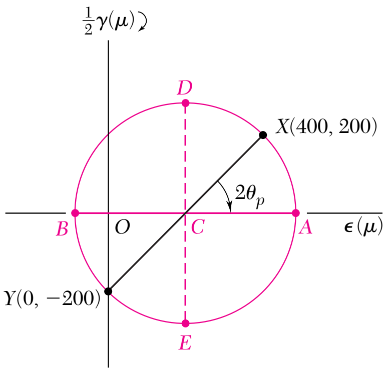


Figura 7.68

Como el lado del cuadrado asociado con ϵ_x gira en el *sentido de las agujas del reloj*, el punto X de coordenadas ϵ_x y $|\gamma_{xy}/2|$ se traza *encima* del eje horizontal. Como $\epsilon_y = 0$ y el lado correspondiente gira en *sentido a las agujas del reloj*, el punto Y se traza directamente *debajo* del origen (véase figura 7.68). Dibujando el diámetro XY, se determina el centro C del círculo de Mohr y su radio R. Se tiene

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200\,\mu \qquad OY = 200\,\mu$$

$$R = \sqrt{(OC)^2 + (OY)^2} = \sqrt{(200\,\mu)^2 + (200\,\mu)^2} = 283\,\mu$$

Las deformaciones principales se definen por las abscisas de los puntos A y B. Se escribe

$$\epsilon_a = OA = OC + R = 200\,\mu + 283\,\mu = 483\,\mu$$
$$\epsilon_b = OB = OC - R = 200\,\mu - 283\,\mu = -83\,\mu$$

En la figura 7.69 se muestran los ejes principales *Oa* y *Ob*. Como $OC = OY$, el ángulo en *C* del triángulo *OCY* es 45°. Así, el ángulo $2\theta_p$ que trae a *XY* hacia *AB* es 45°↻ y el ángulo θ_p que lleva *Ox* hasta *Oa* es 22.5°↻.

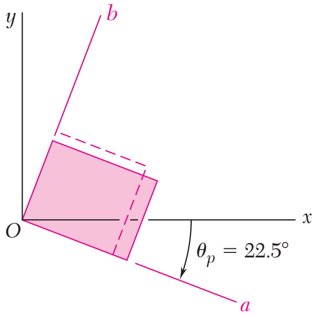


Figura 7.69

b) Deformación cortante máxima. Los puntos *D* y *E* definen la deformación cortante máxima en el plano que, como las deformaciones principales tienen signos opuestos, es también la máxima deformación por cortante (véase sección 7.12). Se tiene

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = R = 283\ \mu \qquad \gamma_{\text{máx}} = 566\ \mu$$

Las correspondientes deformaciones normales son ambas iguales a

$$\epsilon' = OC = 200\ \mu$$

En la figura 7.70 se muestran los ejes de deformación cortante máxima.

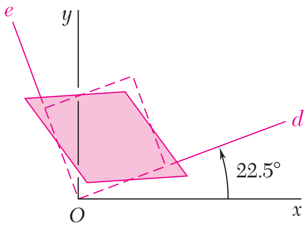


Figura 7.70

*7.12 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE LA DEFORMACIÓN

En la sección 7.5 se estudió que, en el caso más general del esfuerzo, pueden determinarse tres ejes coordenados *a*, *b* y *c*, llamados ejes principales de esfuerzo. Un pequeño elemento cúbico, con caras respectivamente perpendiculares a estos ejes, está libre de esfuerzo cortante (figura 7.27); es decir, se tiene $\tau_{ab} = \tau_{bc} = \tau_{ca} = 0$. Como se recordó en la sección precedente, la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortante se aplica cuando la deformación es elástica y el material homogéneo e isotrópico. Se sigue que, en tal caso, $\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{ca} = 0$, es decir, los ejes *a*, *b* y *c* son también *ejes principales de deformación*. Un pequeño cubo de lado unitario, centrado en *Q* y con caras respectivamente perpendiculares a los ejes principales, se transforma en un paralelepípedo rectangular de lados $1 + \epsilon_a$, $1 + \epsilon_b$ y $1 + \epsilon_c$ (figura 7.71).

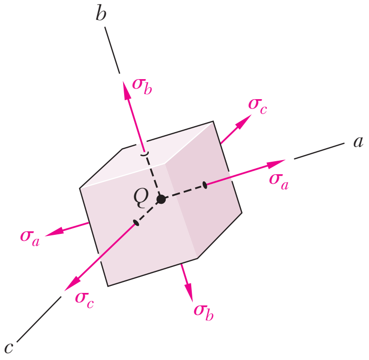


Figura 7.27 (repetida)

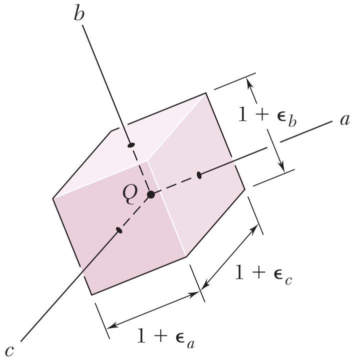


Figura 7.71

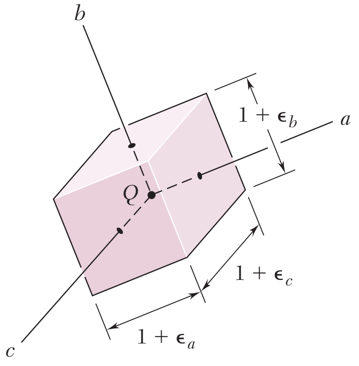


Figura 7.71 (repetida)

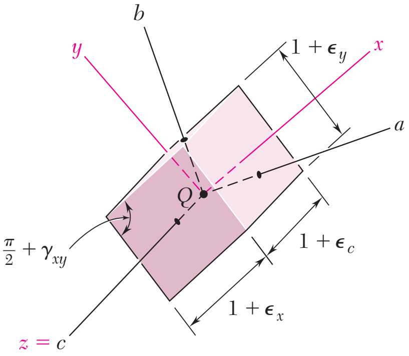


Figura 7.72

Si el elemento de la figura 7.71 se gira alrededor de uno de los ejes principales en Q, por ejemplo el eje c (figura 7.72), el método de análisis desarrollado antes para la transformación de deformación plana puede usarse para determinar las componentes de la deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con las caras perpendiculares al eje c, ya que la derivación en este método no implicaba ninguna de las otras componentes de la deformación.[†] Puede dibujarse entonces el círculo de Mohr por los puntos A y B, correspondientes a los ejes principales a y b (figura 7.73). Análogamente, los círculos de diámetros BC y CA pueden usarse para analizar las transformaciones de la deformación cuando se rota el elemento alrededor de los ejes a y b, respectivamente.

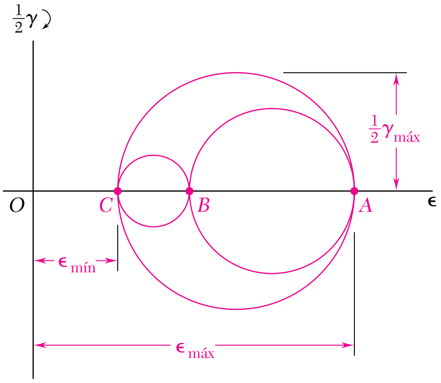


Figura 7.73

El análisis tridimensional de la deformación por medio del círculo de Mohr se limita aquí a rotaciones alrededor de los ejes principales (como el caso para el análisis de esfuerzo) y se usa para hallar la deformación cortante máxima $\gamma_{\text{máx}}$ en el punto Q. Puesto que $\gamma_{\text{máx}}$ es igual al diámetro del mayor de los tres círculos mostrados en la figura 7.73, se tiene

$$\gamma_{\text{máx}} = |\epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_{\text{mín}}| \tag{7.54}$$

en donde $\epsilon_{\text{máx}}$ y $\epsilon_{\text{mín}}$ representan los valores *algebraicos* de las deformaciones máxima y mínima en el punto Q.

Retornando al caso particular de la *deformación plana* y eligiendo los ejes x y y en el plano de deformación, se tiene $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. En consecuencia, el eje z es uno de los tres ejes principales en Q, y el punto correspondiente, en el diagrama del círculo de Mohr, es el origen O, donde $\epsilon = \gamma = 0$. Si los puntos A y B que definen los ejes principales en el plano de deformación caen en lados opuestos de O (figura 7.74*a*), las deformaciones principales correspondientes representan las deformaciones máxima y mínima en el punto Q, y la deformación cortante máxima es igual a la deformación cortante máxima en el plano correspondiente a los puntos D y E. Si, por otra parte, A y B están en el mismo lado de O (figura 7.74*b*), esto es, si ϵ_a y ϵ_b tienen igual signo, entonces la deformación cortante máxima se define por los puntos D' y E' en el círculo de diámetro OA, y se tiene $\gamma_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{máx}}$.

[†] Note que las otras cuatro caras del elemento permanecen rectangulares y que los bordes paralelos del eje c se mantienen iguales.

Considere ahora el caso particular de *esfuerzo plano* encontrado en una placa delgada o en la superficie libre de un elemento estructural o componente de máquina (véase sección 7.1). Eligiendo los ejes x y y en el plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ y se verifica que el eje z es un eje principal de esfuerzo. Como se estudió antes, si la deformación es elástica y si el material es homogéneo e isotrópico, se sigue de la ley de Hooke que $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; así, el eje z es también un eje principal de deformación y puede usarse el círculo de Mohr para estudiar la transformación de deformación en el plano xy. Sin embargo, como se verá, *no* se sigue de la ley de Hooke que $\epsilon_z = 0$; ciertamente, un estado de esfuerzo plano, en general, no resulta de un estado de deformación plana.[†]

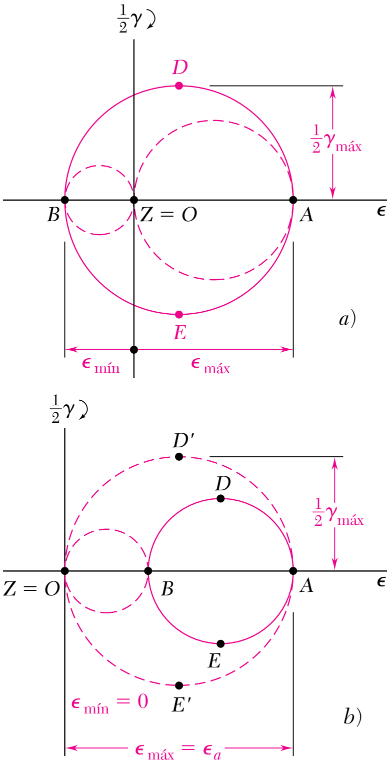


Figura 7.74

Designando con a y b los ejes principales dentro del plano de esfuerzo y con c el eje principal perpendicular a ese plano se tiene, $\sigma_x = \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_b$ y $\sigma_z = 0$ en las ecuaciones (2.28) de la ley general de Hooke (véase sección 2.12) y se escribe

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \tag{7.55}$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \tag{7.56}$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.57}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7.55) y (7.56)

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.58}$$

Resolviendo la ecuación (7.58) para $\sigma_a + \sigma_b$ y sustituyendo en la ecuación (7.57), se escribe

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \tag{7.59}$$

La relación así obtenida define la tercera deformación principal en términos de las deformaciones principales en el plano. Note que si B está entre A y C en el diagrama de Mohr (figura 7.75), la deformación cortante máxima es igual al diámetro CA del círculo correspondiente a una rotación con respecto al eje b, fuera del plano de esfuerzo.

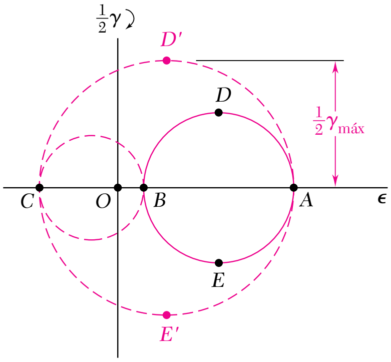


Figura 7.75

[†] Véase la nota en la p. 470.

EJEMPLO 7.05

Como resultado de medidas hechas en la superficie de una componente de máquina con galgas extensiométricas orientadas de varias maneras, se ha establecido que las deformaciones principales en la superficie libre son $\epsilon_a = +400 \times 10^{-6}$in./in. y $\epsilon_b = -50 \times 10^{-6}$in./in. Si el módulo de Poisson para el matricial dado es $\nu = 0.30$, determine, *a*) la deformación cortante máxima en el plano, *b*) el valor real de la deformación cortante máxima cerca de la superficie de la componente.

a) Deformación cortante máxima en el plano. Se dibuja el círculo de Mohr por los puntos *A* y *B* que corresponden a las deformaciones principales dadas (figura 7.76). La deformación cortante máxima en el plano se define por los puntos *D* y *E* y es igual al diámetro del círculo de Mohr.

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 400 \times 10^{-6} + 50 \times 10^{-6} = 450 \times 10^{-6}\text{ rad}$$

b) Deformación cortante máxima. Primero se determina la tercera deformación principal ϵ_c. Como hay un estado de esfuerzo plano en la superficie de la componente de máquina, se usa la ecuación (7.59) y se escribe

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b)$$

$$= -\frac{0.30}{0.70}(400 \times 10^{-6} - 50 \times 10^{-6}) = -150 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

Dibujando los círculos de Mohr por *A* y *C* y por *B* y *C* (figura 7.77), se halla que la deformación cortante máxima es igual al diámetro del círculo de diámetro *CA*.

$$\gamma_{\text{máx}} = 400 \times 10^{-6} + 150 \times 10^{-6} = 550 \times 10^{-6}\text{ rad}$$

Se nota que, aunque ϵ_a y ϵ_b tienen signos opuestos, la deformación cortante máxima en el plano no representa la verdadera deformación cortante máxima.

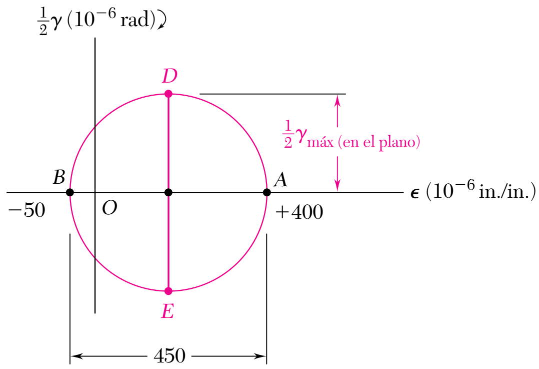

$\frac{1}{2}\gamma\,(10^{-6}\text{ rad})$
D
$\frac{1}{2}\gamma_{\text{máx (en el plano)}}$
B
A
$\epsilon\,(10^{-6}\text{ in./in.})$
−50
O
+400
E
450

Figura 7.76

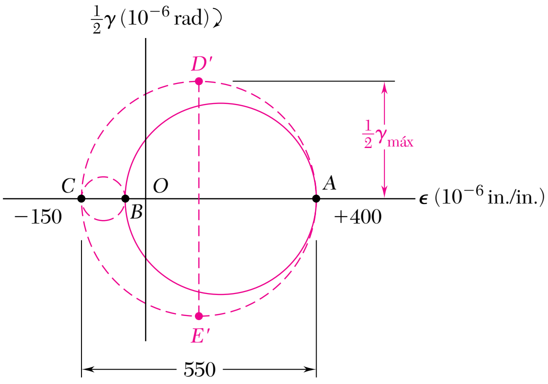

$\frac{1}{2}\gamma\,(10^{-6}\text{ rad})$
D'
$\frac{1}{2}\gamma_{\text{máx}}$
C
O
A
$\epsilon\,(10^{-6}\text{ in./in.})$
−150
B
+400
E'
550

Figura 7.77

*7.13 MEDICIONES DE LA DEFORMACIÓN. ROSETA DE DEFORMACIÓN

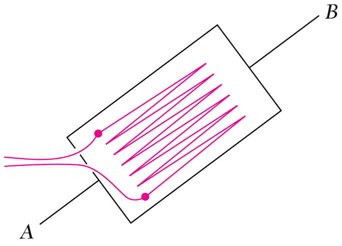


Figura 7.78

La deformación normal puede determinarse en cualquier dirección en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina haciendo dos marcas *A* y *B* a través de una línea dibujada en la dirección deseada, y midiendo la longitud del segmento *AB* antes y después de aplicar la carga. Si *L* es la longitud no deformada de *AB* y δ su alargamiento, la deformación normal a lo largo de *AB* es $\epsilon_{AB} = \delta/L$.

Un método más conveniente y exacto para la medida de deformaciones normales se basa en los deformímetros eléctricos conocidos como galgas extensiométricas. Una galga extensiométrica común consta de una longitud de alambre delgado, dispuesto como en la figura 7.78, adherido a dos piezas de papel. Para medir la deformación ϵ_{AB} de un material dado en la dirección *AB*, la galga extensiométrica se pega a la superficie del material con las vueltas de alambre paralelas a *AB*. Cuando el material se alarga, el alambre aumenta en longitud y disminuye en diámetro, provocando que la resistencia eléctrica de la galga extensiométrica aumente. Midiendo la corriente que pasa por una galga extensiométrica bien calibrada, es posible determinar la deformación ϵ_{AB} de manera precisa y continua en la medida en que la carga aumenta.

Las componentes de deformación ϵ_x y ϵ_y pueden determinarse en un punto dado de la superficie libre del material simplemente midiendo la deformación normal a lo largo de los ejes x y y trazados por ese punto. Recordando la ecuación (7.43) de la sección 7.10, se nota que una tercera medida de deformación normal, realizada a lo largo de la bisectriz OB del ángulo formado por los ejes x y y permite determinar también la deformación cortante γ_{xy} (figura 7.79):

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \tag{7.43}$$

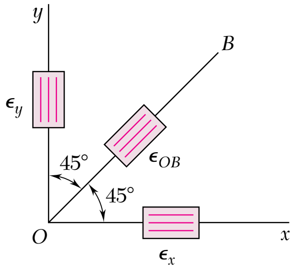


Figura 7.79

Debe advertirse que las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} en un punto dado pueden obtenerse de la medida de deformación normal hecha a lo largo de *tres líneas* dibujadas por ese punto (figura 7.80). Designando respectivamente por θ_1, θ_2 y θ_3 el ángulo que cada una de las líneas forma con el eje x, por ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 las medidas de las deformaciones correspondientes y, reemplazando en la ecuación (7.41), se tienen las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3 \end{aligned} \tag{7.60}$$

que deben resolverse simultáneamente para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}.[†]

La colocación de las galgas extensiométricas utilizadas para medir las tres deformaciones normales ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 se conoce como *roseta de deformación*. La roseta usada para medir deformaciones normales a lo largo de los ejes x y y y su bisector se conoce como roseta de 45°. Otra roseta muy usada es la de 60° (véase el problema modelo 7.7).

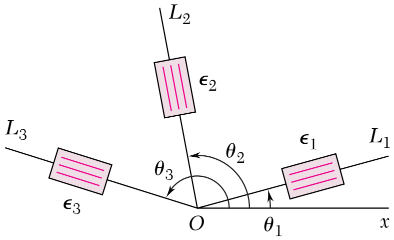
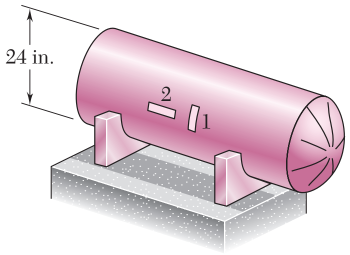


Figura 7.80

[†] Debe notarse que la superficie libre en la cual se hacen las medidas de deformación está en un estado de *esfuerzo plano*, mientras que las ecuaciones (7.41) y (7.43) se dedujeron para un estado de *deformación plana*. Sin embargo, como se observó antes, la normal a la superficie libre es un eje principal de deformación y las deducciones de la sección 7.10 permanecen válidas.

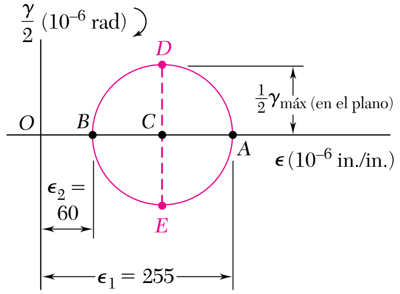


PROBLEMA MODELO 7.6

Un tanque de almacenamiento utilizado para el transporte de gas a presión tiene un diámetro interior de 24 in. y un espesor de $\frac{3}{4}$ in. Varios deformímetros adheridos a la superficie del tanque en dirección transversal y longitudinal indican deformaciones de 255×10^{-6} y 60×10^{-6} in./in., respectivamente. Sabiendo que una prueba de torsión mostró que el módulo de rigidez del material usado en el tanque es $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine: *a*) la presión manométrica en el interior del tanque, *b*) los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en la pared del tanque.

SOLUCIÓN

***a*) Presión manométrica en el interior del tanque.** Note que las deformaciones dadas son las deformaciones principales en la superficie del tanque. Trazando los puntos correspondientes *A* y *B*, se dibuja el círculo de Mohr para deformación. La deformación cortante máxima en el plano es igual al diámetro del círculo.


$\frac{\gamma}{2}$ (10^{-6} rad)
D
$\frac{1}{2}\gamma_{\text{máx (en el plano)}}$
O
B
C
A
ϵ (10^{-6} in./in.)
$\epsilon_2 =$ 60
E
$\epsilon_1 = 255$

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255 \times 10^{-6} - 60 \times 10^{-6} = 195 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

De la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortante, se tiene

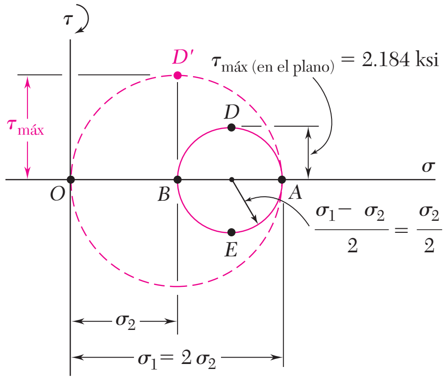
$$\begin{aligned} \tau_{\text{máx (en el plano)}} &= G\gamma_{\text{máx (en el plano)}} \\ &= (11.2 \times 10^6 \text{ psi})(195 \times 10^{-6} \text{ rad}) \\ &= 2\,184 \text{ psi} = 2.184 \text{ ksi} \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor y los datos dados en la ecuación (7.33), se escribe

$$\tau_{\text{máx (en el plano)}} = \frac{pr}{4t} \qquad 2\,184 \text{ psi} = \frac{p(12 \text{ in.})}{4(0.75 \text{ in.})}$$

Resolviendo para la presión manométrica *p*, se tiene

$$p = 546 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

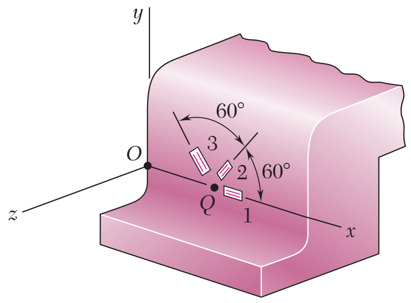

τ
D'
$\tau_{\text{máx (en el plano)}} = 2.184$ ksi
$\tau_{\text{máx}}$
D
σ
O
B
A
$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_2}{2}$
E
σ_2
$\sigma_1 = 2\,\sigma_2$

***b*) Esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo.** Recordando que para un recipiente cilíndrico de pared delgada $\sigma_1 = 2\sigma_2$, se dibuja el círculo de Mohr para esfuerzo y se obtiene

$$\sigma_2 = 2\tau_{\text{máx (en el plano)}} = 2(2.184 \text{ ksi}) = 4.368 \text{ ksi} \qquad \sigma_2 = 4.37 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2(4.368 \text{ ksi}) \qquad \sigma_1 = 8.74 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

El esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro *OA* y corresponde a una rotación de 45° con respecto al eje longitudinal.

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \sigma_2 = 4.368 \text{ ksi} \qquad \tau_{\text{máx}} = 4.37 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

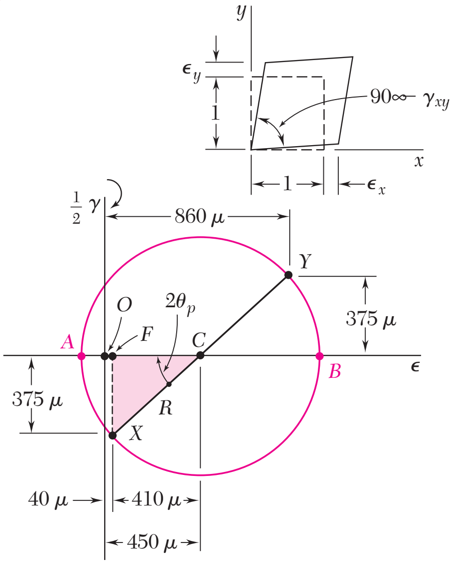


PROBLEMA MODELO 7.7

Usando una roseta de 60° se han determinado las siguientes deformaciones en el punto Q sobre la superficie de una base de máquina de acero.

$$\epsilon_1 = 40\ \mu \qquad \epsilon_2 = 980\ \mu \qquad \epsilon_3 = 330\ \mu$$

Usando los ejes coordenados mostrados, determine en el punto Q, *a*) las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, *b*) las deformaciones principales, *c*) la deformación cortante máxima. (Considere $\nu = 0.29$.)



SOLUCIÓN

***a*) Componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}.** Para los ejes mostrados

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 60° \qquad \theta_3 = 120°$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (7.60),

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) &&+ \epsilon_y(0) &&+ \gamma_{xy}(0)(1)\\
\epsilon_2 &= \epsilon_x(0.500)^2 &&+ \epsilon_y(0.866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0.866)(0.500)\\
\epsilon_3 &= \epsilon_x(-0.500)^2 &&+ \epsilon_y(0.866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0.866)(-0.500)
\end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy},

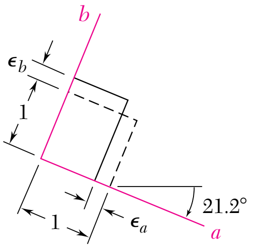
$$\epsilon_x = \epsilon_1 \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0.866}$$

Sustituyendo los valores de ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3, se tiene

$$\epsilon_x = 40\ \mu \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] \qquad \epsilon_y = +860\ \mu \ ◀$$

$$\gamma_{xy} = (980 - 330)/0.866 \qquad \gamma_{xy} = 750\ \mu \ ◀$$

Estas deformaciones se indican en el elemento mostrado.



***b*) Deformaciones principales.** Observe que el lado del elemento asociado con ϵ_x gira en sentido contrario a las agujas del reloj, en consecuencia, se traza el punto X debajo del eje horizontal, es decir, $X(40, -375)$. Luego se sitúa $Y(860, +375)$ y se dibuja el círculo de Mohr.

$$\epsilon_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(860\ \mu + 40\ \mu) = 450\ \mu$$

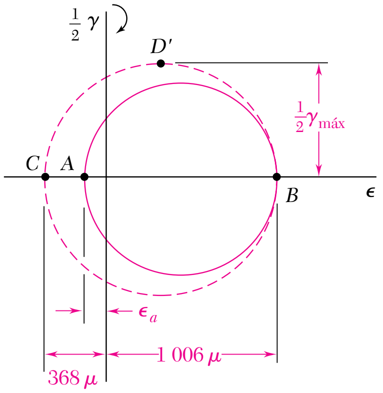
$$R = \sqrt{(375\ \mu)^2 + (410\ \mu)^2} = 556\ \mu$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{375\ \mu}{410\ \mu} \qquad 2\theta_p = 42.4° \circlearrowright \qquad \theta_p = 21.2° \circlearrowright$$

Los puntos A y B corresponden a las deformaciones principales. Se tiene

$$\epsilon_a = \epsilon_{\text{prom}} - R = 450\ \mu - 556\ \mu \qquad \epsilon_a = -106\ \mu \ ◀$$

$$\epsilon_b = \epsilon_{\text{prom}} + R = 450\ \mu + 556\ \mu \qquad \epsilon_b = +1\,006\ \mu \ ◀$$



Como $\sigma_z = 0$ en la superficie, puede usarse la ecuación (7.59) para obtener la deformación principal ϵ_c:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0.29}{1 - 0.29}(-106\ \mu + 1\,006\ \mu) \qquad \epsilon_c = -368\ \mu \ ◀$$

***c*) Deformación cortante máxima.** Dibujando el punto C y trazando el círculo de Mohr por los puntos B y C se obtiene el punto D' y se escribe

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(1\,006\ \mu + 368\ \mu) \qquad \gamma_{\text{máx}} = 1\,374\ \mu \ ◀$$

PROBLEMAS

7.128 a 7.131 Para el estado de deformación plana dado, utilice los métodos de la sección 7.10 para determinar el estado de deformación asociado con los ejes x' y y' rotados al ángulo θ dado.

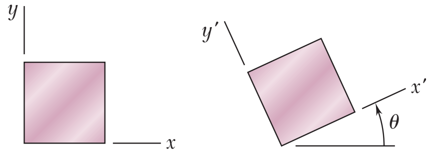


Figura P7.128 a P7.135

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
7.128 y 7.132	-240μ	$+320\mu$	-330μ	65° ↺
7.129 y 7.133	$+240\mu$	$+160\mu$	$+150\mu$	60° ↻
7.130* y *7.134	$+350\mu$	0	$+120\mu$	15° ↻
7.131 y 7.135	0	$+320\mu$	-100μ	30° ↺

7.132 a 7.135 Para el estado de deformación plana dado, utilice el círculo de Mohr para determinar el estado de deformación plana asociado con los ejes x' y y' rotados al ángulo θ dado.

7.136 a 7.139 El siguiente estado de deformación plana se midió sobre la superficie de una placa delgada. Si se sabe que la superficie de la placa está libre de tensión, determine *a*) la dirección y magnitud de las deformaciones principales, *b*) la deformación cortante máxima en el plano, *c*) la deformación cortante máxima. (Use $\nu = \frac{1}{3}$.)

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.136	$+30\mu$	$+570\mu$	$+720\mu$
7.137	$+160\mu$	-480μ	-600μ
7.138	-600μ	-400μ	$+350\mu$
7.139	-260μ	-60μ	$+480\mu$

7.140 a 7.143 Para el estado de deformación plana dado, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación y magnitud de las deformaciones, *b*) la deformación máxima en el plano, *c*) la deformación cortante máxima.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.140	$+400\mu$	$+200\mu$	$+375\mu$
7.141	-180μ	-260μ	$+315\mu$
7.142	$+60\mu$	$+240\mu$	-50μ
7.143	$+300\mu$	$+60\mu$	$+100\mu$

7.144 Determine la deformación ϵ_x si se han determinado las siguientes deformaciones con el uso de la roseta que se muestra en la figura:

$$\epsilon_1 = +480\mu \qquad \epsilon_2 = -120\mu \qquad \epsilon_3 = +80\mu$$

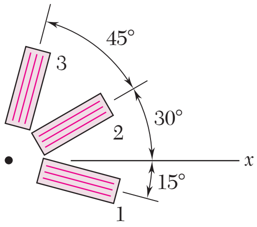


Figura *P7.144*

7.145 Durante la prueba de un elemento de máquina, las deformaciones determinadas mediante el uso de la roseta que se muestra en la figura son

$$\epsilon_1 = +600\mu \qquad \epsilon_2 = +450\mu \qquad \epsilon_3 = -75\mu$$

Determine *a*) las deformaciones principales en el plano, *b*) la deformación cortante máxima en el plano.

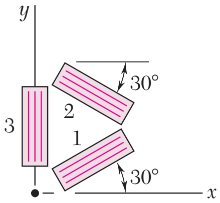


Figura *P7.145*

7.146 La roseta que se muestra en la figura se utilizó para determinar las siguientes deformaciones, en la superficie del gancho de una grúa:

$$\epsilon_1 = +420 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = -45 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_4 = +165 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

a) ¿Cuál sería la lectura del medidor 3? *b*) Determine las deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el plano.

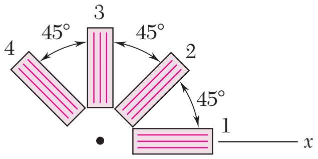


Figura P7.146

7.147 Durante la prueba de un elemento de máquina las deformaciones determinadas, mediante el uso de la roseta que se muestra en la figura, son

$$\epsilon_1 = -93.1 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +385 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +210 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Determine *a*) la orientación y magnitud de las deformaciones principales en el plano de la roseta, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el plano.

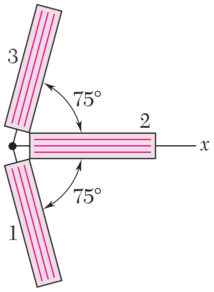


Figura P7.147

7.148 Demuestre que la suma de las tres mediciones de las deformaciones, realizadas con una roseta de 60°, es independiente de la orientación de la roseta e igual a

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_{\text{prom}}$$

donde ϵ_{prom} es la abscisa del centro del círculo de Mohr correspondiente para la deformación.

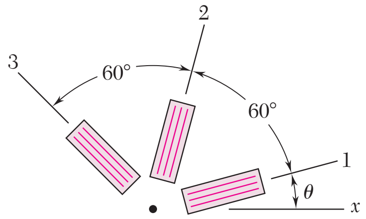


Figura P7.148

7.149 Con una roseta de 45° se determinaron las deformaciones ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 en un punto dado. Con el uso del círculo de Mohr demuestre que las deformaciones principales son:

$$\epsilon_{\text{máx, mín}} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(*Sugerencia*: Considere que los triángulos sombreados son congruentes.)

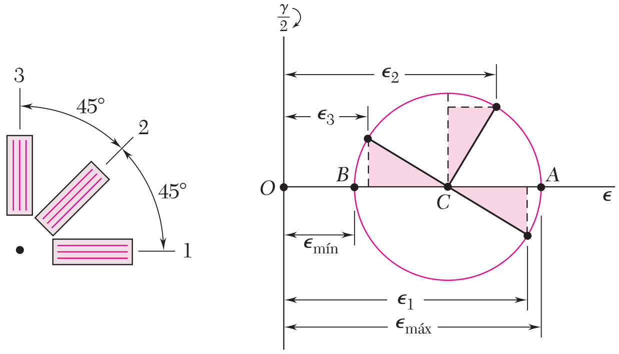


Figura P7.149

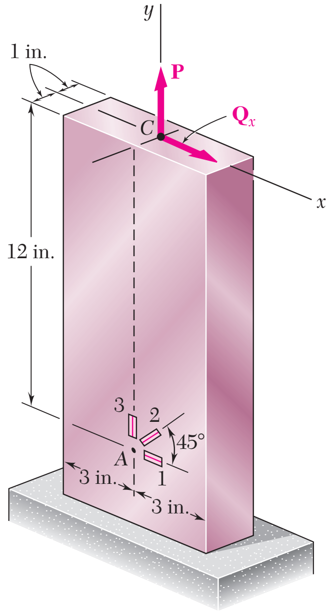


Figura P7.150

7.150 Una fuerza axial céntrica **P** y una fuerza horizontal $\mathbf{Q}_x$ se aplican en el punto *C* de la barra rectangular que se muestra en la figura. Una roseta de deformación de 45° sobre la superficie de la barra en el punto *A* indica las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -60 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +240 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +200 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $v = 0.30$, determine las magnitudes de **P** y $\mathbf{Q}_x$.

7.151 Retome el problema 7.150, y ahora suponga que la roseta en el punto *A* indica las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -30 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +250 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +100 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

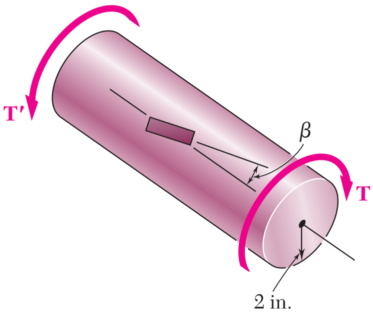


Figura *P7.152*

7.152 Una sola galga extensiométrica está cementada a una barra de acero sólido con 4 in. de diámetro y forma un ángulo $\beta = 25°$ con una línea paralela al eje de la barra. Si se sabe que $G = 11.5 \times 10^6$ psi, determine el par de torsión **T** correspondiente a una lectura del medidor de 300×10^{-6} in./in.

7.153 Retome el problema 7.152, y ahora suponga que la galga extensiométrica forma un ángulo $\beta = 35°$ con una línea paralela al eje de la barra.

7.154 Una sola galga extensiométrica que forma un ángulo $\beta = 18°$ con un plano horizontal se utiliza para determinar la presión manométrica en el tanque cilíndrico que se muestra en la figura. El espesor de pared del tanque es de 6 mm y su diámetro interior de 600 mm; está hecho de acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$. Determine la presión en el tanque, indicada por una lectura de 280μ en la galga extensiométrica.

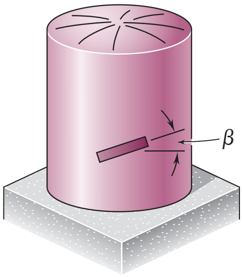


Figura P7.154

7.155 Retome el problema 7.154, y ahora suponga que la galga extensiométrica forma un ángulo $\beta = 35°$ con un plano horizontal.

7.156 Se sabe que el estado de esfuerzo plano dado existe en la superficie de un componente de máquina. Si $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa, encuentre la dirección y magnitud de las tres deformaciones principales *a*) para ello determine el estado correspondiente de deformación [utilice las ecuaciones (2.43) y (2.38)] y después use el círculo de Mohr para deformación, *b*) emplee el círculo de Mohr de esfuerzos para determinar los planos y esfuerzos principales y luego encuentre las deformaciones correspondientes.

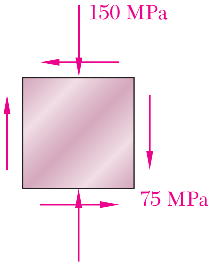


Figura P7.156

7.157 El siguiente estado de deformación se encontró en la superficie de un elemento de máquina hecho de hierro fundido:

$$\epsilon_x = -720\mu \qquad \epsilon_y = -400\mu \qquad \gamma_{xy} = +660\mu$$

Si se sabe que $E = 69$ GPa y $G = 28$ GPa, encuentre los planos y esfuerzos principales *a*) mediante la determinación del correspondiente estado de esfuerzo plano [utilice las ecuaciones (2.36) y (2.43) y las primeras dos ecuaciones del problema 2.73] y después utilice el círculo de Mohr para esfuerzos, *b*) por medio del círculo de Mohr para deformación determine la orientación y la magnitud de las deformaciones principales y después determine los esfuerzos correspondientes.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 7

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio de la *transformación de esfuerzos* bajo una rotación de ejes y su aplicación a la solución de problemas de ingeniería, y la segunda parte a un estudio similar de la *transformación de deformación.*

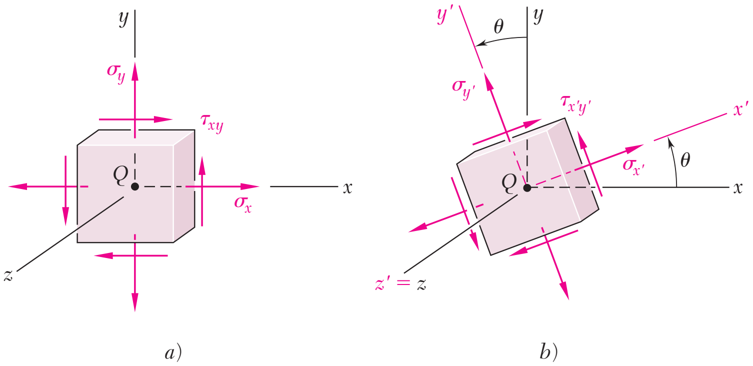


Figura 7.5

Transformación de esfuerzo plano

Considerando primero un estado de *esfuerzo plano* en un punto dado Q [véase sección 7.2] y llamando σ_x, σ_y y τ_{xy} las componentes del esfuerzo asociadas con el elemento de la figura 7.5*a*, se obtuvieron las siguientes ecuaciones para las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con ese elemento después de rotarlo un ángulo θ con respecto al eje z (figura 7.5*b*).

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.5)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.7)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (7.6)$$

En la sección 7.3 se determinaron los valores θ_p del ángulo de rotación que corresponden a los valores máximo y mínimo del esfuerzo normal en el punto Q. Se escribió

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (7.12)$$

Los dos valores obtenidos por θ_p difieren en 90° (figura 7.11) y definen los *planos principales de esfuerzo* en el punto Q. Los valores correspon-

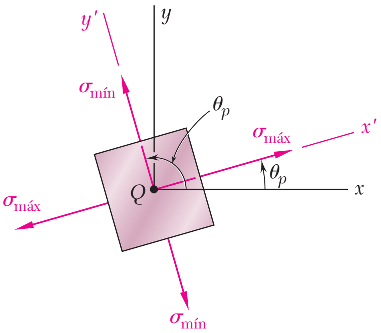


Figura 7.11

dientes del esfuerzo normal son los *esfuerzos principales* en Q; se obtuvo:

Planos principales. Esfuerzos principales

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.14}$$

También se observó que el valor correspondiente del esfuerzo cortante es cero. Después, se calcularon los valores θ_s del ángulo θ para el cual ocurre el valor máximo del esfuerzo cortante. Se escribió

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

Los dos valores obtenidos para θ_s difieren en 90° (figura 7.12). También se observó que los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales. El valor máximo del esfuerzo cortante para una rotación *en el plano de esfuerzo* es

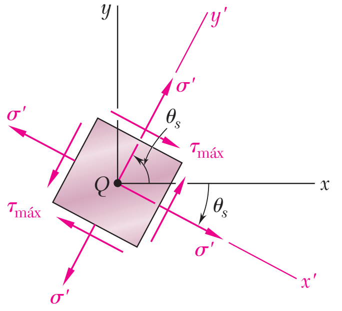


Figura 7.12

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

Planos de máximo esfuerzo cortante

y el valor correspondiente del esfuerzo normal es

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

Círculo de Mohr para el esfuerzo

En la sección 7.4 se estudió que el *círculo de Mohr* proporciona un método alternativo, basado en consideraciones geométricas simples, para el análisis de la transformación del esfuerzo plano. Dado el estado de esfuerzo mostrado en negro en la figura 7.17*a*, se dibuja el punto X de coordenadas $\sigma_x, -\tau_{xy}$ y el punto Y de coordenadas σ_y, $+\tau_{xy}$ (figura 7.17*b*). Dibujando el círculo de diámetro XY, se obtiene el círculo de Mohr. Las abscisas de los puntos de intersección A y B del círculo con el eje horizontal representan los esfuerzos principales, y el ángulo de rotación que trae el diámetro XY hasta AB es el doble del ángulo θ_p que define los planos principales en la figura 7.17*a*, con los dos ángulos en el mismo sentido. También se notó que el diámetro DE define el esfuerzo cortante máximo y la orientación del plano respectivo. (Véase las figuras 7.19*b*, el ejemplo 7.02 y los problemas modelo 7.2 y 7.3.)

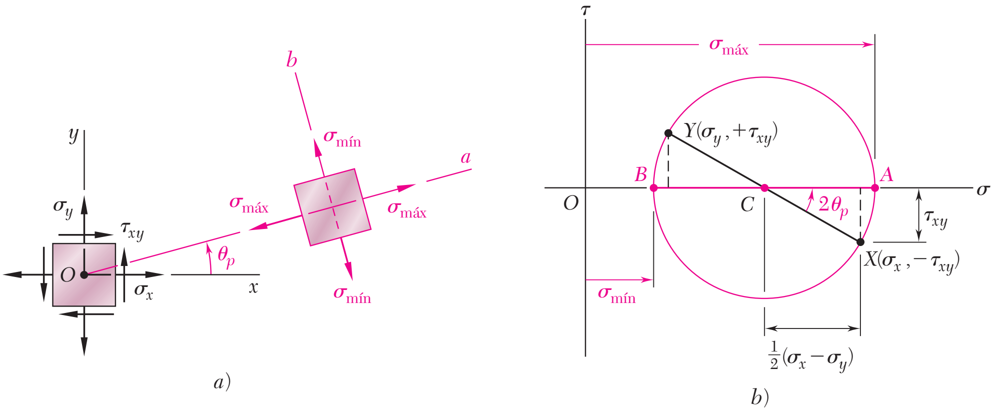


Figura 7.17

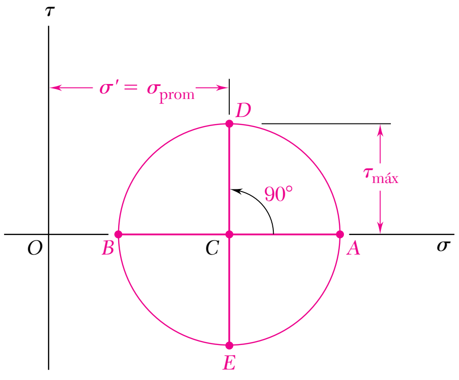


Figura 7.19*b*

Estado general de esfuerzo

Considerando un *estado general de esfuerzo* caracterizado por seis componentes del esfuerzo [sección 7.5], se demostró que el esfuerzo normal en un plano de orientación arbitraria puede expresarse como una forma cuadrática de los cosenos directores de la normal a ese plano. Esto prueba la existencia de *tres ejes principales de esfuerzo* y *tres esfuerzos principales* en cualquier punto dado. Girando un pequeño elemento cúbico con respecto a cada uno de los tres ejes principales [sección 7.6], se dibujaron los correspondientes círculos de Mohr que generan los valores de $\sigma_{\text{máx}}$, $\sigma_{\text{mín}}$ y $\tau_{\text{máx}}$ (figura 7.29). En el caso particular de *esfuerzo plano*, si los ejes x y y se eligen en el plano de esfuerzo, el punto C coincide con el origen O. Si A y B están en lados opuestos de O, el esfuerzo cortante máximo es igual al esfuerzo cortante máximo “en el plano” como se determinó en las secciones 7.3 y 7.4. Si A y B están situados en el mismo lado de O, éste no será el caso. Si $\sigma_a > \sigma_b > 0$, por ejemplo, el esfuerzo cortante máximo es igual a $\frac{1}{2}\sigma_a$ y corresponde a una rotación fuera del plano de esfuerzo (figura 7.32).

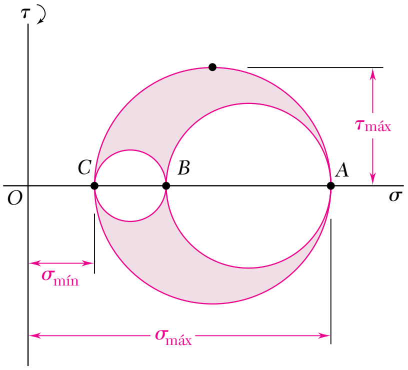

τ
C
B
A
O
σ
$\tau_{\text{máx}}$
$\sigma_{\text{mín}}$
$\sigma_{\text{máx}}$

Figura 7.29

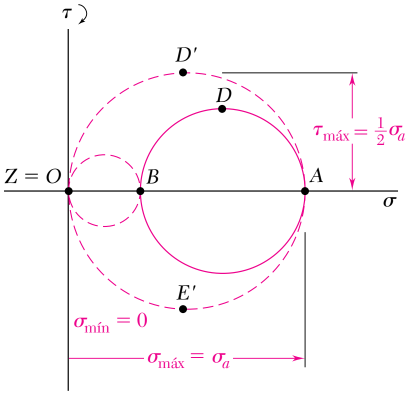

τ
D'
D
$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sigma_a$
$Z = O$
B
A
σ
E'
$\sigma_{\text{mín}} = 0$
$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_a$

Figura 7.32

Criterios de cedencia para materiales dúctiles

Los *criterios de cedencia* para materiales dúctiles bajo esfuerzo plano se desarrollaron en la sección 7.7. Para predecir si un componente estructural o de máquina fallará en algún punto crítico debido a la cedencia del material, primero se determinan los esfuerzos principales σ_a y σ_b en ese punto para las condiciones de carga dadas. Después se dibuja el punto de coordenadas σ_a y σ_b. Si este punto cae dentro de cierta área, el componente es seguro; si cae fuera, el componente fallará. En la figura 7.40 se indica el área usada con el *criterio del esfuerzo cortante máximo* y el área usada con el *criterio de la energía de distorsión máxima*, en la figura 7.41. Observe que ambas áreas dependen del límite de cedencia σ_Y del material.

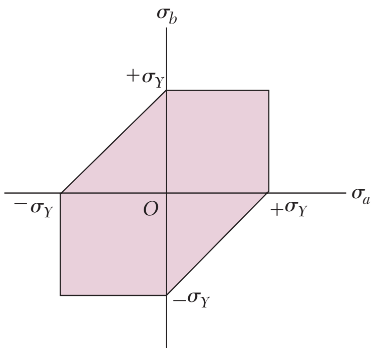

σ_b
$+\sigma_Y$
$-\sigma_Y$
O
$+\sigma_Y$
σ_a
$-\sigma_Y$

Figura 7.40

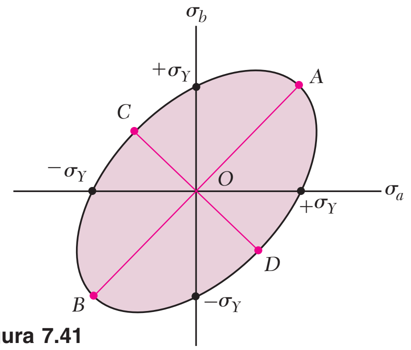

σ_b
$+\sigma_Y$
A
C
$-\sigma_Y$
O
σ_a
$+\sigma_Y$
D
B
$-\sigma_Y$

Figura 7.41

Criterios de ruptura para materiales frágiles

Los *criterios de ruptura* para materiales frágiles sometidos a esfuerzo plano se explicaron en la sección 7.8 en forma similar. El más común es el *criterio de Mohr* que utiliza los resultados de varios tipos de pruebas disponibles para un material dado. El área sombreada de la figura 7.47*b* es utilizada cuando se han determinado las resistencias últimas σ_{UT} y σ_{UC} a partir de una prueba de tensión y una de compresión. De nuevo, los esfuerzos principales σ_a y σ_b se calculan en un punto dado de un componente estructural o de máquina que se está investigando. Si el punto correspondiente cae dentro del área sombreada, la componente es seguro; si cae fuera, la componente fallará.

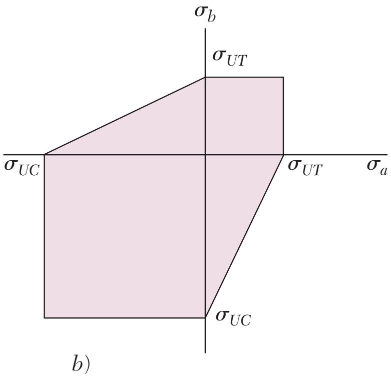


Figura 7.47*b*

Recipientes de presión cilíndrica

En la sección 7.9 se consideraron los esfuerzos en recipientes de *presión de pared delgada* y se obtuvieron ecuaciones que relacionan los esfuerzos en las paredes de los recipientes con la *presión manométrica p* del fluido contenido. En el caso de un *recipiente cilíndrico* de radio interior r y espesor t (figura 7.51), se dedujeron las expresiones siguientes para los *esfuerzos de costilla* σ_1, y los *esfuerzos longitudinales* σ_2:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.30, 7.31}$$

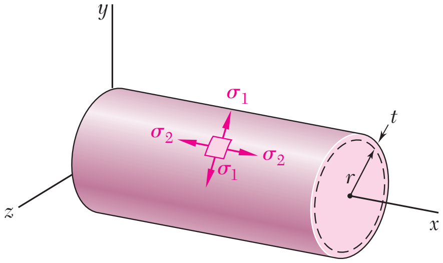


Figura 7.51

También se encontró que el *esfuerzo cortante máximo* ocurre fuera del plano de esfuerzo y es

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.34}$$

Recipientes de presión esférica

En el caso de un *recipiente esférico* de radio interior r y espesor t (figura 7.55), se halló que los dos esfuerzos principales son iguales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

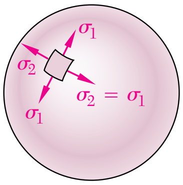


Figura 7.55

De nuevo, el *esfuerzo cortante máximo* ocurre fuera del plano de esfuerzo y es:

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

Transformación de deformación plana

La última parte de este capítulo se dedicó a la *transformación de la deformación*. En las secciones 7.10 y 7.11 se analizó la transformación de *deformación plana* y se introdujo el *círculo de Mohr para deformación plana*. El estudio fue análogo al de la transformación de esfuerzo, excepto que donde se utiliza el esfuerzo cortante τ ahora se usa $\frac{1}{2}\gamma$, es decir, la *mitad de la deformación cortante*. Las ecuaciones obtenidas para la transformación de deformación bajo una rotación de ejes θ, fueron

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.44)$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.45)$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen} 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \qquad (7.49)$$

Círculo de Mohr para la deformación

Usando el círculo de Mohr para deformación (figura 7.65), también se obtuvieron las relaciones siguientes que definen el ángulo de rotación θ_p que corresponde a los *ejes principales de deformación* y los valores de las *deformaciones principales* $\epsilon_{\text{máx}}$ y $\epsilon_{\text{mín}}$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \qquad (7.52)$$

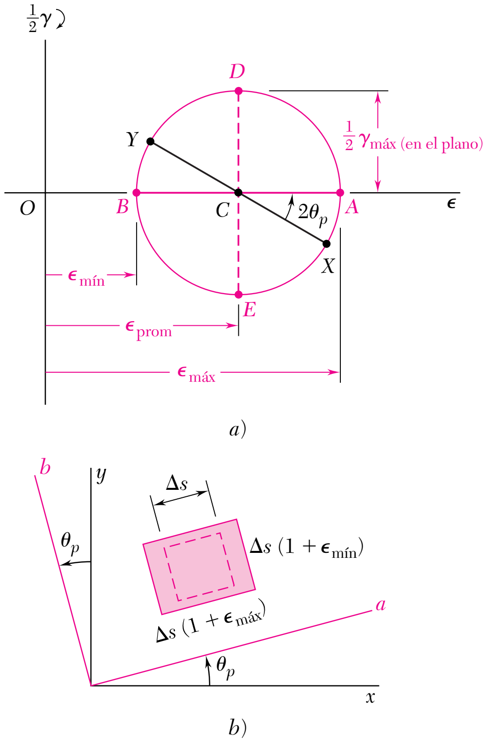
$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{prom}} + R \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{\text{mín}} = \epsilon_{\text{prom}} - R \qquad (7.51)$$

donde

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (7.50)$$

La *deformación máxima cortante* para una rotación en el plano de deformación se encontró que era

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (7.53)$$



a)

b)

Figura 7.65

La sección 7.12 se dedicó al análisis tridimensional de la deformación con aplicación a la determinación de la deformación cortante máxima en los casos particulares de deformación plana y esfuerzo plano. En el caso del *esfuerzo plano*, se encontró también que la deformación principal ϵ_c en una dirección perpendicular al plano de esfuerzo se podría expresar como sigue, en términos de las deformaciones principales en el plano ϵ_a y ϵ_b:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \qquad (7.59)$$

Galgas extensiométricas

Roseta de deformación

Finalmente, se examinó en la sección 7.13 el uso de *galgas extensiométricas* para medir deformaciones normales en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina. Considerando una *roseta de deformación* que consta de tres medidores alineados según rectas que forman ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 con el eje x (figura 7.80), se escribieron las siguientes relaciones entre las medidas ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 y las componentes ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} que caracterizan el estado de deformación en ese punto:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1 \\
\epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_2 \qquad (7.60) \\
\epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta_3\cos\theta_3
\end{aligned}$$

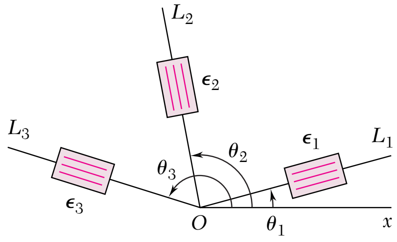


Figura 7.80

Estas ecuaciones pueden resolverse para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, una vez que se han determinado ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3.

PROBLEMAS DE REPASO

7.158 La fibra de un elemento de madera forma un ángulo de 15° con la vertical. Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la fibra, *b*) el esfuerzo normal perpendicular a la fibra.

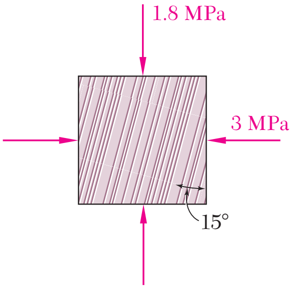


Figura P7.158

7.159 La fuerza céntrica **P** se aplica a un poste corto como se muestra en la figura. Si se sabe que los esfuerzos en el plano *a-a* son $\sigma = -15$ ksi y $\tau = 5$ ksi, determine *a*) el ángulo β que forma el plano *a-a* con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo a la compresión en el poste.

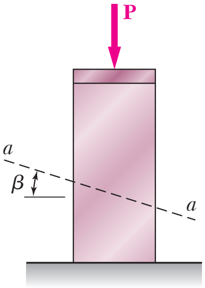


Figura *P7.159*

7.160 El tubo de acero *AB* tiene un diámetro exterior de 102 mm y un espesor de pared de 6 mm. Si se sabe que el brazo *CD* está rígidamente fijo al tubo, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

7.161 El tubo de acero *AB* tiene un diámetro exterior de 102 mm y un espesor de pared de 6 mm. Si el brazo *CD* está rígidamente fijo al tubo, encuentre los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

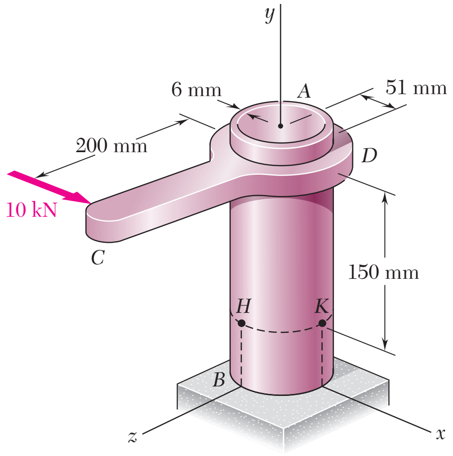


Figura P7.160 y P7.161

7.162 Determine los planos y el esfuerzo principales para el estado de esfuerzo plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzo que se muestran en la figura.

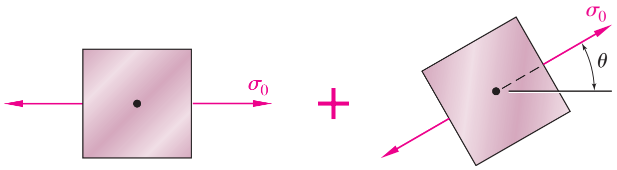


Figura P7.162

7.163 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los que la magnitud del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ es menor o igual que 40 MPa.

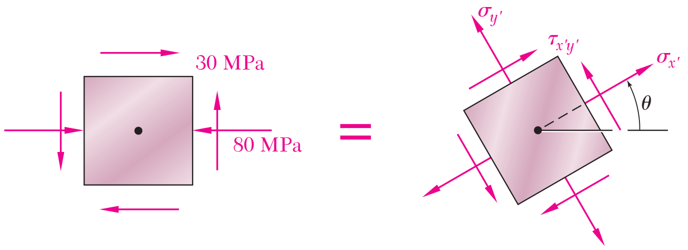


Figura *P7.163*

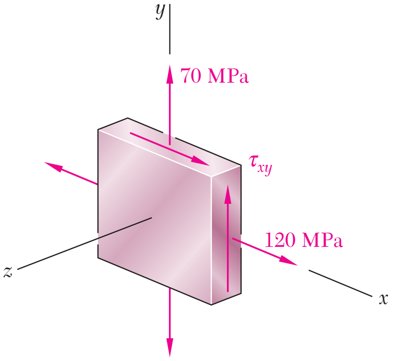


Figura P7.164

7.164 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es de 80 MPa.

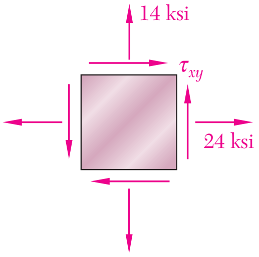


Figura *P7.165*

7.165 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina de acero con $\sigma_Y = 30$ ksi. Con el criterio de la máxima energía de distorsión determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\tau_{xy} = 6$ ksi, *b*) $\tau_{xy} = 12$ ksi, *c*) $\tau_{xy} = 14$ ksi. Si la cedencia no ocurre, determine el factor de seguridad correspondiente.

7.166 Cuando se llena a toda su capacidad, el tanque de almacenamiento no presurizado que se muestra en la figura contiene agua hasta una altura de 48 ft sobre su base. Si se sabe que la porción inferior del tanque tiene un espesor de pared de 0.625 in., determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque. (El peso específico del agua es de 62.4 lb/ft^3.)

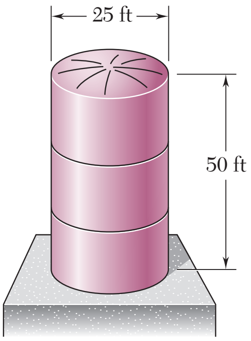


Figura P7.166

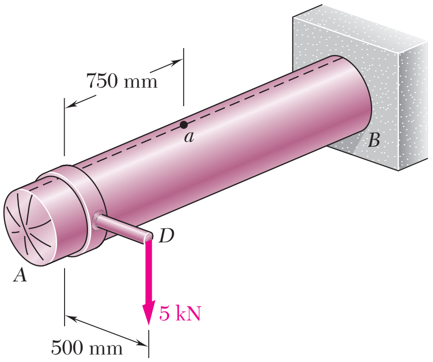


Figura *P7.167*

7.167 El tanque de aire comprimido *AB* tiene un diámetro interior de 450 mm y una pared uniforme de 6 mm de espesor. Si se sabe que la presión manométrica en el tanque es de 1.2 MPa, determine el máximo esfuerzo normal y el máximo esfuerzo cortante en el plano en el punto *a* que se encuentra en la parte superior del tanque.

7.168 El tubo de latón *AD* pasa dentro de una camisa empleada para aplicar una presión hidrostática de 500 psi sobre la porción *BC* del tubo. Si se sabe que la presión dentro del tubo es de 100 psi, determine el esfuerzo normal máximo en el tubo.

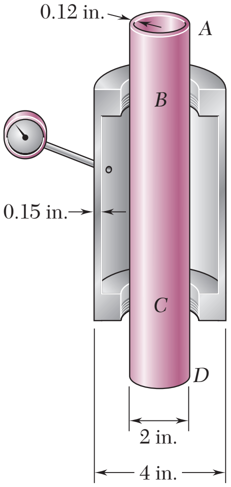


Figura P7.168

7.169 Determine la máxima deformación normal en el plano, si se sabe que mediante el uso de la roseta mostrada en la figura, se obtuvieron las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -50 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +360 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +315 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

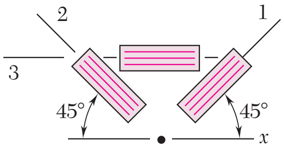


Figura P7.169

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas fueron diseñados para ser resueltos con ayuda de una computadora.

7.C1 Un estado de esfuerzo plano está definido por las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y τ_{xy} asociadas con el elemento de la figura P7.C1*a*. *a*) Escriba un programa para computadora que calcule las componentes de esfuerzo $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con el elemento después de haberlo girado un ángulo θ alrededor del eje *z* (figura P7.C1*b*). *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.13 a 7.16.

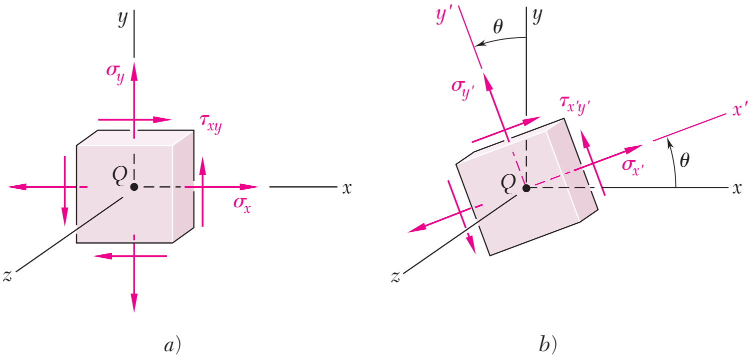


Figura P7.C1

7.C2 Un estado de esfuerzo plano está definido por las componentes σ_x, σ_y y τ_{xy} asociadas con el elemento de la figura P7.C1*a*. *a*) Escriba un programa que determine los ejes principales, los esfuerzos principales, el máximo esfuerzo cortante en el plano y el máximo esfuerzo cortante, *b*) use dicho programa para resolver los problemas 7.5, 7.9, 7.68 y 7.69.

7.C3 *a*) Escriba un programa para computadora que, para un estado dado de esfuerzo plano y un límite de fluencia dado de un material dúctil, pueda utilizarse para determinar si el material fluirá. El programa deberá utilizar tanto el criterio del esfuerzo cortante máximo como el de la energía máxima de distorsión. Deben imprimirse los valores de los esfuerzos principales y, si el material no fluye, calcule el factor de seguridad. *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.81, 7.82 y 7.165.

7.C4 *a*) Escriba un programa para computadora basado en el criterio de ruptura de Mohr para materiales frágiles que, para un estado dado de esfuerzo plano y valores dados de la resistencia última de un material a tensión y a compresión, pueda usarse para determinar si ocurrirá ruptura o no. El programa debe imprimir también los valores de los esfuerzos principales. *b*) Use el programa para resolver los problemas 7.89 y 7.90, y para verificar las respuestas a los problemas 7.93 y 7.94.

7.C5 Un estado de deformación plana se define por las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes *x* y *y*. *a*) Escriba un programa para computadora que calcule las componentes de deformación $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ asociadas con el marco de referencia $x'y'$ obtenido al rotar los ejes *x* y *y* un ángulo θ. *b*) Utilice el programa para resolver los problemas 7.129 y 7.131.

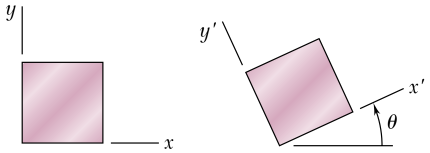


Figura P7.C5

7.C6 Un estado de deformación plana se define por las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, asociadas con los ejes *x* y *y*. *a*) Escriba un programa para computadora que determine la orientación y magnitud de las deformaciones principales, la deformación cortante máxima en el plano y la deformación cortante máxima. *b*) Emplee el programa para resolver los problemas 7.136 a 7.139.

7.C7 Un estado de deformación está definido por las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} medidas en un punto. *a*) Escriba un programa para computadora que determine la orientación y magnitud de las deformaciones principales, la deformación cortante máxima en el plano y la deformación cortante máxima. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 7.140 a 7.143.

7.C8 Una roseta que consta de tres medidores, que forma dos ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 con el eje *x*, se adhiere a la superficie libre de un elemento de máquina hecho de un material con una relación de Poisson ν. *a*) Escriba un programa que, para lecturas ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3, pueda utilizarse para calcular las componentes de deformación asociadas con los ejes *x* y *y* para obtener la orientación y magnitud de las tres deformaciones principales, la deformación cortante máxima en el plano y la deformación cortante máxima. *b*) Use dicho programa para resolver los problemas 7.144, 7.145, 7.146 y 7.169.

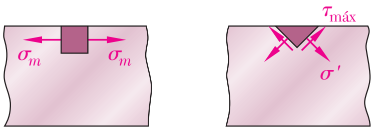
CAPÍTULO

8

Esfuerzos principales bajo una carga dada

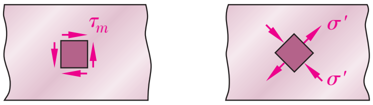
Debido a las fuerzas de gravedad y del viento, el poste que soporta el anuncio que se muestra está sometido en forma simultánea a compresión, flexión y torsión. En este capítulo usted aprenderá a determinar el esfuerzo que crean tales cargas combinadas en las estructuras y elementos de máquinas.

*8.1 INTRODUCCIÓN



a) *b*)

Figura 8.1



a) *b*)

Figura 8.2

La primera parte de este capítulo se dedicará a la aplicación de los conocimientos sobre la transformación de esfuerzos (adquiridos en el capítulo 7) al diseño de vigas y ejes. La segunda parte del capítulo tratará de cómo determinar los esfuerzos principales en elementos estructurales y de maquinaria sujetos a condiciones dadas de carga.

En el capítulo 5 se aprenderá a calcular el esfuerzo normal máximo σ_m que ocurre en una viga sometida a una carga transversal (figura 8.1*a*) y a verificar si dicho valor excede el esfuerzo permisible σ_{perm} para el material dado. Si fuera así, el diseño de la viga no sería aceptable. Si bien el peligro para un material frágil en realidad es fallar a la tensión, para un material dúctil es fallar a cortante (figura 8.1*b*). El hecho de que $\sigma_m > \sigma_{\text{perm}}$ indica que $|M|_{\text{máx}}$ es demasiado grande para la sección transversal seleccionada, pero no proporciona ninguna información acerca del mecanismo real de falla. En forma similar, el hecho de que $\tau_m > \tau_{\text{perm}}$ simplemente indica que $|V|_{\text{máx}}$ es demasiado grande para la sección transversal seleccionada. Mientras que el peligro para un material dúctil estriba en fallar ante un esfuerzo cortante (figura 8.2*a*), el peligro para un material frágil es fallar a la tensión bajo los esfuerzos principales (figura 8.2*b*). La distribución de los esfuerzos principales en una viga se analizará en la sección 8.2.

En función de la forma de la sección transversal de la viga y el valor de la cortante V en la sección crítica, donde $|M| = |M|_{\text{máx}}$, podría ocurrir que el mayor valor del esfuerzo normal no se diera en los extremos superior o inferior de la sección, sino en algún otro punto dentro de ésta. Como se verá en la sección 8.2, una combinación de valores grandes de σ_x y τ_{xy} cerca de la unión de la estructura y de los bordes de una viga en W o en S puede ocasionar que el valor del esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ (figura 8.3) sea mayor que el valor σ_m en la superficie de la viga.

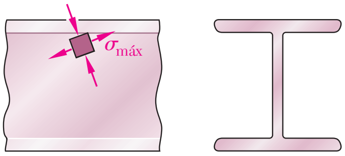


Figura 8.3

La sección 8.3 se dedicará al diseño de ejes de transmisión sometidos a cargas transversales y a pares de torsión. Se tomará en cuenta el efecto conjunto de los esfuerzos normales debidos a la flexión y a los esfuerzos cortantes debidos a la torsión.

En la sección 8.4 se aprenderá a determinar los esfuerzos en un punto K dado de un cuerpo de forma cualquiera sujeto a cargas combinadas. En primer lugar, se reducirá la carga dada a fuerzas y pares en la sección que contiene a K. Enseguida, se calcularán los esfuerzos normal y cortante en K. Por último, con el uso de uno de los métodos aprendidos en el capítulo 7 para transformar esfuerzos, se determinará los planos y esfuerzos principales, y el esfuerzo cortante máximo en K.

*8.2 ESFUERZOS PRINCIPALES EN UNA VIGA

Considere una viga prismática *AB* sometida a alguna carga arbitraria transversal (figura 8.4). Se denotarán con *V* y *M* al momento cortante y de flexión, respectivamente, en una sección que pase por un punto dado *C*. Se recordará, de los capítulos 5 y 6, que, dentro de un límite elástico, los esfuerzos que se ejercen sobre un pequeño elemento con caras perpendiculares a los ejes *x* y *y*, respectivamente, se reducen a los esfuerzos normales $\sigma_m = Mc/I$ si el elemento se encuentra en la superficie libre de la viga, y a los esfuerzos cortantes $\tau_m = VQ/It$ si el elemento está en la superficie neutral (figura 8.5).

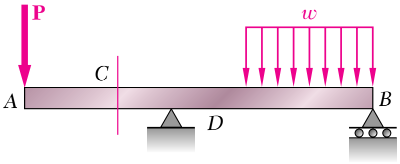


Figura 8.4

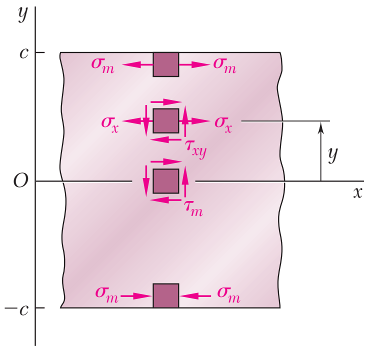


Figura 8.5

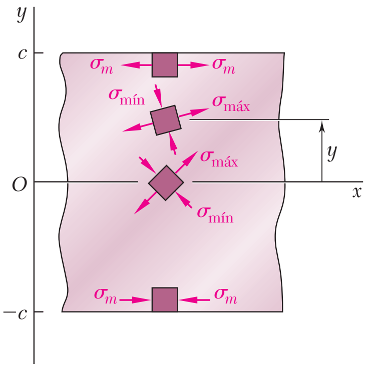


Figura 8.6

En cualquier punto de la sección transversal, un elemento de material está sujeto simultáneamente a los esfuerzos normales

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{8.1}$$

en donde *y* es la distancia a la superficie neutral e *I* el momento de inercia centroidal de la sección, y a los esfuerzos cortantes

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \tag{8.2}$$

donde *Q* es el primer momento sobre el eje neutral de la porción del área de la sección transversal localizada sobre el punto donde se calculan los esfuerzos, y *t* es el ancho de la sección transversal en ese punto. Con el uso de cualquiera de los métodos de análisis que se presentaron en el capítulo 7, es posible obtener los esfuerzos principales en cualquier punto de la sección transversal (figura 8.6).

Ahora procede formular la siguiente pregunta: ¿el esfuerzo normal máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en algún punto dentro de la sección transversal podría ser mayor que el valor $\sigma_m = Mc/I$ calculado en la superficie de la viga? Si es así, entonces la determinación del mayor esfuerzo normal en la viga implicará una dificultad más grande que el cálculo de $|M|_{\text{máx}}$ y el uso de la ecuación (8.1). Se puede obtener una respuesta a dicha pregunta con la investigación de la distribución de los esfuerzos principales en una viga rectangular a voladizo sometida a una carga **P** concentrada en su extremo libre (figura 8.7). Se recordará, de la sección 6.5, que los esfuerzos normal y cortante a una distancia x de la carga **P** y a una distancia sobre la superficie neutral, están dados, respectivamente, por las ecuaciones (6.13) y (6.12). Toda vez que el momento de inercia de la sección transversal es

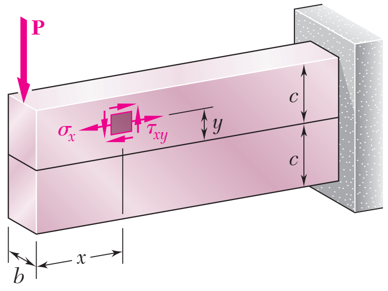


Figura 8.7

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(bh)(2c)^2}{12} = \frac{Ac^2}{3}$$

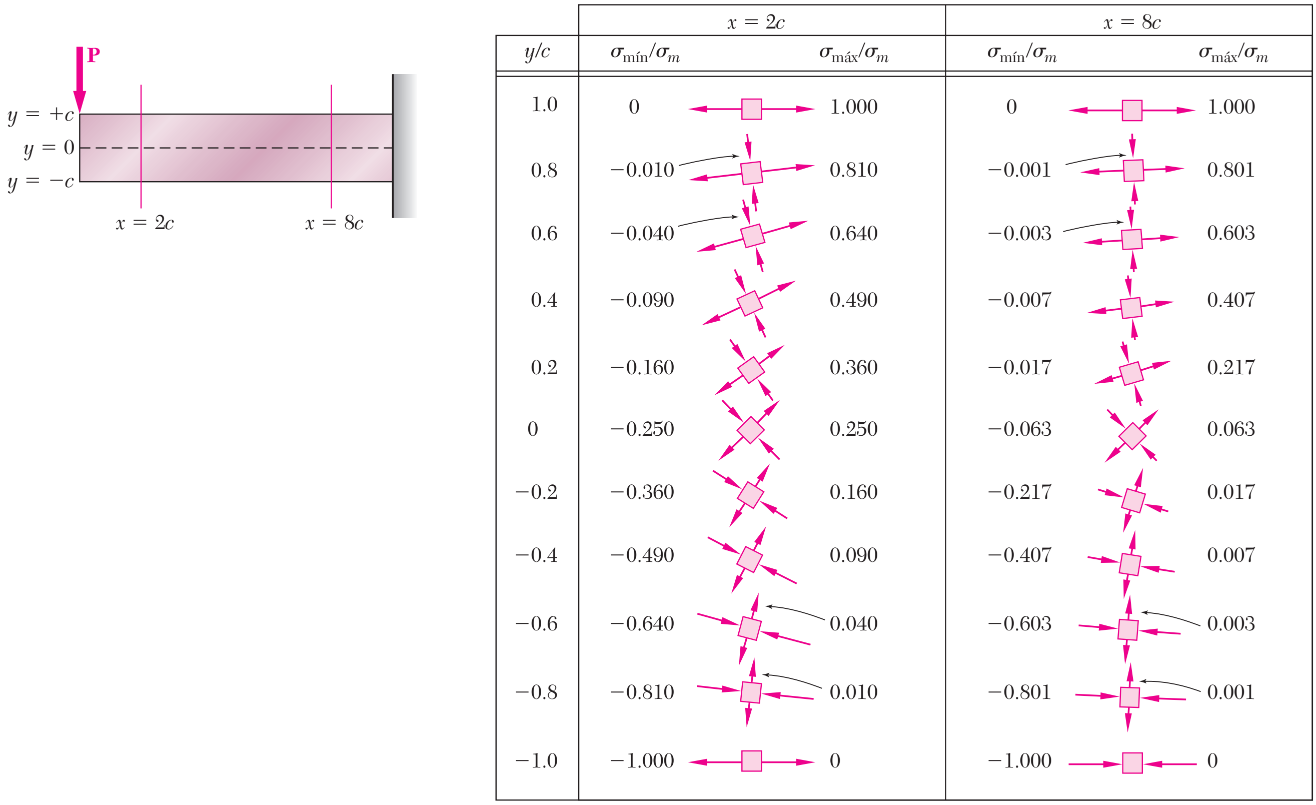
en donde A es el área de la sección transversal y c la mitad del peralte de la viga; se tiene que

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} = \frac{Pxy}{\frac{1}{3}Ac^2} = 3\frac{P}{A}\frac{xy}{c^2} \tag{8.3}$$

y que

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{8.4}$$

Con el uso del método de la sección 7.3 o el de la 7.4, puede determinarse el valor de $\sigma_{\text{máx}}$ en cualquier punto de la viga. La figura 8.8 muestra los resultados del cálculo de las razones $\sigma_{\text{máx}}/\sigma_m$ y $\sigma_{\text{mín}}/\sigma_m$ en las dos secciones de la viga, correspondientes respectivamente a $x = 2c$ y a $x = 8c$. En



	$x = 2c$		$x = 8c$	
y/c	$\sigma_{\text{mín}}/\sigma_m$	$\sigma_{\text{máx}}/\sigma_m$	$\sigma_{\text{mín}}/\sigma_m$	$\sigma_{\text{máx}}/\sigma_m$
1.0	0	1.000	0	1.000
0.8	−0.010	0.810	−0.001	0.801
0.6	−0.040	0.640	−0.003	0.603
0.4	−0.090	0.490	−0.007	0.407
0.2	−0.160	0.360	−0.017	0.217
0	−0.250	0.250	−0.063	0.063
−0.2	−0.360	0.160	−0.217	0.017
−0.4	−0.490	0.090	−0.407	0.007
−0.6	−0.640	0.040	−0.603	0.003
−0.8	−0.810	0.010	−0.801	0.001
−1.0	−1.000	0	−1.000	0

Figura 8.8 Distribución de esfuerzos principales en dos secciones transversales de una viga en voladizo rectangular que soporta una carga concentrada única.

cada sección, estas razones se determinaron en 11 puntos diferentes, y se indica la orientación de los ejes principales en cada punto.†

Queda claro que $\sigma_{\text{máx}}$ no excede σ_m en ninguna de las dos secciones consideradas en la figura 8.8 y que, si excede a σ_m en algún caso, será en las secciones cercanas a la carga **P**, donde σ_m es pequeña en comparación con τ_m.‡ Pero, para secciones cercanas a la carga **P**, el principio de Saint-Venant no se aplica, y las ecuaciones (8.3) y (8.4) dejan de ser válidas, excepto en el caso muy improbable de una carga distribuida en forma parabólica sobre el extremo libre de la sección (*cf.* sección 6.5), y se requiere usar métodos más avanzados de análisis que tomen en cuenta el efecto de las concentraciones de esfuerzo. Por tanto, se concluye que, para vigas de sección transversal rectangular, y dentro del marco de la teoría presentada en este texto, el esfuerzo normal máximo puede obtenerse de la ecuación (8.1).

En la figura 8.8 se determinaron las direcciones de los ejes principales en 11 puntos en cada una de las dos secciones consideradas. Si este análisis se extendiera a un número mayor de secciones y a un número más grande de puntos en cada sección, sería posible dibujar dos sistemas ortogonales de curvas en el flanco de la viga (figura 8.9). Un sistema consistiría en curvas tangentes al eje principal que corresponde a $\sigma_{\text{máx}}$ y el otro en curvas tangentes al eje principal que es el de $\sigma_{\text{mín}}$. Las curvas así obtenidas se conocen como *trayectorias de esfuerzo*. Una trayectoria del primer tipo (líneas continuas) define en cada uno de sus puntos la dirección del esfuerzo mayor de tensión, mientras que una trayectoria del segundo tipo (líneas punteadas) define la dirección del mayor esfuerzo de compresión.§

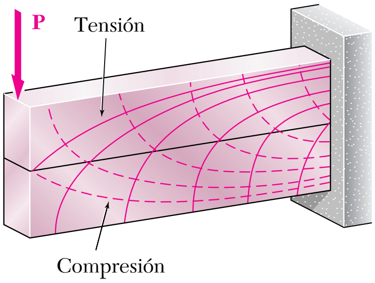


Figura 8.9. Trayectorias de esfuerzo.

La conclusión a la que se ha llegado para las vigas de sección transversal rectangular, acerca de que el esfuerzo normal máximo en la viga puede obtenerse a partir de la ecuación (8.1), sigue siendo válida para muchas de las vigas de sección transversal no rectangular. Sin embargo, cuando el ancho de la sección transversal varía en forma tal que los esfuerzos cortantes mayores τ_{xy} ocurrirán en los puntos cercanos a la superficie de la viga, en donde σ_x también es grande, y en dichos puntos puede que resulte un valor del esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ mayor que σ_m. Se debe prestar especial atención sobre esta posibilidad cuando se seleccionen vigas W o vigas S, y se calculen los esfuerzos principales $\sigma_{\text{máx}}$ en las juntas *b* y *d* del alma con las alas de la viga (figura 8.10). Esto se hace determinando σ_x y τ_{xy} en ese punto con las ecuaciones (8.1) y (8.2), respectivamente, y con el uso de cualquiera de los métodos de análisis del capítulo 7 para obtener $\sigma_{\text{máx}}$ (véase problema modelo 8.1). Un procedimiento alternativo consiste en asignar a τ_{xy} el valor del esfuerzo cortante máximo en la sección, $\tau_{\text{máx}} = V/A_{\text{malla}}$, dado por la ecuación (6.11) de la sección 6.4. Esto lleva a un valor ligeramente mayor, y por tanto conservador, del esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión de la malla con las pestañas de la viga (véase problema modelo 8.2).

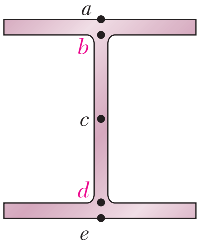


Figura 8.10

---

† Véase el problema 8.C2, que alude al programa utilizado para obtener los resultados que se muestran en la figura 8.8.

‡ Como se comprobará en el problema 8.C2, $\sigma_{\text{máx}}$ excede a σ_m si $x \leq 0.544c$.

§ Un material frágil, tal como el concreto, fallará a la tensión a lo largo de planos perpendiculares a las trayectorias del esfuerzo de tensión. Así, para ser efectivas, las barras de acero de refuerzo deben colocarse en forma tal que intersequen a dichos planos. Por otro lado, las varillas adheridas a la malla de una viga serán eficaces en la resistencia si intersecan planos perpendiculares a las trayectorias del esfuerzo de compresión.

*8.3 DISEÑO DE EJES DE TRANSMISIÓN

Cuando se analizó el diseño de ejes de transmisión en la sección 3.7, sólo se consideraron los esfuerzos debidos a los pares de torsión que se ejercían sobre los ejes. Sin embargo, si la fuerza se transfiere hacia el eje y desde él por medio de engranes o ruedas dentadas (figura 8.11*a*), las fuerzas ejercidas sobre los dientes de los engranes son equivalentes a sistemas de pares de fuerzas aplicados en los centros de las secciones transversales correspondientes (figura 8.11*b*). Esto significa que el eje está sometido a una carga transversal y a una carga de torsión.

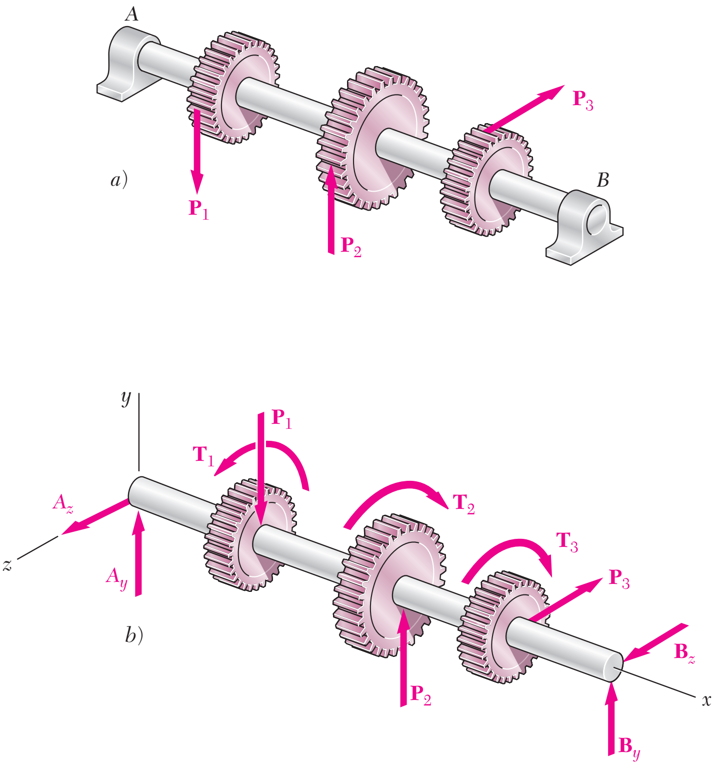


Figura 8.11

Los esfuerzos cortantes producidos en el eje por las cargas transversales por lo general son mucho más pequeños que los provocados por los pares de torsión, por lo cual no se incluirán en este análisis.[†] Sin embargo, los esfuerzos normales debidos a las cargas transversales, pueden ser muy grandes y, como verá, debiera tomarse en cuenta su contribución al esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$.

[†] Para una aplicación en la que deban considerarse los esfuerzos cortantes producidos por las cargas transversales, véanse los problemas 8.21 y 8.22.

Considere la sección transversal del eje en algún punto C. Se representa el par de torsión **T** y los pares de flexión $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ que actúan, respectivamente, en un plano horizontal y en otro vertical por medio de los vectores que se muestran (figura 8.12*a*). Dado que cualquier diámetro de la sección es un eje principal de inercia para la sección, puede reemplazarse $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ por su resultante **M** (figura 8.12*b*) con el objeto de calcular los esfuerzos normales σ_x ejercidos sobre la sección. Se encuentra así que σ_x es máximo al final del diámetro perpendicular al vector que representa a **M** (figura 8.13). Al recordar que los valores de los esfuerzos normales en ese punto son, respectivamente, $\sigma_m = Mc/I$ y cero, mientras que el esfuerzo cortante es $\tau_m = Tc/J$, se grafican los puntos correspondientes X y Y en un diagrama de círculo de Mohr (figura 8.14) y se determina el valor del esfuerzo cortante máximo:

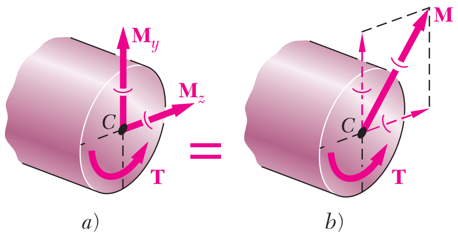


Figura 8.12

$$\tau_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

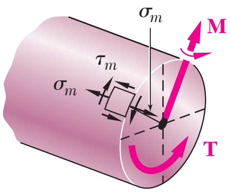


Figura 8.13

Y, como se vio, para una sección transversal circular o anular, $2I = J$, queda

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2} \tag{8.5}$$

Se deduce que la razón mínima permisible J/c para la sección transversal de la viga es

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \tag{8.6}$$

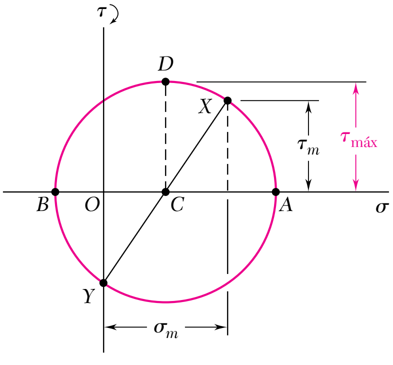


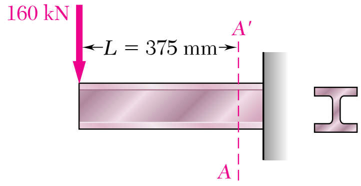
Figura 8.14

en donde el numerador del miembro del lado derecho de la expresión obtenida representa el valor máximo de $\sqrt{M^2 + T^2}$ en el eje, y τ_{perm} es el esfuerzo cortante permisible. Al expresar el momento flexionante M en términos de sus componentes en los dos planos coordenados, se puede escribir

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \tag{8.7}$$

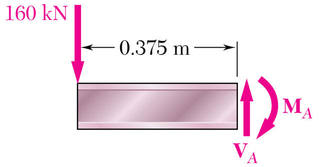
Las ecuaciones (8.6) y (8.7) pueden usarse para diseñar ejes circulares tanto sólidos como huecos y debieran compararse con la ecuación (3.22) de la sección 3.7, la cual se obtuvo con la suposición de tener únicamente una carga de torsión.

La determinación del máximo valor de $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ se facilitará si se dibujan los diagramas del momento flexionante que corresponden a M_y y a M_z, así como un tercer diagrama que represente los valores de T a lo largo del eje (véase problema modelo 8.3).



PROBLEMA MODELO 8.1

Se aplica una fuerza de 160 kN, como se muestra en la figura, en el extremo de una viga de acero *laminada* W200 × 52. Ignore el efecto de los fileteados y concentraciones de esfuerzos y determine si los esfuerzos normales en la viga satisfacen una especificación de diseño menor o igual que 150 MPa en la sección *A*-*A*′.

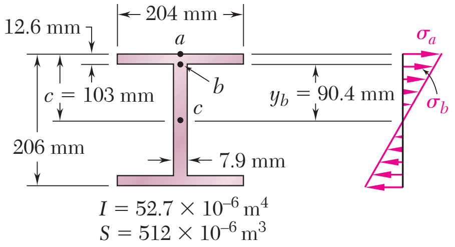


SOLUCIÓN

Momento cortante y flexionante. En la sección *A*-*A*′ se tiene

$$M_A = (160\text{ kN})(0.375\text{ m}) = 60\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_A = 160\text{ kN}$$

Esfuerzos normales en el plano transversal. Al buscar en la tabla de *Propiedades de las formas de acero laminado* en el apéndice C, se obtienen los datos que se muestran y con ellos se determinan los esfuerzos σ_a y σ_b.



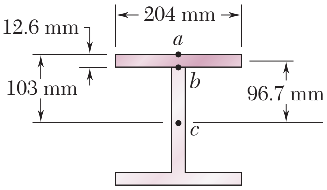
En el punto *a*:

$$\sigma_a = \frac{M_A}{S} = \frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}}{512\times10^{-6}\text{ m}^3} = 117.2\text{ MPa}$$

En el punto *b*:

$$\sigma_b = \sigma_a\frac{y_b}{c} = (117.2\text{ MPa})\frac{90.4\text{ mm}}{103\text{ mm}} = 102.9\text{ MPa}$$

Se observa que todos los esfuerzos normales sobre el plano transversal son menores que 150 MPa.



Esfuerzos cortantes sobre el plano transversal

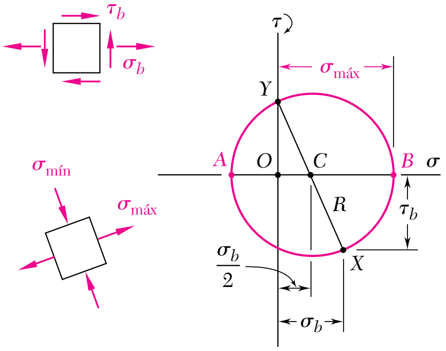
En el punto *a*:

$$Q = 0 \qquad \tau_a = 0$$

En el punto *b*:

$$Q = (204\times12.6)(96.7) = 248.6\times10^3\text{ mm}^3 = 248.6\times10^{-6}\text{ m}^3$$

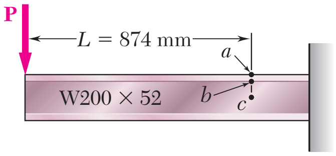
$$\tau_b = \frac{V_AQ}{It} = \frac{(160\text{ kN})(248.6\times10^{-6}\text{ m}^3)}{(52.7\times10^{-6}\text{ m}^4)(0.0079\text{ m})} = 95.5\text{ MPa}$$



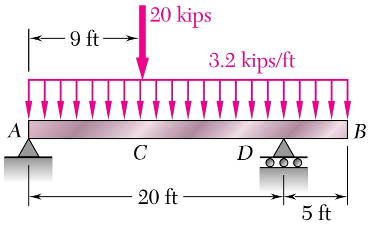
Esfuerzos principales en el punto *b*. El estado de los esfuerzos en el punto *b* consiste en el esfuerzo normal σ_b = 102.4 MPa y el esfuerzo cortante τ_b = 95.5 MPa. Se dibuja el círculo de Mohr y se encuentra que

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{1}{2}\sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$
$$= \frac{102.9}{2} + \sqrt{\left(\frac{102.9}{2}\right)^2 + (95.5)^2}$$
$$\sigma_{\text{máx}} = 159.9\text{ MPa}$$

La especificación $\sigma_{\text{máx}} \le 150$ MPa, *no* se satisface ◀

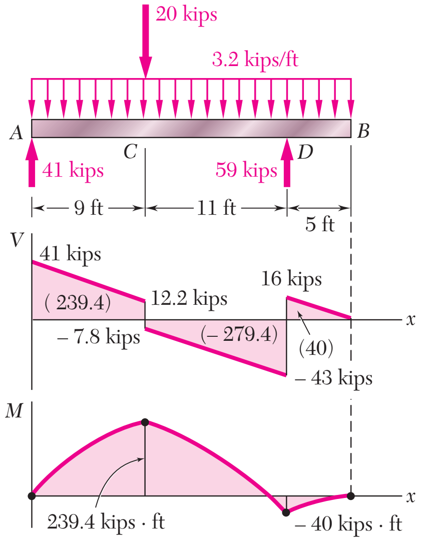


Comentario. Para esta viga y carga, el esfuerzo principal en el punto *b* es 36% mayor que el esfuerzo normal en el punto *a*. Para $L \ge 874$ mm, el esfuerzo normal máximo ocurriría en el punto *a*.


20 kips
9 ft
3.2 kips/ft
A
B
C
D
20 ft
5 ft

PROBLEMA MODELO 8.2

La viga colgante AB soporta una carga de 3.2 kips/ft uniformemente distribuida y una carga concentrada de 20 kips en C. Si se sabe que para el grado de acero que se usará $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi y $\tau_{\text{perm}} = 14.5$ ksi seleccione la forma del perfil de alas anchas que debe usarse.


20 kips
3.2 kips/ft
A
B
C
D
41 kips
59 kips
9 ft
11 ft
5 ft
V
41 kips
(239.4)
12.2 kips
16 kips
x
– 7.8 kips
(– 279.4)
(40)
– 43 kips
M
x
239.4 kips · ft
– 40 kips · ft

SOLUCIÓN

Reacciones en A y en D. Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga. De las ecuaciones de equilibrio $\Sigma M_D = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ se encuentran los valores de R_A y R_D que se muestran en el diagrama.

Diagramas de momento cortante y flexionante. Usando los métodos de las secciones 5.2 y 5.3, se dibujan los diagramas y se observa que

$$|M|_{\text{máx}} = 239.4 \text{ kips} \cdot \text{ft} = 2\,873 \text{ kips} \cdot \text{in.} \qquad |V|_{\text{máx}} = 43 \text{ kips}$$

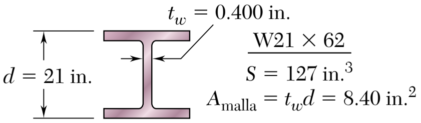
Módulo de la sección. Para $|M|_{\text{máx}} = 2\,873$ kips · in. y $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi, el módulo de la sección mínima aceptable de la forma de acero laminado es

$$S_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{2\,873 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{24 \text{ ksi}} = 119.7 \text{ in.}^3$$

Selección de la forma del perfil de alas anchas. De la tabla *Propiedades de las formas de acero laminado* del apéndice D, se obtiene la lista de formas que tienen un módulo de sección más grande que $S_{\text{mín}}$ y que también son la forma más ligera en un grupo de profundidad dada.

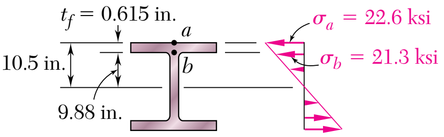
Forma	**S (in.^{3})**
W24 × 68	154
W21 × 62	127
W18 × 76	146
W16 × 77	134
W14 × 82	123
W12 × 96	131

Y se selecciona la forma más ligera disponible, que es W21 × 62 ◀


t_w = 0.400 in.
W21 × 62
S = 127 in.^{3}
d = 21 in.
$A_{\text{malla}} = t_w d$ = 8.40 in.^{2}

Esfuerzo cortante. Se supone que el esfuerzo cortante máximo está uniformemente distribuido sobre la malla del área de una forma W21 × 62 y se escribe

$$\tau_m = \frac{V_{\text{máx}}}{A_{\text{malla}}} = \frac{43 \text{ kips}}{8.40 \text{ in.}^2} = 5.12 \text{ ksi} < 14.5 \text{ ksi} \qquad \text{(OK)}$$


t_f = 0.615 in.
a
b
10.5 in.
9.88 in.
σ_a = 22.6 ksi
σ_b = 21.3 ksi

Esfuerzo principal en el punto b. Se revisa que el esfuerzo principal máximo en el punto b en la sección crítica donde M es máximo no excede $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi. Se escribe

$$\sigma_a = \frac{M_{\text{máx}}}{S} = \frac{2\,873 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{127 \text{ in.}^3} = 22.6 \text{ ksi}$$

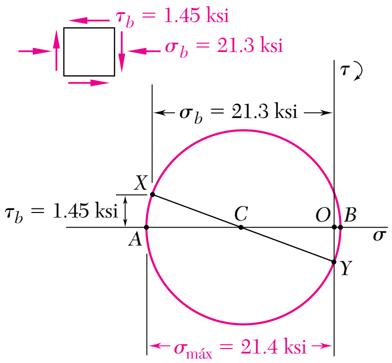
$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (22.6 \text{ ksi})\frac{9.88 \text{ in.}}{10.50 \text{ in.}} = 21.3 \text{ ksi}$$

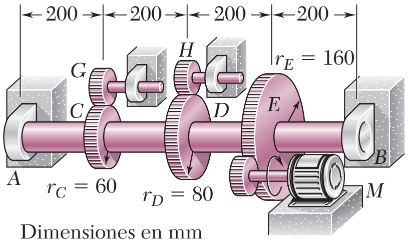
Conservativamente, $\tau_b = \dfrac{V}{A_{\text{malla}}} = \dfrac{12.2 \text{ kips}}{8.40 \text{ in.}^2} = 1.45$ ksi

Se dibuja el círculo de Mohr y se encuentra que

$$\sigma_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{21.3 \text{ ksi}}{2} + \sqrt{\left(\frac{21.3 \text{ ksi}}{2}\right)^2 + (1.45 \text{ ksi})^2}$$

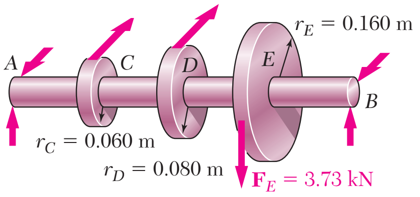
$$\sigma_{\text{máx}} = 21.4 \text{ ksi} \leq 24 \text{ ksi} \quad \text{(OK)} \blacktriangleleft$$


τ_b = 1.45 ksi
σ_b = 21.3 ksi
τ
σ_b = 21.3 ksi
X
τ_b = 1.45 ksi
C
O
B
A
σ
Y
$\sigma_{\text{máx}}$ = 21.4 ksi


200
200
200
200
G
H
$r_E = 160$
C
D
E
B
A
$r_C = 60$
$r_D = 80$
M
Dimensiones en mm

PROBLEMA MODELO 8.3

El eje sólido *AB* gira a 480 rpm y transmite 30 kW del motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *G* y *H*; se extraen 20 kW en el engrane *G* y 10 kW en *H*. Sabiendo que $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa, determine el diámetro más pequeño permisible para el eje *AB*.


$r_E = 0.160$ m
A
C
D
E
B
$r_C = 0.060$ m
$r_D = 0.080$ m
$\mathbf{F}_E = 3.73$ kN

SOLUCIÓN

Pares de torsión ejercidos sobre los engranes. Se observa que $f = 480$ rpm $= 8$ Hz y se determina el par de torsión ejercido sobre el engrane *E*:

$$T_E = \frac{P}{2\pi f} = \frac{30 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 597 \text{ N} \cdot \text{m}$$

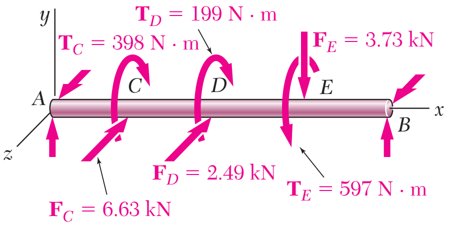
La fuerza tangencial que actúa sobre el engrane es

$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.16 \text{ m}} = 3.73 \text{ kN}$$

Se efectúan análisis similares para los engranes *C* y *D*, y quedan

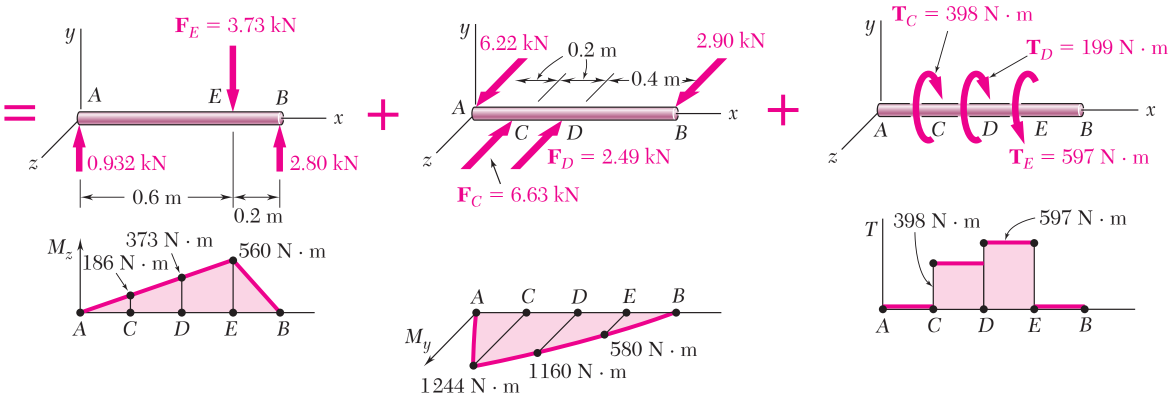
$$T_C = \frac{20 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 398 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad F_C = 6.63 \text{ kN}$$

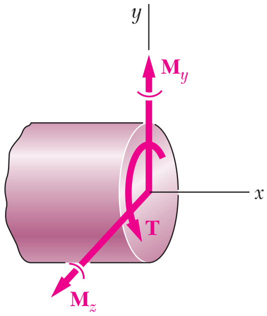
$$T_D = \frac{10 \text{ kW}}{2\pi(8 \text{ Hz})} = 199 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad F_D = 2.49 \text{ kN}$$


y
$\mathbf{T}_D = 199$ N · m
$\mathbf{T}_C = 398$ N · m
$\mathbf{F}_E = 3.73$ kN
A
C
D
E
B
x
z
$\mathbf{F}_D = 2.49$ kN
$\mathbf{T}_E = 597$ N · m
$\mathbf{F}_C = 6.63$ kN

Ahora, se reemplazan las fuerzas en los engranes por sistemas equivalentes de pares de fuerzas.

Diagramas de momento flector y de par de torsión


=
y
$\mathbf{F}_E = 3.73$ kN
A
E
B
x
z
0.932 kN
2.80 kN
0.6 m
0.2 m
M_z
373 N · m
186 N · m
560 N · m
A
C
D
E
B
+
y
6.22 kN
0.2 m
2.90 kN
0.4 m
A
C
D
B
x
z
$\mathbf{F}_D = 2.49$ kN
$\mathbf{F}_C = 6.63$ kN
A
C
D
E
B
M_y
580 N · m
1160 N · m
1244 N · m
+
y
$\mathbf{T}_C = 398$ N · m
$\mathbf{T}_D = 199$ N · m
x
A
C
D
E
B
z
$\mathbf{T}_E = 597$ N · m
T
398 N · m
597 N · m
A
C
D
E
B


y
$\mathbf{M}_y$
x
T
$\mathbf{M}_z$

Sección transversal crítica. Al calcular $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ en todas las secciones potencialmente críticas, se encuentra que su valor máximo ocurre justo a la derecha de *D*:

$$\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}} = \sqrt{(1\,160)^2 + (373)^2 + (597)^2} = 1\,357 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diámetro del eje. Para $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa, la ecuación (7.32) conduce a

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} = \frac{1\,357 \text{ N} \cdot \text{m}}{50 \text{ MPa}} = 27.14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Para un eje sólido circular de radio *c*, se tiene

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}c^3 = 27.14 \times 10^{-6} \qquad c = 0.02585 \text{ m} = 25.85 \text{ mm}$$

$$\text{Diámetro} = 2c = 51.7 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

8.1 Una viga de acero laminado W10 × 39 soporta una carga **P**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 45$ kips, $a = 10$ in. y $\sigma_{\text{perm}} = 18$ ksi, *a*) determine el máximo valor del esfuerzo normal σ_m en la viga, *b*) calcule el máximo valor del esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión del alma con el patín, *c*) diga si la forma especificada es aceptable en lo que concierne a estos dos esfuerzos.

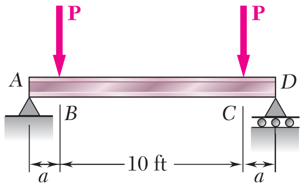


Figura P8.1

8.2 Resuelva el problema 8.1 si $P = 22.5$ kips y $a = 20$ in.

8.3 Una viga en voladizo W920 × 446 de acero laminado soporta una carga **P** como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 700$ kN, $a = 2.5$ m y $\sigma_{\text{perm}} = 100$ MPa, *a*) determine el valor máximo del esfuerzo normal σ_{m} en la viga, *b*) calcule el valor máximo del esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión del alma con el patín, *c*) diga si la forma especificada es aceptable en lo referente a los dos esfuerzos mencionados.

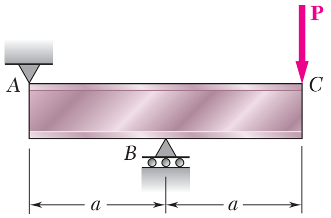


Figura P8.3

8.4 Retome el problema 8.4, y ahora suponga que $P = 850$ kN y $a = 2.0$ m.

8.5* y *8.6 *a*) Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi y $\tau_{\text{perm}} = 14.5$, seleccione el perfil de patín ancho más económico que debe usarse para sostener la carga que se muestra en la figura. *b*) Determine los valores que se esperan de σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la junta del alma con el patín de la viga seleccionada.

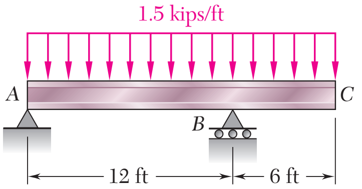


Figura *P8.5*

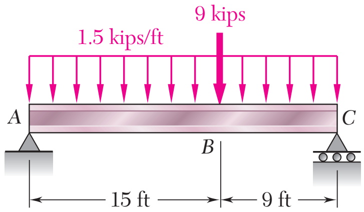


Figura *P8.6*

8.7 y 8.8 *a*) Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 160$ MPa y que $\tau_{\text{perm}} = 100$ Mpa, seleccione la forma métrica de patín ancho más económica que debe emplearse para soportar la carga que se indica en la figura. *b*) Determine los valores esperados para σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión del alma con el patín de la viga seleccionada.

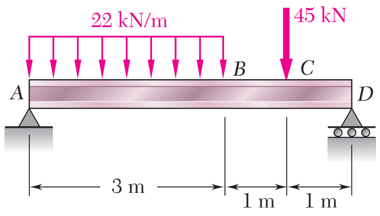


Figura P8.8

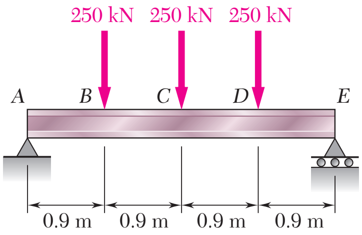


Figura P8.7

8.9 a 8.14 Cada uno de los siguientes problemas se refiere al perfil de acero laminado seleccionado en un problema del capítulo 5 para sostener una carga dada a costo mínimo a fin de satisfacer el requerimiento de que $\sigma_m \leq \sigma_{\text{perm}}$. Para el diseño seleccionado, determine *a*) el valor real de σ_m en la viga, *b*) el máximo valor del esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión del alma con el patín.

8.9 La carga del problema 5.74 y el perfil seleccionado W530 × 66.

8.10 La carga del problema 5.73 y el perfil seleccionado W250 × 28.4.

8.11 La carga del problema 5.78 y el perfil seleccionado S310 × 47.3.

8.12 La carga del problema 5.75 y el perfil seleccionado S20 × 66.

8.13 La carga del problema 5.77 y el perfil seleccionado S510 × 98.3.

8.14 La carga del problema 5.76 y el perfil seleccionado S20 × 66.

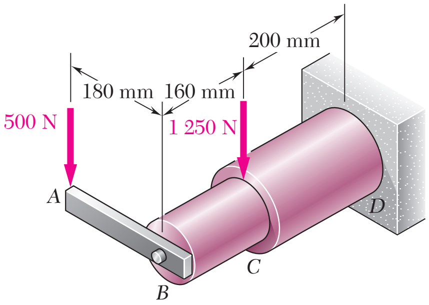


Figura P8.15 y P8.16

8.15 Determine los diámetros mínimos permisibles para las varillas sólidas *BC* y *CD* que se muestran en la figura. Utilice $\tau_{\text{perm}} = 60$ MPa y desprecie el efecto de los filetes y de las concentraciones de esfuerzo.

8.16 Si se sabe que las varillas *BC* y *CD* de la figura tienen diámetros de 24 mm y 36 mm respectivamente, determine el esfuerzo cortante máximo en cada varilla. Desprecie el efecto de los filetes y de las concentraciones de esfuerzo.

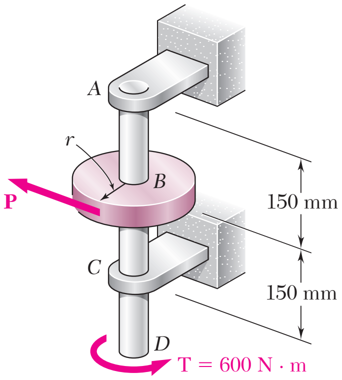


Figura *P8.17*

8.17 Determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *ABCD*, si se sabe que $\tau_{\text{perm}} = 60$ MPa y que el radio del disco *B* es $r = 80$ mm.

8.18 La fuerza de 4 kN es paralela al eje *x*, y la fuerza **Q** es paralela al eje *z*. El eje *AD* es hueco. Si se sabe que el diámetro interior es la mitad del diámetro exterior y que $\tau_{\text{perm}} = 60$ MPa, determine el diámetro exterior mínimo permisible para el eje.

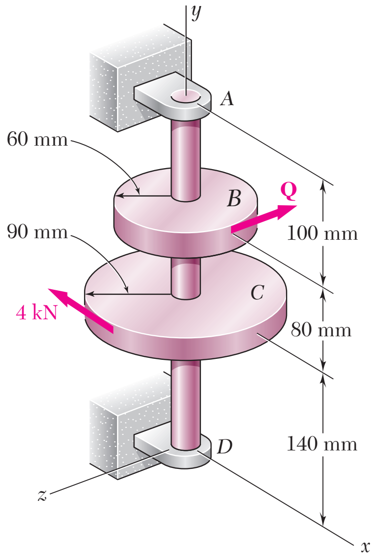


Figura *P8.18*

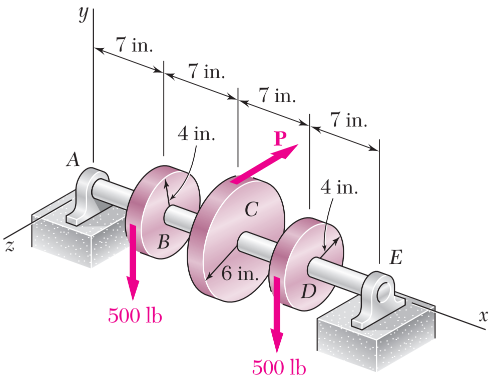


Figura P8.19

8.19 Las dos fuerzas de 500 lb son verticales y la fuerza **P** es paralela al eje *z*. Si $\tau_{\text{perm}} = 8$ ksi, determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido *AE*.

8.20 Para el sistema de eje y engranes y las cargas del problema 8.19, determine el diámetro mínimo permisible del eje *AE*, si se sabe que el eje es hueco y tiene un diámetro interior que es $\frac{2}{3}$ del diámetro exterior.

8.21 Utilice la notación de la sección 8.3 y desprecie el efecto que tienen los esfuerzos cortantes ocasionados por las cargas transversales, para demostrar que el esfuerzo normal máximo en un eje cilíndrico puede expresarse como

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\left[(M_y^2 + M_z^2)^{\frac{1}{2}} + (M_y^2 + M_z^2 + T^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{\text{máx}}$$

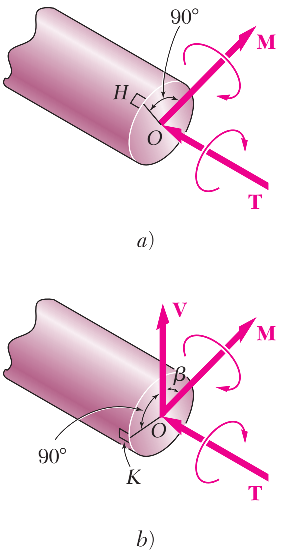
8.22 En la sección 8.3 se estableció que generalmente los esfuerzos cortantes producidos en un eje por cargas transversales son mucho más pequeños que los producidos por los pares de torsión. En los problemas precedentes se ignoró su efecto y se supuso que el esfuerzo cortante máximo en una sección dada ocurría en un punto H (figura P8.22*a*) y era igual a la expresión obtenida para la ecuación (8.5), a saber

$$\tau_H = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Demuestre que el esfuerzo cortante máximo en el punto K (figura P8.22*b*), donde el esfuerzo cortante V es mayor, puede expresarse como

$$\tau_K = \frac{c}{J}\sqrt{(M\cos\beta)^2 + \left(\tfrac{2}{3}cV + T\right)^2}$$

donde β, es el ángulo entre los vectores **V** y **M**. Es evidente que el efecto del esfuerzo cortante V no puede ignorarse cuando $\tau_K \geq \tau_H$. (*Sugerencia*: Considere que sólo la componente **M** a lo largo de **V** contribuye al esfuerzo cortante en K.)



a)

b)

Figura P8.22

8.23 Los ejes sólidos *ABC* y *DEF*, así como los engranes que se muestran en la figura, se utilizan para transmitir 20 hp del motor *M* a un elemento de máquina conectado al eje *DEF*. Si se sabe que el motor gira a 240 rpm y que $\tau_{\text{perm}} = 7.5$ ksi, determine el diámetro mínimo permisible *a*) del eje *ABC*, *b*) del eje *DEF*.

8.24 Resuelva el problema 8.23 si el motor gira a 360 rpm.

8.25 El eje sólido *AB* gira a 450 rpm y transmite 20 kW desde el motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *F* y *G*. Si $\tau_{\text{perm}} = 55$ MPa y se supone que se extraen 8 kW en el engrane *F* y 12 kW en el engrane *G*, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AB*.

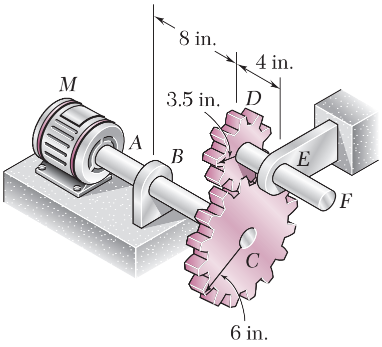


Figura *P8.23*

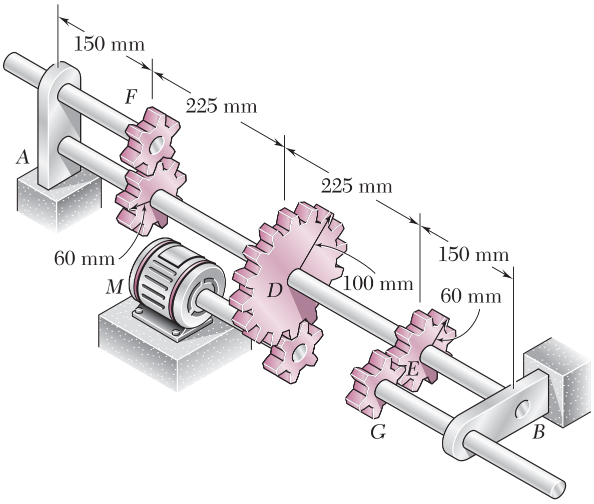


Figura P8.25

8.26 Retome el problema 8.25, y ahora suponga que los 20 kW se extraen en el engrane *G*.

8.27 El eje sólido *ABC* y los engranes que se muestran en la figura se utilizan para transmitir 10 kW del motor *M* a un elemento de máquina conectado al engrane *D*. Si el motor gira a 240 rpm y $\tau_{\text{perm}} = 60$ MPa, determine el diámetro mínimo permisible del eje *ABC*.

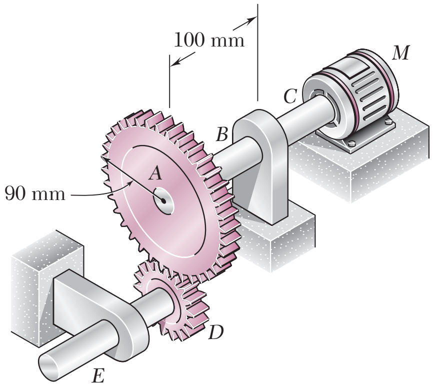


Figura P8.27

8.28 Suponga que el eje *ABC* del problema 8.27 es hueco y tiene un diámetro exterior de 50 mm, determine su diámetro interior máximo permisible.

8.29 El eje sólido *AE* gira a 600 rpm y transmite 60 hp desde el motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *G* y *H*. Si $\tau_{\text{perm}} = 8$ ksi y se sabe que se extraen 40 hp en el engrane *G* y 20 hp en el engrane *H*, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AE*.

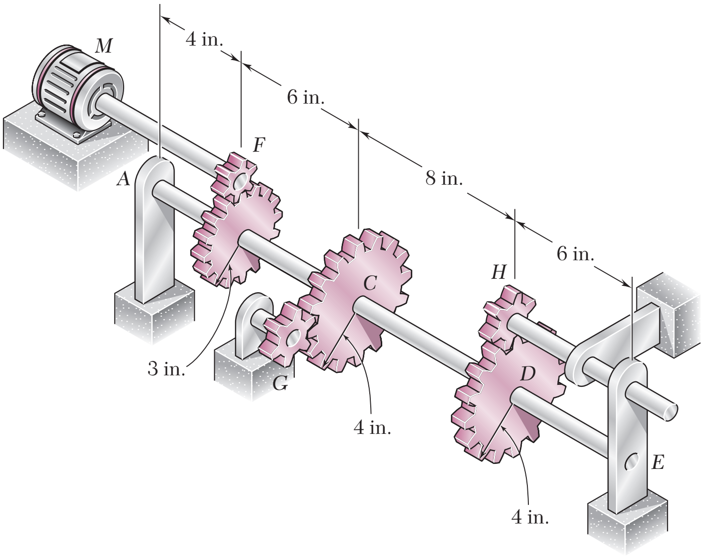


Figura P8.29

8.30 Retome el problema 8.29, y ahora suponga que se extraen 30 hp en el engrane *G* y 30 hp en el engrane *H*.

*8.4 ESFUERZOS BAJO CARGAS COMBINADAS

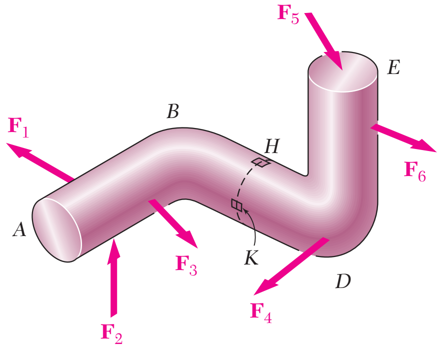


Figura 8.15

En los capítulos 1 y 2 se aprendió a determinar los esfuerzos causados por una carga axial centrada. En el capítulo 3 se analizó la distribución de esfuerzos en un elemento cilíndrico sometido a un par giratorio. En el capítulo 4 se determinaron los esfuerzos ocasionados por pares flectores y, en los capítulos 5 y 6, los esfuerzos que producen cargas transversales. Como se verá en seguida, es posible combinar los conocimientos adquiridos para determinar los esfuerzos en miembros estructurales esbeltos o en elementos de máquina sometidos a casi cualquier condición de carga.

Por ejemplo, considere un miembro curvado *ABDE* de sección transversal circular sujeto a varias fuerzas (figura 8.15). Con el objeto de calcular los esfuerzos que producen en los puntos *H* o *K* las cargas dadas, primero se traza una sección en dichos puntos y, en el centroide *C* de la sección, se determina el sistema de par de fuerzas requeridas para conservar el equilibrio de la porción *ABC*.[†] Este sistema representa las fuerzas internas en la sec-

---

[†] El sistema de par de fuerzas determinado en *C* también puede definirse como *equivalente a las fuerzas que actúan sobre la porción del elemento localizado a la derecha de la sección* (vea el ejemplo 8.01).

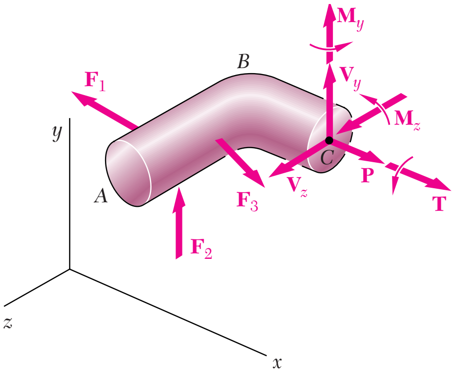
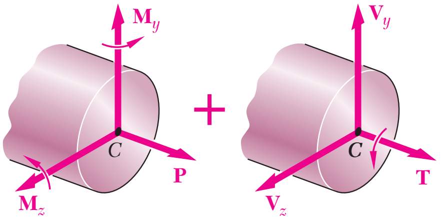


Figura 8.16



a) *b*)

Figura 8.17

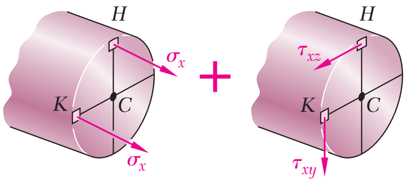
ción y, en general, consta de tres componentes de fuerza y tres pares de vectores que se supone se dirigen según se ilustra en la figura 8.16.

La fuerza **P** es axial centrada y produce esfuerzos normales en la sección. El par de vectores $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ provocan que el elemento se tuerza y también producen esfuerzos normales en la sección. Por tanto, se agrupan con la fuerza **P** en la parte *a* de la figura 8.17 y las sumas σ_x de los esfuerzos normales que producen en los puntos H y K se muestran en la parte *a* de la figura 8.18. Es posible determinar estos esfuerzos, como se vio en la sección 4.14.

Por otro lado, el par giratorio **T** y los esfuerzos cortantes $\mathbf{V}_y$ y $\mathbf{V}_z$ producen esfuerzos cortantes en la sección. Las sumas τ_{xy} y τ_{xz} de las componentes de los esfuerzos cortantes que producen en los puntos H y K se muestran en la parte *b* de la figura 8.18 y se determinan como se indica en las secciones 3.4 y 6.3.[†] Los esfuerzos normales y cortantes que se muestran en las partes *a* y *b* de la figura 8.18 pueden combinarse ahora y manifestarse en los puntos H y K en la superficie del elemento (figura 8.19).

Los esfuerzos principales y la orientación de los planos principales en los puntos H y K pueden determinarse a partir de los valores σ_x, τ_{xy} y τ_{xz} en cada uno de dichos puntos con alguno de los métodos que se presentaron en el capítulo 7 (figura 8.20). Los valores del esfuerzo cortante máximo en cada uno de estos puntos y los planos correspondientes se pueden encontrar en una forma similar.

Los resultados obtenidos en esta sección son válidos sólo hasta donde lo permiten las condiciones de aplicación del principio de superposición (sección 2.12) y el principio de Saint-Venant (sección 2.17). Esto significa que los esfuerzos involucrados no deben exceder el límite proporcional del material, que las deformaciones debidas a alguna de las cargas no afectan la determinación de los esfuerzos debidas a las demás, y que la sección utilizada en el análisis no debe estar demasiado cerca de los puntos de aplicación de las fuerzas dadas. Es evidente, del primero de estos requerimientos, que el método aquí presentado no es aplicable a deformaciones plásticas.



a) *b*)

Figura 8.18

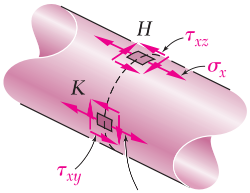


Figura 8.19

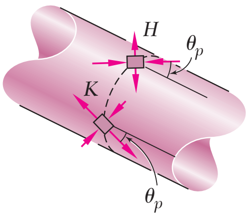


Figura 8.20

[†] Observe que con el conocimiento que en este momento posee el lector, puede calcular el efecto del par giratorio **T** sólo en los casos de ejes circulares, de elementos con sección transversal rectangular (véase sección 3.12), o de elementos huecos de pared delgada (véase sección 3.13).

EJEMPLO 8.01

Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de magnitudes $P_1 = 15$ kN y $P_2 = 18$ kN, al extremo A de la barra AB, la cual está soldada a un elemento cilíndrico BD de radio $c = 20$ mm (figura 8.21). Si se sabe que la distancia de A al eje del elemento BD es $a = 50$ mm, suponga que todos los esfuerzos permanecen por abajo del límite proporcional del material, y determine *a*) los esfuerzos normal y cortante en el punto K de la sección transversal del elemento BD localizado a una distancia $b = 60$ mm del extremo B, *b*) los ejes y esfuerzos principales en K, *c*) el esfuerzo cortante máximo en K.

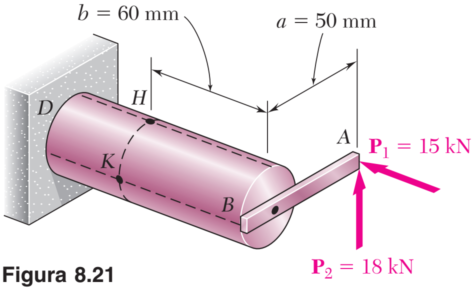


Figura 8.21

Fuerzas internas en una sección dada. Primero se reemplazan las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ por un sistema equivalente de fuerzas y pares aplicados en el centro C de la sección que contiene al punto K (figura 8.22). Este sistema, que representa las fuerzas internas en la sección, consiste en las siguientes fuerzas y pares:

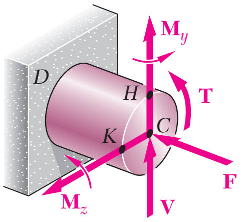


Figura 8.22

1. Una fuerza axial **F** centrada igual a la fuerza $\mathbf{P}_1$, de magnitud

$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$

2. Una fuerza cortante **V** igual a la fuerza $\mathbf{P}_2$, de magnitud

$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$

3. Un par giratorio **T** de par de torsión T igual al momento de $\mathbf{P}_2$ respecto al eje del miembro BD:

$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4. Un par flector $\mathbf{M}_y$, de momento M_y igual al momento de $\mathbf{P}_1$ respecto a un eje vertical que pasa a través de C:

$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5. Un par flector $\mathbf{M}_z$, de momento M_z igual al momento de $\mathbf{P}_2$ respecto a un eje horizontal y transversal que pasa por C:

$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Los resultados que se obtienen se muestran en la figura 8.23.

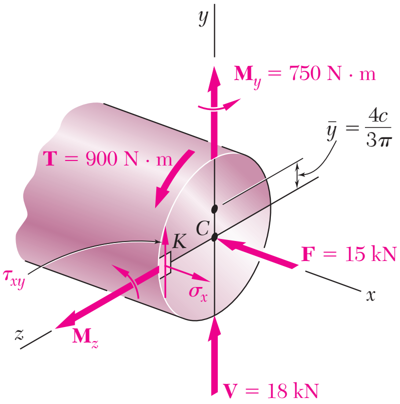


Figura 8.23

a) Esfuerzos normal y cortante en el punto K. Cada una de las fuerzas y pares que se aprecian en la figura 8.23 pueden producir un esfuerzo normal o cortante en el punto K. El propósito es calcular por separado cada uno de estos esfuerzos, y luego sumar los esfuerzos normales y los cortantes. Pero primero se deben determinar las propiedades geométricas de la sección.

Propiedades geométricas de la sección. Se tiene:

$$A = \pi c^2 = \pi(0.020 \text{ m})^2 = 1.257 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$
$$J_C = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(0.020 \text{ m})^4 = 251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

También se determinan el primer momento Q y el ancho t del área de la sección transversal localizada arriba del eje z. Teniendo presente que para un semicírculo de radio c se cumple $\bar{y} = 4c/3\pi$ queda

$$Q = A'\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0.020 \text{ m})^3$$
$$= 5.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

y

$$t = 2c = 2(0.020 \text{ m}) = 0.040 \text{ m}$$

Esfuerzos normales. Se observa que los esfuerzos normales se producen en K debido a la fuerza centrada **F** y el par flector $\mathbf{M}_y$, pero que el par $\mathbf{M}_z$ no produce ningún esfuerzo en K, ya que K se ubica sobre el eje neutral que corresponde a dicho par. Para determinar cada signo en la figura 8.23, se tiene

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11.9 \text{ MPa} + \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0.020 \text{ m})}{125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= -11.9 \text{ MPa} + 119.3 \text{ MPa}$$
$$\sigma_x = +107.4 \text{ MPa}$$

Esfuerzos cortantes. Éstos consisten en el esfuerzo cortante $(\tau_{xy})_V$ debido a la cortante **V** y en el esfuerzo cortante $(\tau_{xy})_{\text{giro}}$ ocasionado por el par de torsión **T**. Al tener en cuenta los valores obtenidos para Q, t, I_z y J_c, queda

$$(\tau_{xy})_V = +\frac{VQ}{I_z t} = +\frac{(18 \times 10^3 \text{ N})(5.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(125.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(0.040 \text{ m})}$$
$$= +19.1 \text{ MPa}$$

$$(\tau_{xy})_{\text{giro}} = -\frac{Tc}{J_C} = -\frac{(900 \text{ N}\cdot\text{m})(0.020 \text{ m})}{251.3 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = -71.6 \text{ MPa}$$

Al sumar estas dos expresiones, se obtiene τ_{xy} en el punto K.

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_V + (\tau_{xy})_{\text{giro}} = +19.1 \text{ MPa} - 71.6 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xy} = -52.5 \text{ MPa}$$

En la figura 8.24, se muestran el esfuerzo normal σ_x y los esfuerzos cortantes τ_{xy} actuando sobre un elemento cuadrado que se localiza en K sobre la superficie del miembro cilíndrico. Observe que se incluyen los esfuerzos cortantes que actúan sobre los lados longitudinales del elemento.

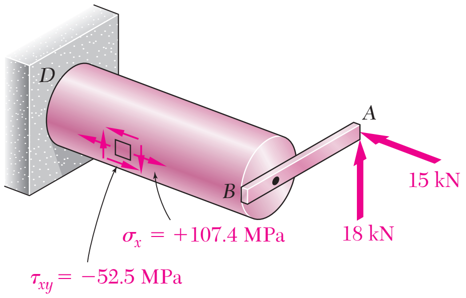


Figura 8.24

b) Planos y esfuerzos principales en el punto K. Puede usarse cualquiera de los dos métodos del capítulo 7 para determinar los planos y esfuerzos principales en K. Se selecciona el círculo de Mohr para graficar el punto X de las coordenadas $\sigma_x = +107.4$ MPa y $-\tau_{xy} = +52.5$ MPa y el punto Y de las coordenadas $\sigma_y = 0$ y $+\tau_{xy} = -52.5$ MPa, y se dibuja el círculo de diámetro XY (figura 8.25). Se observa que

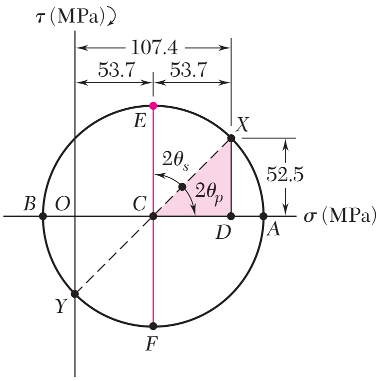


Figura 8.25

$$OC = CD = \tfrac{1}{2}(107.4) = 53.7 \text{ MPa} \qquad DX = 52.5 \text{ MPa}$$

se determina la orientación de los planos principales:

$$\tan 2\theta_p = \frac{DX}{CD} = \frac{52.5}{53.7} = 0.97765 \qquad 2\theta_p = 44.4° \circlearrowright$$
$$\theta_p = 22.2° \circlearrowright$$

Ahora se determina el radio del círculo,

$$R = \sqrt{(53.7)^2 + (52.5)^2} = 75.1 \text{ MPa}$$

y los esfuerzos principales,

$$\sigma_{\text{máx}} = OC + R = 53.7 + 75.1 = 128.8 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = OC - R = 53.7 - 75.1 = -21.4 \text{ MPa}$$

Los resultados que se obtienen se muestran en la figura 8.26.

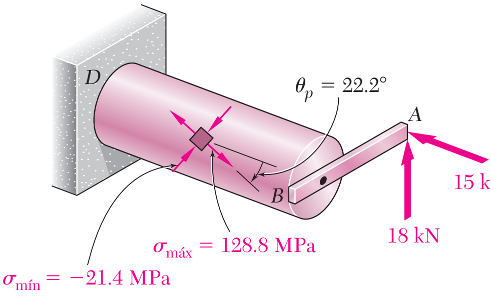

D
$\theta_p = 22.2°$
A
B
15 kN
18 kN
$\sigma_{\text{máx}} = 128.8$ MPa
$\sigma_{\text{mín}} = -21.4$ MPa

Figura 8.26

c) Esfuerzo cortante máximo en el punto K. Este esfuerzo corresponde a los puntos E y F que aparecen en la figura 8.25. Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = CE = R = 75.1 \text{ MPa}$$

Se observa que $2\theta_s = 90° - 2\theta_p = 90° - 44.4° = 45.6°$, y se concluye que los planos de esfuerzo cortante máximo forman un ángulo $\theta_p = 22.8° \circlearrowleft$ con la horizontal. En la figura 8.27 se presenta el incremento correspondiente. Observe que los esfuerzos normales que actúan sobre este elemento están representados por OC en la figura 8.25 y son iguales a +53.7 MPa.

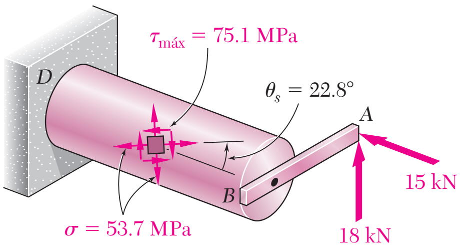
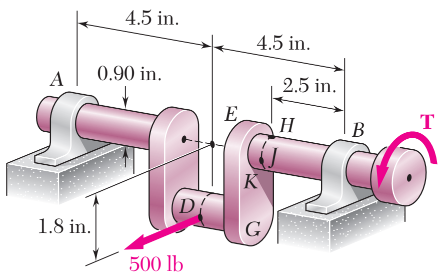


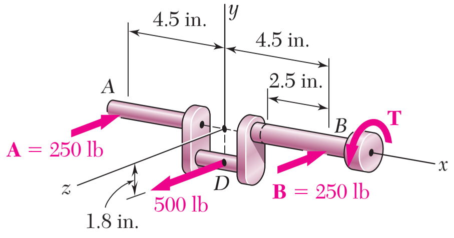
Figura 8.27


4.5 in.
4.5 in.
A
0.90 in.
2.5 in.
E
H
B
T
J
K
D
G
1.8 in.
500 lb

PROBLEMA MODELO 8.4

Una fuerza horizontal de 500 lb actúa en el punto *D* de un cigüeñal *AB*, que se mantiene en equilibrio gracias a un par giratorio **T** y a las reacciones *A* y *B*. Sabiendo que los cojinetes se alinean automáticamente y no ejercen pares sobre el eje, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *H*, *J*, *K* y *L*, que se ubican en los extremos de los diámetros vertical y horizontal de una sección transversal localizada a 2.5 in. a la izquierda del cojinete *B*.

SOLUCIÓN

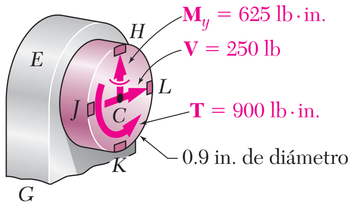

4.5 in.
y
4.5 in.
2.5 in.
A
B
T
A = 250 lb
x
z
D
500 lb
B = 250 lb
1.8 in.

Cuerpo libre. Cigüeñal completo. $A = B = 250 \text{ lb}$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_x = 0: \qquad -(500 \text{ lb})(1.8 \text{ in.}) + T = 0 \qquad T = 900 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

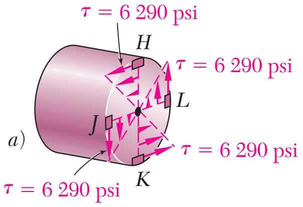
Fuerzas internas en la sección transversal. Se reemplaza la reacción **B** y el par giratorio **T** por un sistema de par de fuerzas equivalente en el centro *C* de la sección transversal que contiene a *H*, *J*, *K* y *L*.

$$V = B = 250 \text{ lb} \qquad T = 900 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$M_y = (250 \text{ lb})(2.5 \text{ in.}) = 625 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$


$\mathbf{M}_y$ = 625 lb · in.
H
V = 250 lb
E
L
J
C
T = 900 lb · in.
0.9 in. de diámetro
K
G

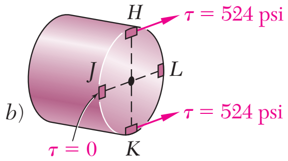
Las propiedades geométricas de la sección de 0.9 in. de diámetro son

$$A = \pi(0.45 \text{ in.})^2 = 0.636 \text{ in.}^2 \qquad I = \tfrac{1}{4}\pi(0.45 \text{ in.})^4 = 32.2 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$
$$J = \tfrac{1}{2}\pi(0.45 \text{ in.})^4 = 64.4 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$


τ = 6 290 psi
H
τ = 6 290 psi
L
J
a)
τ = 6 290 psi
τ = 6 290 psi
K

Esfuerzos producidos por el par giratorio T. Usando la ecuación (3.8) se determinan los esfuerzos cortantes en los puntos *H*, *J*, *K* y *L*, y se ilustran en la figura *a*).

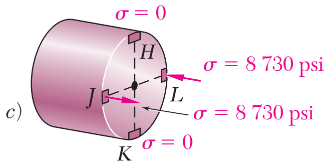
$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(900 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.45 \text{ in.})}{64.4 \times 10^{-3} \text{ in.}^4} = 6\,290 \text{ psi}$$


H
τ = 524 psi
J
L
b)
τ = 524 psi
τ = 0
K

Esfuerzos producidos por la fuerza cortante V. La fuerza cortante **V** no produce esfuerzos cortantes en los puntos *J* y *L*. Primero se calcula *Q* para los puntos *H* y *L* para un semicírculo respecto de un diámetro vertical y después se calcula el esfuerzo cortante producido por la fuerza cortante $V = 250$ lb. Estos esfuerzos se muestran en la figura *b*).

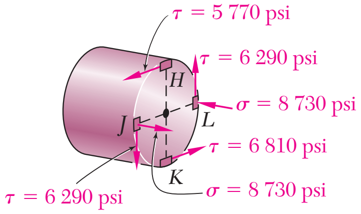
$$Q = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0.45 \text{ in.})^3 = 60.7 \times 10^{-3} \text{ in.}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(250 \text{ lb})(60.7 \times 10^{-3} \text{ in.}^3)}{(32.2 \times 10^{-3} \text{ in.}^4)(0.9 \text{ in.})} = 524 \text{ psi}$$


σ = 0
H
σ = 8 730 psi
J
L
c)
σ = 8 730 psi
σ = 0
K

Esfuerzos producidos por el par flector $\mathbf{M}_y$. Como el par flector $\mathbf{M}_y$ actúa en un plano horizontal, no produce esfuerzos en *H* y *K*. Con el uso de la ecuación (4.15) se determinan los esfuerzos normales en los puntos *J* y *L* y se ilustran en la figura *c*).

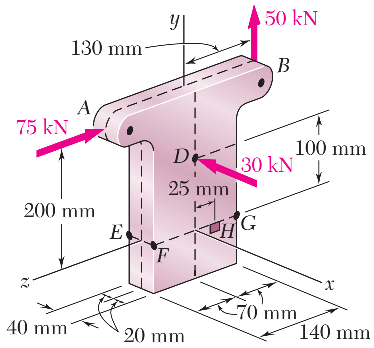
$$\sigma = \frac{|M_y|c}{I} = \frac{(625 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.45 \text{ in.})}{32.2 \times 10^{-3} \text{ in.}^4} = 8\,730 \text{ psi}$$


τ = 5 770 psi
τ = 6 290 psi
H
σ = 8 730 psi
J
L
τ = 6 810 psi
K
σ = 8 730 psi
τ = 6 290 psi

Resumen. Se suman los esfuerzos que se muestran y se obtienen los esfuerzos totales normal y cortante en los puntos *H*, *J*, *K* y *L*.

PROBLEMA MODELO 8.5

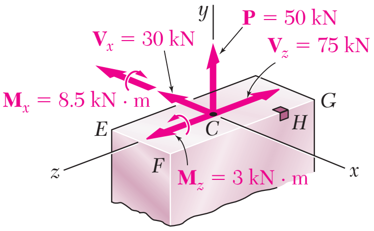
Se aplican tres fuerzas en los puntos A, B y D de un pequeño poste de acero, como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal horizontal del poste es un rectángulo de 40 × 140 mm, determine los esfuerzos y planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto H.



y
50 kN
130 mm
B
A
75 kN
D
30 kN
100 mm
25 mm
200 mm
E
H
G
F
z
x
40 mm
20 mm
70 mm
140 mm

SOLUCIÓN

Fuerzas internas en la sección *EFG*. Se reemplaza a las tres fuerzas que se aplican por un sistema de par de fuerzas equivalente en el centro C de la sección rectangular EFG. Queda

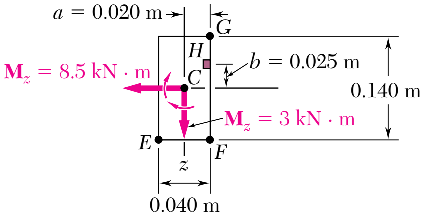


y
P = 50 kN
V_x = 30 kN
V_z = 75 kN
M_x = 8.5 kN · m
G
E
C
H
z
F
M_z = 3 kN · m
x

$$V_x = -30\text{ kN} \quad P = 50\text{ kN} \quad V_z = -75\text{ kN}$$
$$M_x = (50\text{ kN})(0.130\text{ m}) - (75\text{ kN})(0.200\text{ m}) = -8.5\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_y = 0 \qquad M_z = (30\text{ kN})(0.100\text{ m}) = 3\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se observa que no existe un par giratorio respecto del eje y. Las propiedades geométricas de la sección rectangular son

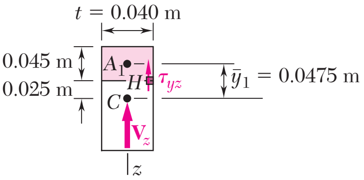
$$A = (0.040\text{ m})(0.140\text{ m}) = 5.6 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$
$$I_x = \tfrac{1}{12}(0.040\text{ m})(0.140\text{ m})^3 = 9.15 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$
$$I_z = \tfrac{1}{12}(0.140\text{ m})(0.040\text{ m})^3 = 0.747 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$



a = 0.020 m
G
H
b = 0.025 m
M_z = 8.5 kN · m
C
0.140 m
M_z = 3 kN · m
E
F
z
0.040 m

Esfuerzo normal en *H*. Se observa que los esfuerzos normales σ_y son producidos por la fuerza centrada **P** y los pares flectores $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$. Se determina el signo de cada esfuerzo por medio del examen cuidadoso del esquema del sistema de par de fuerzas en C.

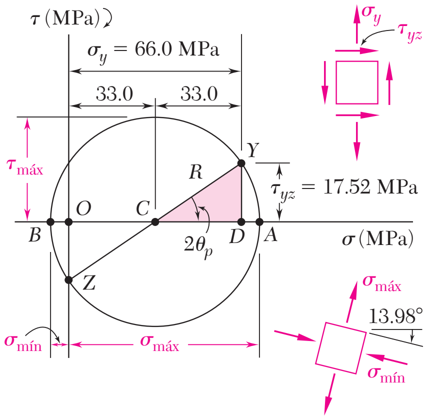
$$\sigma_y = +\frac{P}{A} + \frac{|M_z|a}{I_z} - \frac{|M_x|b}{I_x}$$
$$= \frac{50\text{ kN}}{5.6 \times 10^{-3}\text{ m}^2} + \frac{(3\text{ kN}\cdot\text{m})(0.020\text{ m})}{0.747 \times 10^{-6}\text{ m}^4} - \frac{(8.5\text{ kN}\cdot\text{m})(0.025\text{ m})}{9.15 \times 10^{-6}\text{ m}^4}$$
$$\sigma_y = 8.93\text{ MPa} + 80.3\text{ MPa} - 23.2\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 66.0\text{ MPa} \triangleleft$$



t = 0.040 m
0.045 m
0.025 m
A_1
H
τ_yz
ȳ_1 = 0.0475 m
C
V_z
z

Esfuerzo cortante en *H*. Al considerar la primera fuerza cortante $\mathbf{V}_x$, se observa que $Q = 0$ con respecto al eje z, debido a que H se encuentra sobre la arista de la sección transversal. Entonces, $\mathbf{V}_x$ no produce esfuerzo cortante en H. La fuerza cortante $\mathbf{V}_z$ sí produce un esfuerzo cortante en H, y se escribe

$$Q = A_1\bar{y}_1 = [(0.040\text{ m})(0.045\text{ m})](0.0475\text{ m}) = 85.5 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$\tau_{yz} = \frac{V_zQ}{I_xt} = \frac{(75\text{ kN})(85.5 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(9.15 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0.040\text{ m})} \qquad \tau_{yz} = 17.52\text{ MPa} \triangleleft$$



τ (MPa)
σ_y = 66.0 MPa
33.0
33.0
τ_máx
Y
R
τ_yz = 17.52 MPa
O
C
B
2θ_p
D
A
σ (MPa)
Z
σ_mín
σ_máx
σ_y
τ_yz
σ_máx
13.98°
σ_mín

Esfuerzos principales, planos principales y esfuerzo cortante máximo en *H*. Se dibuja el círculo de Mohr para los esfuerzos en el punto H

$$\tan 2\theta_p = \frac{17.52}{33.0} \qquad 2\theta_p = 27.96° \qquad \theta_p = 13.98° \blacktriangleleft$$
$$R = \sqrt{(33.0)^2 + (17.52)^2} = 37.4\text{ MPa} \qquad \tau_{\text{máx}} = 37.4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + R = 33.0 + 37.4 \qquad \sigma_{\text{máx}} = 70.4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - R = 33.0 - 37.4 \qquad \sigma_{\text{mín}} = -7.4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

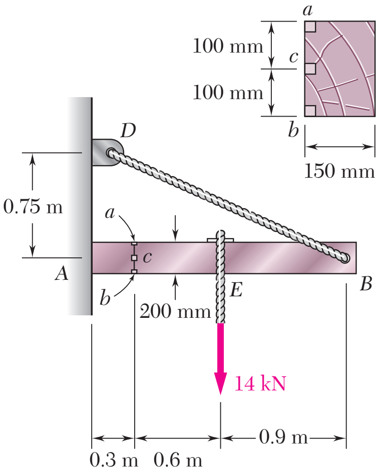

a
100 mm
c
100 mm
b
150 mm
D
0.75 m
a
c
A
b
200 mm
E
B
14 kN
0.3 m
0.6 m
0.9 m

Figura P8.31

8.31 La viga en voladizo *AB* tiene una sección transversal rectangular de 150 × 200 mm. Si se sabe que la tensión en el cable *BD* es de 10.4 kN y se desprecia el peso de la viga, determine los esfuerzos normal y cortante en los tres puntos indicados.

8.32 Se aplican dos fuerzas de 1.2 kip a un elemento de máquina *AB* en forma de L, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

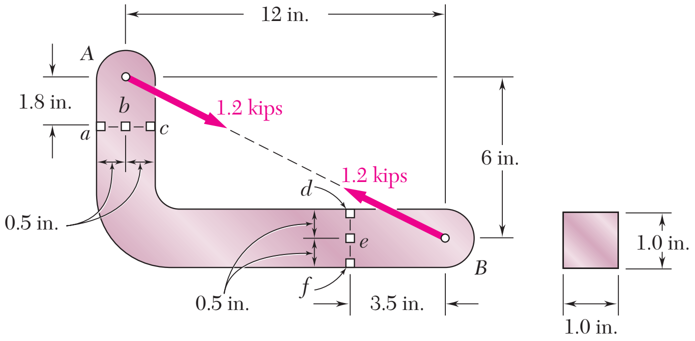

12 in.
A
1.8 in.
b
1.2 kips
a
c
6 in.
1.2 kips
d
0.5 in.
e
1.0 in.
B
f
0.5 in.
3.5 in.
1.0 in.

Figura P8.32 y P8.33

8.33 Se aplican dos fuerzas de 1.2 kip a un elemento de máquina *AB* en forma de L, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *d*, *b*) el punto *e*, *c*) el punto *f*.

8.34 a 8.36 El elemento *AB* tiene una sección transversal uniforme de 10 × 24 mm. Para la carga que se muestra en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

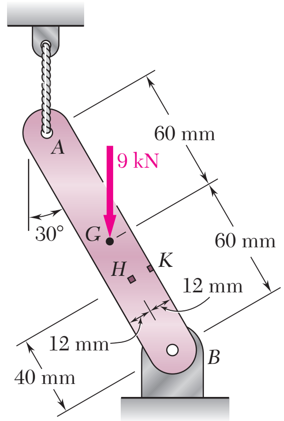

A
60 mm
9 kN
30°
G
60 mm
H
K
12 mm
12 mm
40 mm
B

Figura *P8.34*

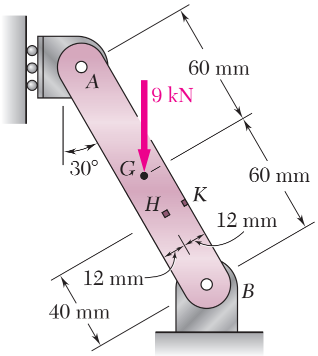

A
60 mm
9 kN
30°
G
60 mm
H
K
12 mm
12 mm
40 mm
B

Figura P8.35

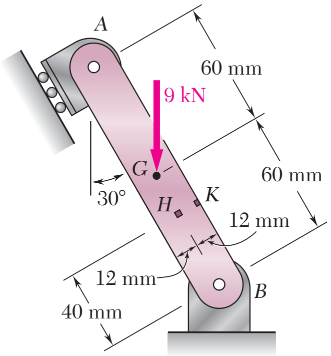

A
60 mm
9 kN
30°
G
60 mm
H
K
12 mm
12 mm
40 mm
B

Figura *P8.36*

8.37 Sobre el eje de un camión pequeño actúan las fuerzas y el par que se ilustran. Si se sabe que el diámetro del eje es de 1.42 in., determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *H* que se localiza encima del eje.

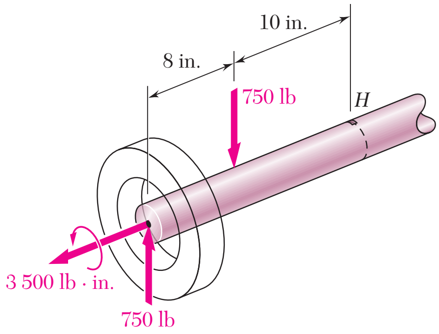

10 in.
8 in.
750 lb
H
3 500 lb · in.
750 lb

Figura P8.37

8.38 Una tira delgada se enrolla alrededor de una varilla sólida con radio $c = 20$ mm, como se muestra en la figura. Si se sabe que $l = 100$ mm y $F = 5$ kN, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

8.39 Sobre el ensamble de tubos que se muestra en la figura actúan varias fuerzas. Si cada sección de tubo tiene diámetros interior y exterior de 1.61 y 1.90 in., respectivamente, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

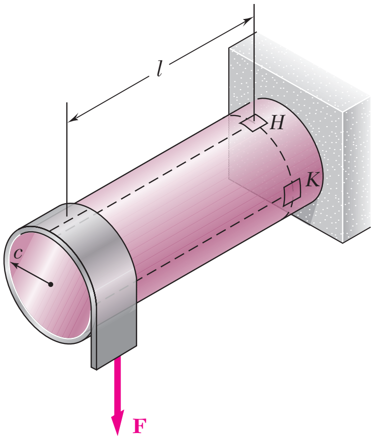


Figura P8.38

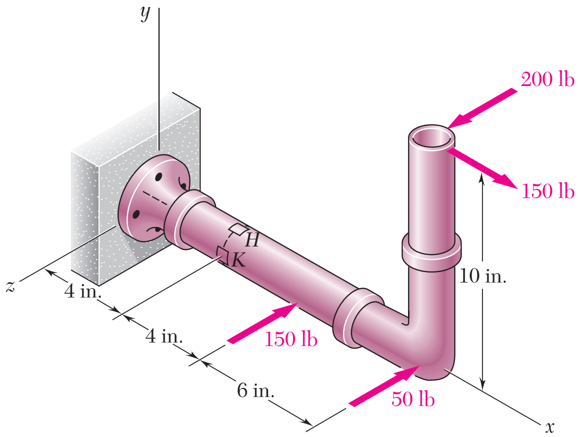

y
200 lb
150 lb
H
K
10 in.
z
4 in.
4 in.
150 lb
6 in.
50 lb
x

Figura *P8.39*

8.40 Se aplican dos fuerzas al tubo *AB* como se muestra en la figura. Si se sabe el tubo tiene un diámetro interior de 35 mm y un diámetro exterior de 42 mm, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

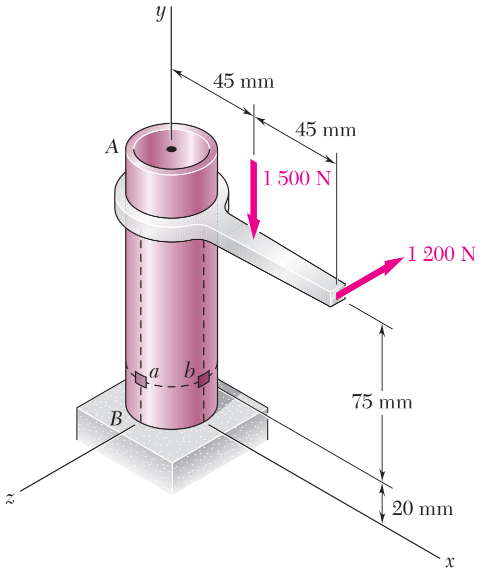

y
45 mm
45 mm
A
1 500 N
1 200 N
a
b
B
75 mm
z
20 mm
x

Figura P8.40

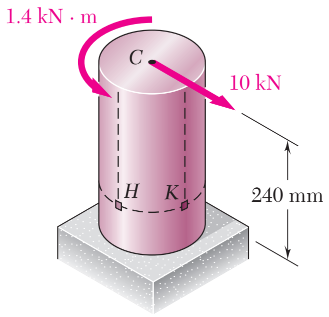

1.4 kN · m
C
10 kN
240 mm
H
K

Figura P8.41

8.41 Se aplica una fuerza de 10 kN y un par de 1.4 kN · m en la parte superior del poste de hierro fundido de 65 mm de diámetro que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

8.42 Se aplican tres fuerzas a una placa de 4 in. de diámetro unida al eje sólido *AB* de 1.8 in. de diámetro, determine *a*) los esfuerzos y planos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

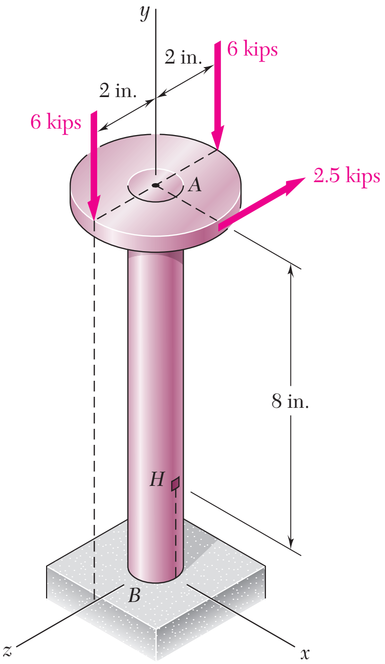

y
2 in.
6 kips
2 in.
6 kips
A
2.5 kips
8 in.
H
B
z
x

Figura P8.42

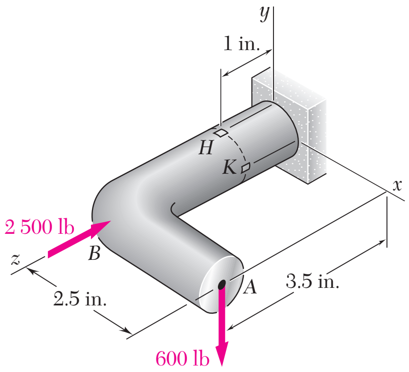

y
1 in.
H
K
x
2 500 lb
z
B
A
3.5 in.
2.5 in.
600 lb

Figura *P8.43*

8.43 Se aplican fuerzas en los puntos *A* y *B* del soporte de hierro que se observa en la figura. Si el soporte tiene un diámetro de 0.8 in., determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) en el punto *K*.

8.44 El tubo de acero *AB* tiene 72 mm de diámetro exterior y 5 mm de espesor de pared. Si se sabe que el brazo *CDE* está unido rígidamente al tubo, determine los esfuerzos y planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

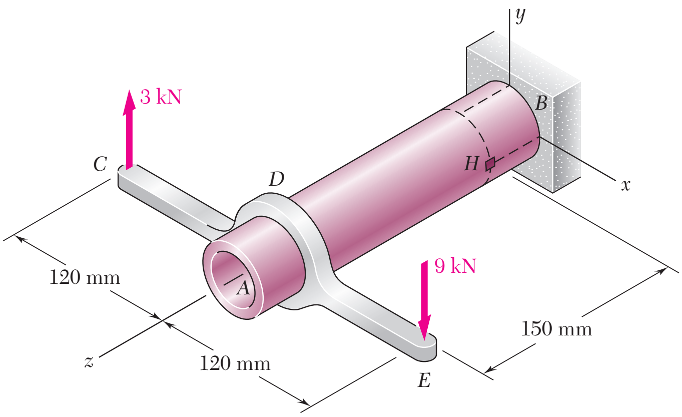

y
3 kN
B
C
H
D
x
120 mm
9 kN
A
150 mm
z
120 mm
E

Figura P8.44

8.45 Se aplican tres fuerzas a la barra mostrada en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

8.46 Retome el problema 8.45, y ahora suponga que $h = 12$ in.

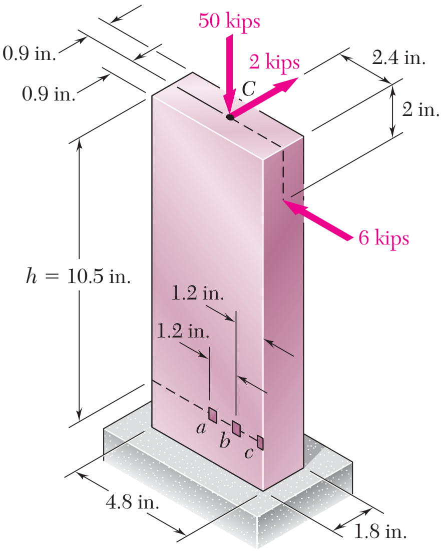

50 kips
2 kips
C
0.9 in.
0.9 in.
2.4 in.
2 in.
6 kips
h = 10.5 in.
1.2 in.
1.2 in.
a
b
c
4.8 in.
1.8 in.

Figura *P8.45*

8.47 Se aplican tres fuerzas a la barra que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*, *c*) el punto *c*.

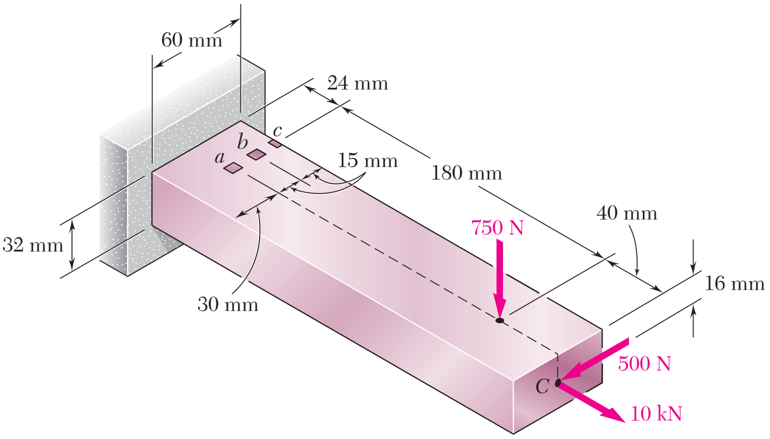

60 mm
24 mm
c
b
a
15 mm
180 mm
750 N
40 mm
16 mm
32 mm
30 mm
500 N
C
10 kN

Figura P8.47

8.48 Retome el problema 8.47, y ahora suponga que la fuerza de 750 N se dirige verticalmente hacia arriba.

8.49 Se aplican tres fuerzas al elemento de máquina *ABD* como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal que contiene al punto *H* es un rectángulo de 20 × 40 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

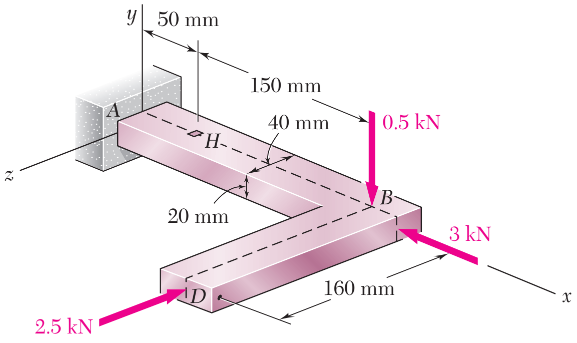

y
50 mm
150 mm
A
40 mm
0.5 kN
H
z
20 mm
B
3 kN
160 mm
x
D
2.5 kN

Figura P8.49

8.50 Retome el problema 8.49, y ahora suponga que la magnitud de la fuerza de 2.5 kN se incrementa a 10 kN.

8.51 Se aplican tres fuerzas sobre la viga en voladizo mostrada en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

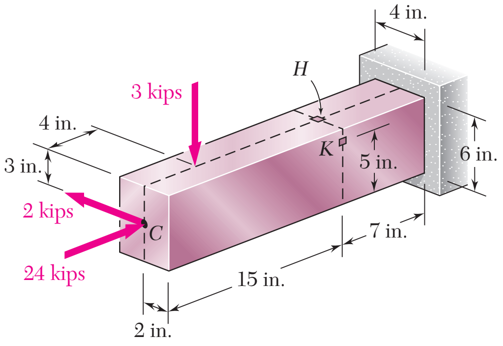

4 in.
H
3 kips
4 in.
3 in.
K
5 in.
6 in.
2 kips
C
24 kips
7 in.
15 in.
2 in.

Figura *P8.51*

8.52 Para la viga y las cargas del problema 8.51, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

8.53 Tres placas, cada una de 13 mm de espesor, se sueldan para formar una viga en voladizo. Para las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *a* y *b*.

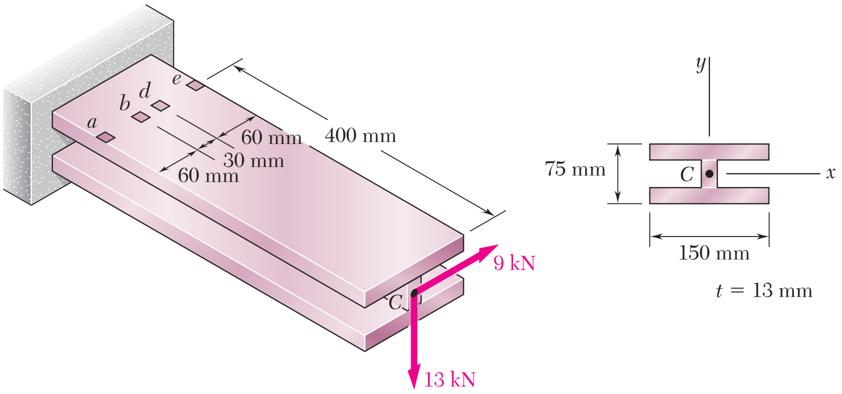

e
d
b
a
60 mm
400 mm
30 mm
60 mm
9 kN
C
13 kN
y
75 mm
C
x
150 mm
t = 13 mm

Figura P8.53 y *P8.54*

8.54 Tres placas de acero, cada una de 13 mm de espesor, se sueldan para formar una viga en voladizo. Para las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en los puntos *d* y *e*.

8.55 Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ en direcciones perpendiculares al eje longitudinal de una viga W12 × 40, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P}_1 =$ 5 kips y $\mathbf{P}_2 =$ 3 kips, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

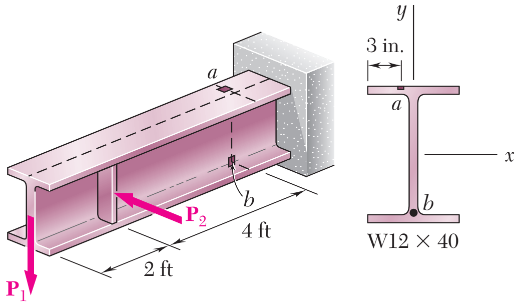


Figura P8.55 y P8.56

8.56 Se aplican dos fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ en direcciones perpendiculares al eje longitudinal de una viga W12 × 40, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P}_1 =$ 5 kips y $\mathbf{P}_2 =$ 3 kips, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

8.57 Se aplican cuatro fuerzas a una viga de acero laminado W200 × 41.7, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante en el punto *a*.

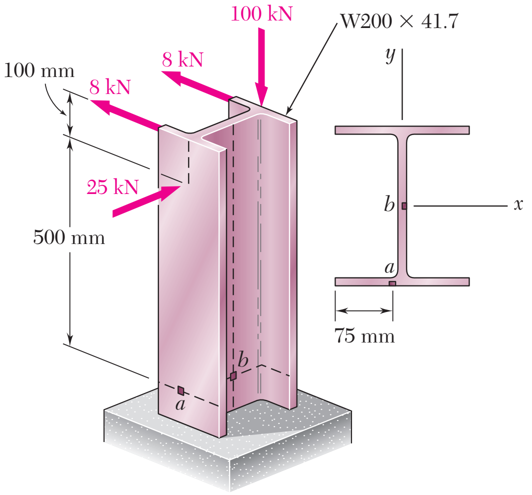


Figura P8.57 y *P8.58*

8.58 Se aplican cuatro fuerzas a una viga de acero laminado W200 × 41.7, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

8.59 Una fuerza **P** se aplica a una viga en voladizo por medio de un cable unido a un perno ubicado en el centro de su extremo libre. Si se sabe que **P** actúa en una dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga, determine *a*) el esfuerzo normal en el punto *a* en términos de *P, b, h, l* y β, *b*) los valores de β para los cuales el esfuerzo normal en *a* es cero.

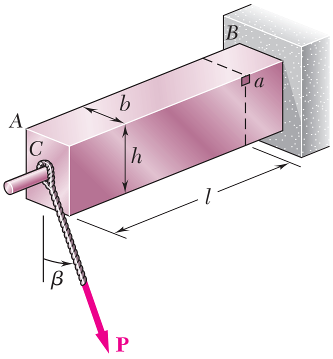


Figura *P8.59*

8.60 Se aplica una fuerza vertical **P** en el centro del extremo libre de una viga en voladizo *AB*. *a*) Si la viga se instala con el alma vertical ($\beta = 0$) y con su eje longitudinal *AB* en posición horizontal, determine la magnitud de la fuerza **P** para la cual el esfuerzo normal en el punto *a* es igual a +120 MPa. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que la viga se encuentra instalada con $\beta = 3°$.

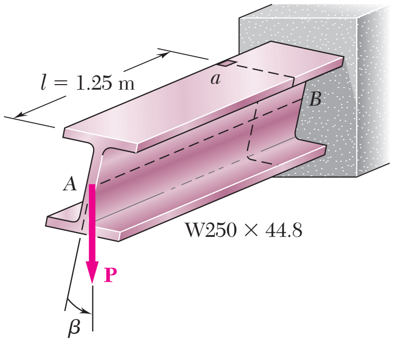


Figura P8.60

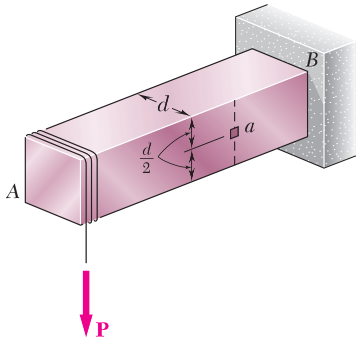


Figura *P8.61*

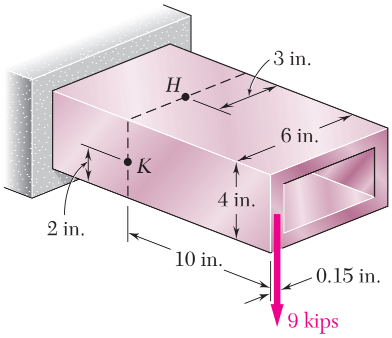


Figura P8.62

8.61 Se aplica una fuerza **P** de 5 kN a un alambre enrollado alrededor de la barra *AB*, como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal de la barra es un cuadrado cuyos lados miden $d = 40$ mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *a*.

8.62 Si el tubo estructural que se muestra en la figura tiene una pared con espesor uniforme de 0.3 in., determine los esfuerzos y planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en *a*) el punto *H*, *b*) el punto *K*.

8.63 El tubo estructural que se muestra en la figura tiene un espesor de pared uniforme de 0.3 in. Si se sabe que la carga de 15 kips se aplica 0.15 in. por encima de la base del tubo, determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

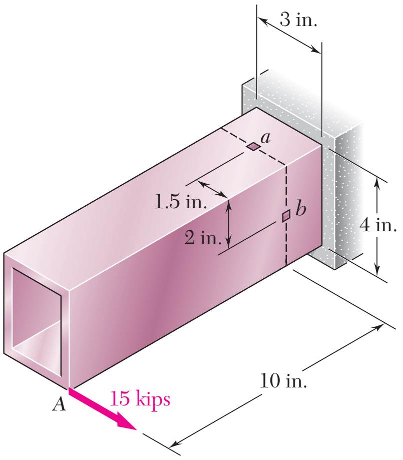


Figura *P8.63*

8.64 Para el tubo y la carga del problema 8.63, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *b*.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

En este capítulo se estudió el cálculo de los esfuerzos principales en vigas, ejes de transmisión y cuerpos de forma arbitraria sometidos a cargas combinadas.

Primero, en la sección 8.2 se recordaron las dos relaciones fundamentales deducidas en los capítulos 5 y 6 para el esfuerzo normal σ_x y el esfuerzo cortante τ_{xy} en cualquier punto dado de la sección transversal de una viga prismática,

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \tag{8.1, 8.2}$$

donde V = cortante en la sección
M = momento flector en la sección
y = distancia del punto a la superficie neutral
I = momento de inercia centroidal de la sección transversal
Q = primer momento respecto del eje neutral de la parte de la sección transversal que se localiza arriba del punto dado
t = ancho de la sección cruzada en el punto dado

Planos y esfuerzos principales en una viga

Usando uno de los métodos presentados en el capítulo 7 para la transformación de esfuerzos, fue posible obtener los planos y esfuerzos principales en el punto dado (figura 8.6).

Se investigó la distribución de los esfuerzos principales en una viga volada, angosta y rectangular sujeta a una carga **P** concentrada en su extremo libre, y se halló que en cualquier sección transversal, excepto en la vecindad del punto de aplicación de la carga, el máximo esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ no excedía al esfuerzo normal máximo σ_m que ocurre en la superficie de la viga.

Si bien esta conclusión sigue siendo válida para muchas vigas cuya sección transversal no es rectangular, no se cumple para vigas W o vigas S, en las que $\sigma_{\text{máx}}$ en las uniones b y d del perfil con las alas de la viga (figura 8.10) puede exceder el valor de σ_m que ocurre en los puntos a y e. Por lo anterior, el diseño de una viga de acero laminado debe incluir el cálculo del esfuerzo principal máximo en dichos puntos (véanse problemas modelo 8.1 y 8.2).

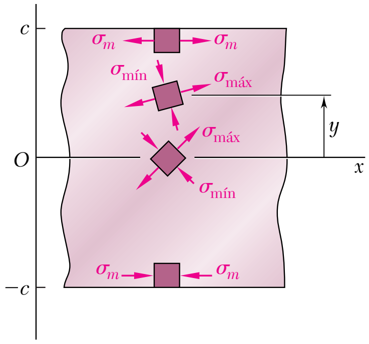


Figura 8.6

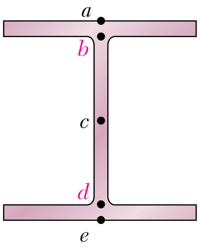


Figura 8.10

Diseño de ejes de transmisión bajo cargas transversales

En la sección 8.3 se consideró el diseño de *ejes de transmisión*, sometidos a *cargas transversales* así como a pares de torsión. Tomando en cuenta el efecto tanto de los esfuerzos normales debidos al momento flector M como de los esfuerzos cortantes debidos al par de torsión T, en cualquier sección transversal dada de un eje cilíndrico (sólido o hueco), se encontró que el valor mínimo permisible de la razón J/c de la sección transversal era

$$\frac{J}{C} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\text{máx}}}{\tau_{\text{perm}}} \tag{8.6}$$

Esfuerzos bajo condiciones generales de carga

En los capítulos anteriores, se aprendió a determinar los esfuerzos en elementos prismáticos, ocasionados por cargas axiales (capítulos 1 y 2), torsión (capítulo 3), flexión (capítulo 4), y cargas transversales (capítulos 5 y 6). En la segunda parte de este capítulo (sección 8.4), se combinaron estos conocimientos para calcular los esfuerzos en condiciones más generales de carga.

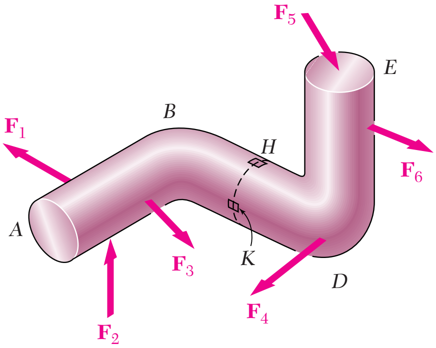


Figura 8.15

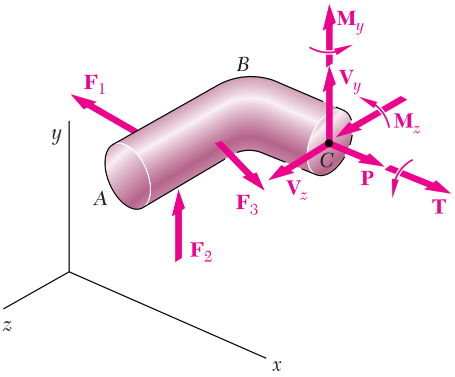


Figura 8.16

Por ejemplo, para determinar los esfuerzos en los puntos H o K del elemento doblado, como el que muestra la figura 8.15, se trazó una sección a través de dichos puntos y se reemplazó a las cargas aplicadas por un sistema equivalente de par de fuerzas en el centroide C de la sección (figura 8.16). Los esfuerzos normal y cortante que producen en H o K las fuerzas y pares ejercidos en C se calcularon y luego se combinaron para obtener los esfuerzos normal σ_x y cortante τ_{xy} resultantes y τ_{xz} en H o K. Finalmente, los esfuerzos principales, la orientación de los planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto H o en el K, se determinaron por alguno de los métodos presentados en el capítulo 7, a partir de los valores obtenidos de σ_x, τ_{xy} y τ_{xz}.

PROBLEMAS DE REPASO

8.65 *a*) Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi y $\tau_{\text{perm}} = 14.5$ ksi, seleccione el perfil de patín ancho más económico que debe usarse para sostener la carga que se muestra en la figura. *b*) Determine los valores que se esperan de σ_m, τ_m y el esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la junta del alma con el patín de la viga seleccionada.

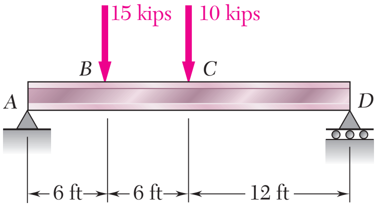

15 kips
10 kips
B
C
A
D
6 ft
6 ft
12 ft

Figura P8.65

8.66 La fuerza vertical $\mathbf{P}_1$ y la fuerza horizontal $\mathbf{P}_2$ se aplican a los discos soldados al eje sólido *AD*, según se ilustra en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje es de 40 mm y que $\tau_{\text{perm}} = 55$ MPa, determine la magnitud máxima permisible de la fuerza $\mathbf{P}_2$.

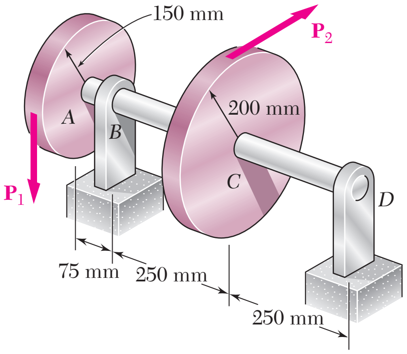

150 mm
P2
200 mm
A
B
P1
C
D
75 mm
250 mm
250 mm

Figura *P8.66*

8.67 El eje sólido *AB* gira a 360 rpm y transmite 20 kW desde el motor *M* a los elementos de máquina conectados a los engranes *E* y *F*. Si $\tau_{\text{perm}} = 45$ MPa y se supone que se extraen 10 kW en cada engrane, determine el diámetro mínimo permisible para el eje *AB*.

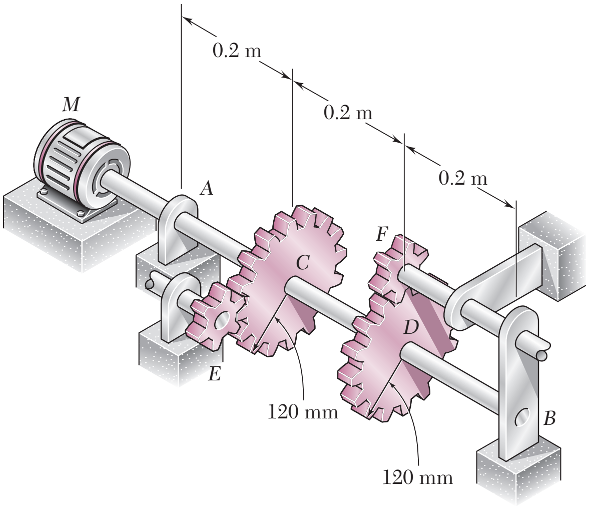

0.2 m
0.2 m
0.2 m
M
A
F
C
D
E
120 mm
120 mm
B

Figura P8.67

8.68 Para la ménsula y la carga que se muestran en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

8.69 El anuncio que se muestra en la figura pesa 8 000 lb y lo sostiene un tubo estructural de 15 in. de diámetro exterior y 0.5 in. de espesor de pared. En un momento en que la presión resultante del viento es de 3 kips, localizada en el centro *C* del anuncio, determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *H*.

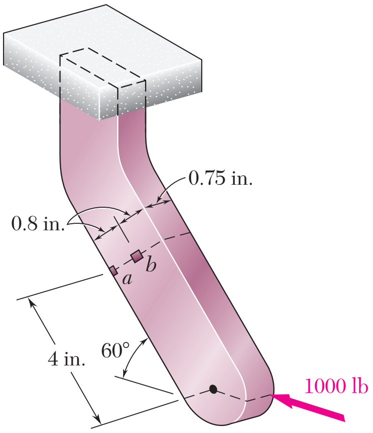

0.75 in.
0.8 in.
a
b
4 in.
60°
1000 lb

Figura *P8.68*

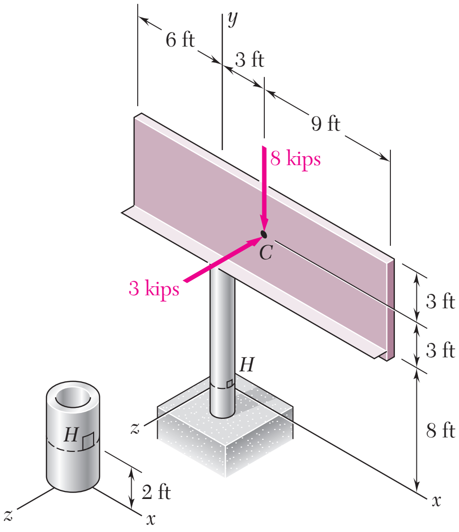

6 ft
y
3 ft
9 ft
8 kips
C
3 kips
3 ft
3 ft
H
H
z
8 ft
2 ft
z
x
x

Figura P8.69

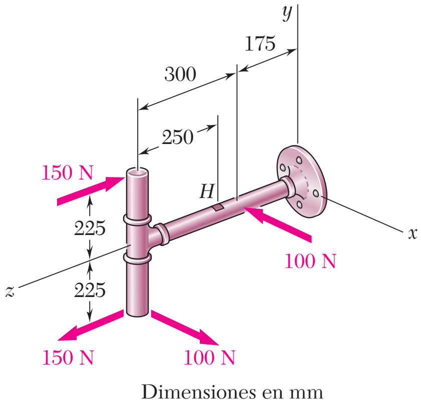

y
175
300
250
150 N
H
225
x
100 N
z
225
150 N
100 N
Dimensiones en mm

Figura *P8.70*

8.70 Sobre el ensamble de tubos que se muestra en la figura actúan varias fuerzas. Si se sabe que cada sección de tubo tiene diámetros interior y exterior de 36 y 42 mm, respectivamente, determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *H* que se localiza sobre la superficie exterior del tubo.

8.71 Un resorte en espiral cerrada está hecho con un alambre circular de radio *r* que a su vez forma una hélice de radio *R*. Determine el esfuerzo cortante máximo producido por las dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **P′**. (*Sugerencia*: Primero determine el cortante **V** y el par de torsión **T** en una sección transversal cruzada.)

8.72 Se aplica una fuerza vertical **P** de 250 N de magnitud sobre el punto *A* de la manivela. Si se sabe que el eje *BDE* tiene un diámetro de 18 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*, localizado en la parte superior del eje, 50 mm a la derecha del apoyo *D*.

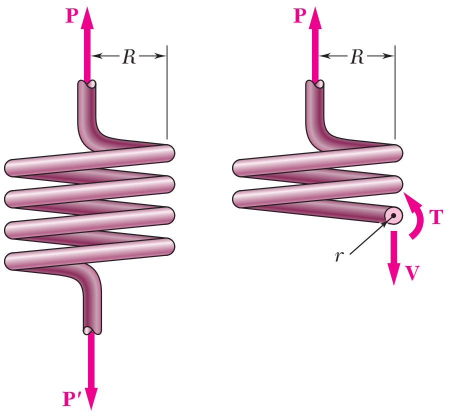


Figura P8.71

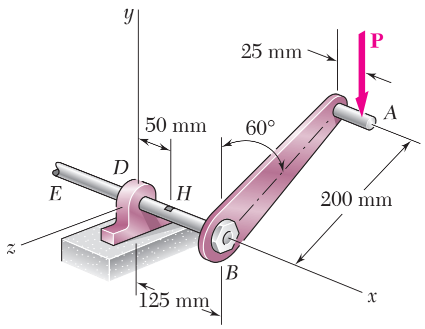

y
25 mm
P
A
50 mm
60°
D
E
H
200 mm
z
B
125 mm
x

Figura P8.72

8.73 Se aplica una fuerza de 2.8 kips al poste de hierro fundido *ABD* de 2.4 in. de diámetro que se muestra en la figura. Determine, para el punto *H*, *a*) los esfuerzos y planos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

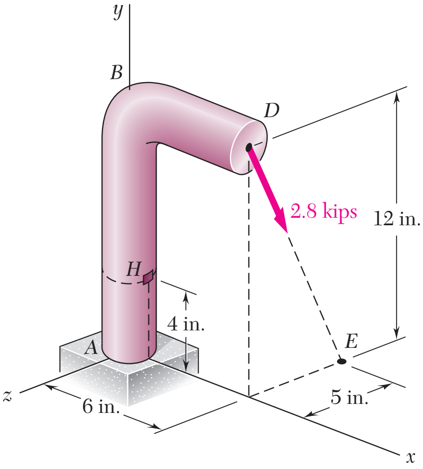

y
B
D
2.8 kips
12 in.
H
4 in.
A
E
z
6 in.
5 in.
x

Figura ***P8.73***

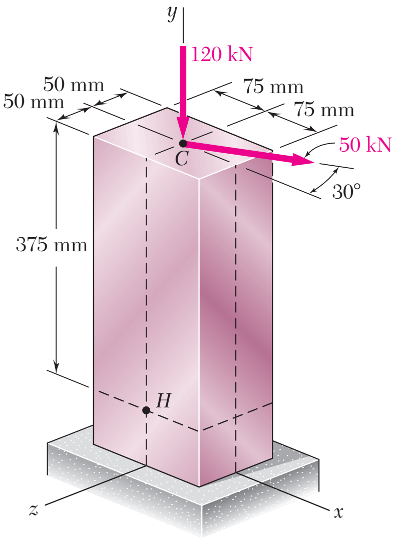

y
120 kN
50 mm
50 mm
75 mm
75 mm
50 kN
C
30°
375 mm
H
z
x

Figura P8.74

8.74 Para el poste y las cargas que se muestran en la figura, determine los esfuerzos principales, los planos principales, y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

8.75 Si se sabe que el tubo estructural mostrado en la figura tiene una pared de espesor uniforme de 0.25 in., determine los esfuerzos normal y cortante en los tres puntos indicados.

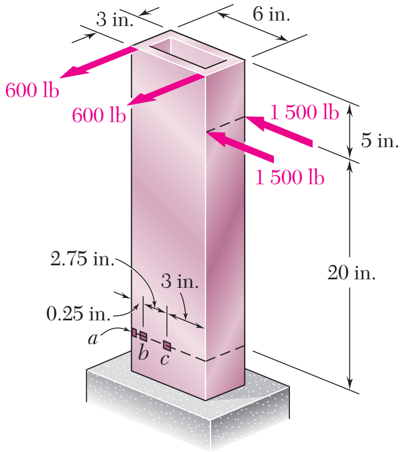

3 in.
6 in.
600 lb
600 lb
1 500 lb
1 500 lb
5 in.
20 in.
2.75 in.
3 in.
0.25 in.
a
b
c

Figura P8.75

8.76 La viga en voladizo *AB* se instalará de manera que el lado de 60 mm forme un ángulo β entre 0 y 90° con la vertical. Si se sabe que la fuerza vertical de 600 kN se aplica en el centro del extremo libre de la viga, determine el esfuerzo normal en el punto *a* cuando *a*) $\beta = 0$, *b*) $\beta = 90°$. *c*) También determine el valor de β para el cual el esfuerzo en el punto *a* es máximo y encuentre el valor correspondiente de dicho esfuerzo.

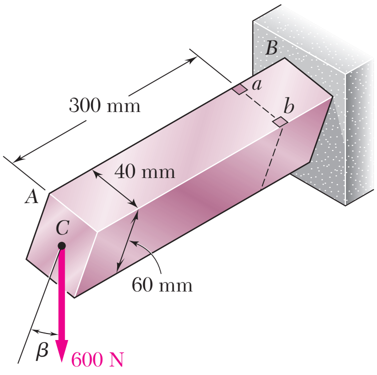

B
a
b
300 mm
40 mm
A
C
60 mm
β
600 N

Figura P8.76

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas fueron diseñados para resolverse con ayuda de una computadora.

8.C1 Suponga que el cortante V y el momento flector M han sido determinados en cierta sección de una viga de acero laminado. Escriba un programa para computadora que calcule en dicha sección, a partir de los datos disponibles en el apéndice C, *a*) el esfuerzo normal máximo σ_m, *b*) el esfuerzo principal $\sigma_{\text{máx}}$ en la unión del patín con el alma. Use el programa para resolver los incisos *a* y *b* de los siguientes problemas:

1) Problema 8.1 (utilice $V = 45$ kips y $M = 450$ kip · in.)
2) Problema 8.2 (utilice $V = 22.5$ kips y $M = 450$ kip · in.)
3) Problema 8.3 (utilice $V = 700$ kN y $M = 1\,750$ kN · m
4) Problema 8.4 (utilice $V = 850$ kN y $M = 1\,700$ kN · m)

8.C2 Una viga en voladizo AB con sección transversal rectangular de ancho b y profundidad $2c$ soporta una sola carga concentrada **P** en su extremo A. Escriba un programa para computadora que calcule, para cualesquiera valores de x/c y y/c, *a*) las razones $\sigma_{\text{máx}}/\sigma_m$ y $\sigma_{\text{mín}}/\sigma_m$, donde $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ son los esfuerzos principales en el punto $K(x, y)$ y σ_m es el esfuerzo normal máximo en la misma sección transversal, *b*) el ángulo θ_p que forman, en K, los planos principales con un plano transversal y otro horizontal que pasan por K. Use el programa para verificar los valores mostrados en la figura 8.8 y confirmar que $\sigma_{\text{máx}}$ excede σ_m si $x \leq 0.544c$, como se indica en la segunda nota al pie de la página 499.

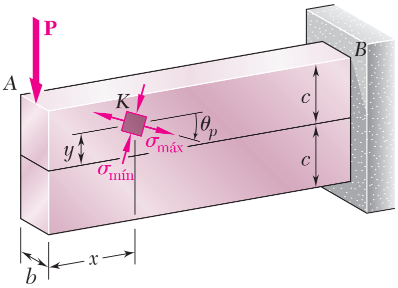


Figura P8.C2

8.C3 Los discos $D_1, D_2, \ldots, D_n$ están unidos, tal como se muestra en la figura 8.C3, al eje sólido AB de longitud L, diámetro uniforme d y esfuerzo cortante permisible τ_{perm}. Las fuerzas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ son de magnitud conocida (excepto una de ellas) y se aplican a los discos, ya sea arriba o debajo de su diámetro vertical, o a la izquierda o derecha de su diámetro horizontal. Si r_i denota el radio del disco D_i y c_i su distancia al apoyo situado en A, escriba un programa para computadora que permita calcular *a*) la magnitud de la fuerza desconocida $\mathbf{P}_i$, *b*) el valor mínimo permisible del diámetro d del eje AB. Utilice el programa para resolver el problema 8.18.

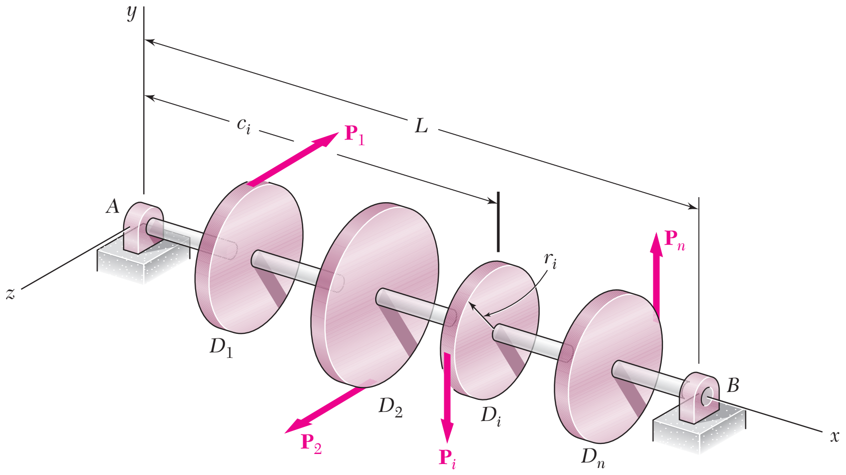


Figura P8.C3

8.C4 El eje sólido *AB* de longitud *L*, diámetro uniforme *d* y esfuerzo cortante permisible τ_{perm}, gira a una velocidad dada que se mide en rpm (figura P8.C4). Los engranes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ están unidos al eje y cada uno de ellos embona con otro engrane (que no se ilustra en la figura), ya sea arriba o debajo de su diámetro vertical, o a la izquierda o derecha de su diámetro horizontal. Uno de estos otros engranes se conecta a un motor y el resto a distintos elementos de máquinas. Si r_i denota el radio del engrane G_i, c_i su distancia al apoyo *A* y P_i la potencia transmitida a (signo $+$) o extraída (signo $-$) de dicho engrane, escriba un programa para computadora que calcule el valor más pequeño permisible del diámetro *d* del eje *AB*. Utilice el programa para resolver los problemas 8.25 y 8.27.

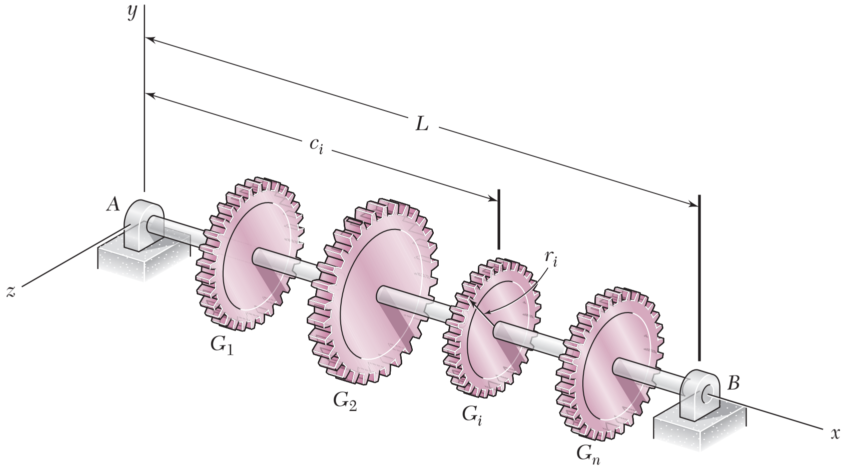


Figura P8.C4

8.C5 Escriba un programa para computadora que se pueda usar para calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos con coordenadas *y* y *z* dadas, localizados en la superficie de una parte de máquina con sección transversal rectangular. Considere que las fuerzas internas son equivalentes al sistema de par de fuerzas que se ilustra. Escriba el programa de manera tal que las cargas y dimensiones puedan expresarse tanto en unidades del SI como unidades estadounidenses habituales. Use el programa para resolver *a*) el problema 8.45*b*, *b*) el problema 8.47*a*.

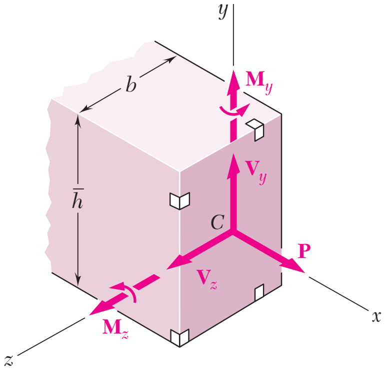


Figura P8.C5

8.C6 El elemento *AB* tiene sección transversal rectangular de 10 × 24 mm. Para la carga que se muestra en la figura, escriba un programa de cómputo que pueda utilizarse para calcular los esfuerzos normal y cortante en los puntos *H* y *K* para valores de *d* entre 0 y 120 mm, con incrementos de 15 mm. Emplee el programa para resolver el problema 8.35.

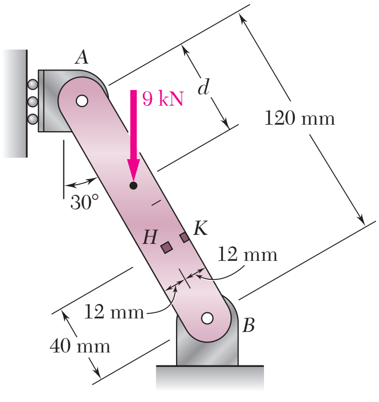


Figura P8.C6

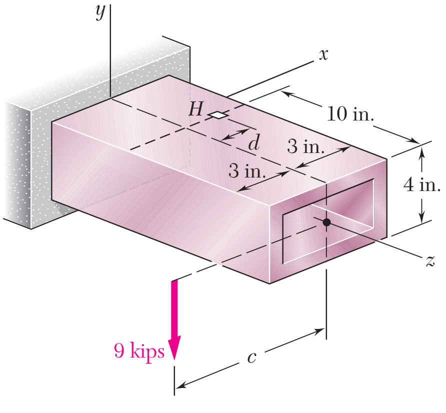


Figura P8.C7

***8.C7** El tubo estructural que se muestra en la figura tiene una pared de espesor uniforme de 0.3 in. Se aplica una fuerza de 9 kips a una barra (que no se ilustra) soldada al extremo del tubo. Escriba un programa para computadora que pueda usarse para determinar, para cualquier valor dado de *c*, los esfuerzos principales, planos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H* para valores de *d* entre −3 y 3 in., utilizando incrementos de 1 in. Use el programa para resolver el problema 8.62*a*.

CAPÍTULO

9

Deflexión de vigas

La fotografía muestra un puente con varias trabes durante su construcción. El diseño de las trabes de acero se basa tanto en consideraciones sobre su resistencia como en evaluaciones de su deflexión.

9.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se estudió el diseño de vigas para lograr su resistencia. En éste y en el siguiente se analizará otro aspecto del diseño de vigas: la determinación de la *deflexión*. El cálculo de la *deflexión máxima* de una viga bajo una carga dada es de interés particular, ya que las especificaciones de diseño incluyen generalmente un valor máximo admisible para la deflexión. También resulta de interés conocer las deflexiones para analizar las *vigas indeterminadas*. Éstas son vigas en las que el número de reacciones en los apoyos excede el número de las ecuaciones de equilibrio de que se dispone para determinar las incógnitas.

En la sección 4.4 se dijo que una viga prismática sometida a flexión pura se flexiona en forma de arco y que, dentro del rango elástico, la curvatura de la superficie neutra puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

siendo M el momento flector, E el módulo de elasticidad e I el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro.

Cuando una viga se somete a carga transversal, la ecuación (4.21) permanece válida para cualquier sección transversal, siempre que el principio de Saint-Venant sea aplicable. Sin embargo, el momento flector y la curvatura de la superficie neutra variarán en las diversas secciones. Si x es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, se tiene:

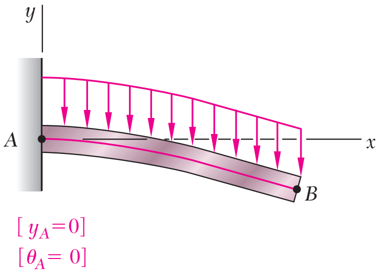
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

El conocimiento de la curvatura en varios puntos de la viga permitirá deducir algunas conclusiones generales con respecto a la deformación de la viga bajo carga (véase sección 9.2).

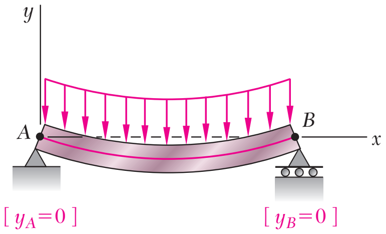
Para determinar la pendiente y la deflexión de la viga en cualquier punto, se deduce primero la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden que caracteriza a la *curva elástica* o forma de la viga deformada (véase sección 9.3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Si el momento flector se representa para todos los valores de x, por una sola expresión $M(x)$ como en el caso de vigas y cargas de la figura 9.1, la pendiente $\theta = dy/dx$ y la deflexión y en cualquier punto de la viga pueden obtenerse por dos integraciones sucesivas. Las dos constantes de integración introducidas en el punto se determinarán de las condiciones de frontera indicadas en la figura.



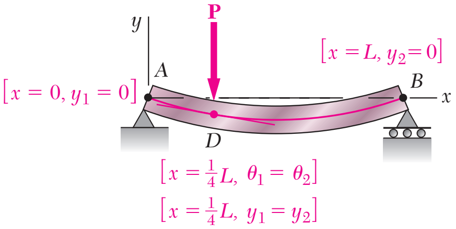
a) Viga volada



b) Viga simplemente soportada

Figura 9.1

Sin embargo, si se requieren diferentes funciones para representar el momento flector en varias porciones de la viga, se requerirán también diferentes ecuaciones diferenciales, que conducirán a distintas funciones para la curva elástica en las diversas porciones de la viga. En el caso de la viga de la figura 9.2, por ejemplo, se requieren dos ecuaciones diferenciales, una para la porción *AD* y otra para la *DB*. La primera produce las funciones θ_1 y y_1, y la segunda θ_2 y y_2. En suma deben determinarse cuatro constantes de integración: dos se obtendrán considerando que la deflexión es cero en *A* y en *B*; las otras dos, expresando que las porciones de viga *AD* y *DB* tienen igual pendiente y deflexión en *D*.



y
P
$[x = L, y_2 = 0]$
A
$[x = 0, y_1 = 0]$
B
x
D
$[x = \frac{1}{4}L, \theta_1 = \theta_2]$
$[x = \frac{1}{4}L, y_1 = y_2]$

Figura 9.2

En la sección 9.4 se observará que en el caso de una viga con carga distribuida $w(x)$, la curva elástica puede obtenerse directamente de $w(x)$ mediante cuatro integraciones sucesivas. Las constantes introducidas en este proceso se determinarán de los valores de V, M, θ y y.

En la sección 9.5 se estudiarán las *vigas estáticamente indeterminadas*, es decir, apoyadas de tal manera que las reacciones en los apoyos introducen cuatro o más incógnitas. Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio, éstas deben complementarse con ecuaciones deducidas de las condiciones límite impuestas por los apoyos.

El método antes descrito, para la determinación de la curvatura elástica cuando se requieren varias funciones para representar el momento flector M, puede ser muy laborioso, ya que requiere ajustar pendientes y ordenadas en cada punto de transición. En la sección 9.6 se estudiará que el uso de *funciones de singularidad* (analizadas en la sección 5.5) simplifica mucho el cálculo de θ y de y en un punto de la viga.

La siguiente parte del capítulo (secciones 9.7 y 9.8) se dedica al *método de superposición*, que consiste en determinar por separado la pendiente y deflexión causadas por diferentes cargas aplicadas a la viga, y luego sumarlas. Este método es más fácil usando la tabla del apéndice D, que muestra las pendientes y las deflexiones de las vigas para diversas cargas y tipos de apoyo.

En la sección 9.9 se usarán ciertas propiedades geométricas de la curva elástica para determinar la deflexión y pendiente de una viga en un punto dado. En lugar de expresar el momento flector como una función $M(x)$ e integrarla analíticamente, se dibujará el diagrama que representa la variación de M/EI a lo largo de la longitud de la viga y se deducirán dos teoremas del momento de área. El *primer teorema del momento de área* permitirá calcular el ángulo entre las tangentes de la viga en dos puntos; el *segundo teorema del momento de área* se usará para calcular la distancia vertical de un punto sobre la viga a la tangente en un segundo punto.

Los teoremas del momento de área se emplearán en la sección 9.10 para determinar la pendiente y deflexión en puntos seleccionados de vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas. En la sección 9.11 se encontrará que en muchos casos las áreas y momentos definidos por el diagrama M/EI pueden determinarse con más facilidad si se dibuja el *diagrama de momento flector por partes*. Como se estudió en el método de momento de área, se observará que este método es efectivo en el caso particular de *vigas de sección transversal variable*.

Las vigas con cargas asimétricas y vigas colgantes se estudiarán en la sección 9.12. Toda vez que para una carga asimétrica la deflexión máxima no ocurre en el centro de la viga, en la sección 9.13 se analizará con el fin de determinar la *deflexión máxima* cómo localizar el punto en el que la tangente es horizontal. La sección 9.14 se dedicará a la solución de problemas que involucran *vigas estáticamente indeterminadas*.

9.2 DEFORMACIÓN DE UNA VIGA BAJO CARGA TRANSVERSAL

Al comenzar este capítulo se recordó la ecuación (4.21) de la sección 4.4, que relaciona la curvatura de la superficie neutra con el momento flector en una viga sometida a flexión pura. Se anotó que esta ecuación es válida para cualquier sección transversal de una viga bajo carga transversal si rige el principio de Saint-Venant. Sin embargo, el momento flector y la curvatura variarán en las diversas secciones. Si x es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

Considere, por ejemplo, una viga en voladizo AB de longitud L sometida a una carga concentrada de $\mathbf{P}$ en su extremo libre A (figura 9.3*a*). Si se tiene que $M(x) = -Px$, y sustituyendo en (9.1),

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{Px}{EI}$$

la cual muestra que la curvatura de la superficie neutra varía linealmente con x, desde cero en A, donde ρ_A es infinito, hasta $-PL/EI$ en B, donde $|\rho_B| = EI/PL$ (figura 9.3*b*).

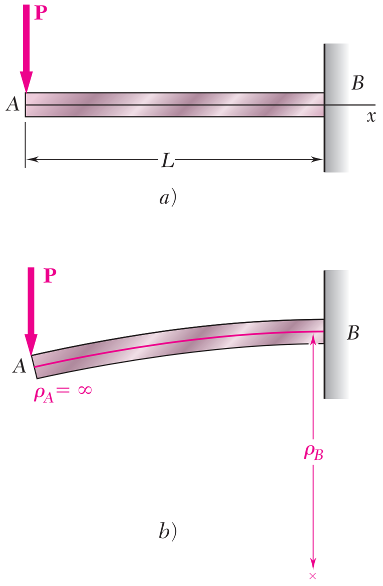


Figura 9.3

Considere ahora la viga AD de la figura 9.4*a*, que sostiene dos cargas concentradas, como se muestra. Del diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.4*b*) se tiene que las reacciones en los apoyos son $R_A = 1$ kN y $R_C = 5$ kN, respectivamente, y se dibuja el diagrama de momento flector correspondiente (figura 9.5*a*). Note que M y, por tanto, la curvatura se anulan en ambos extremos de la viga y también en un punto E situado en $x = 4$ m. Entre A y E el momento flector es positivo y la viga es cóncava hacia arriba; entre E y D el momento flector es negativo y la viga es cóncava hacia abajo

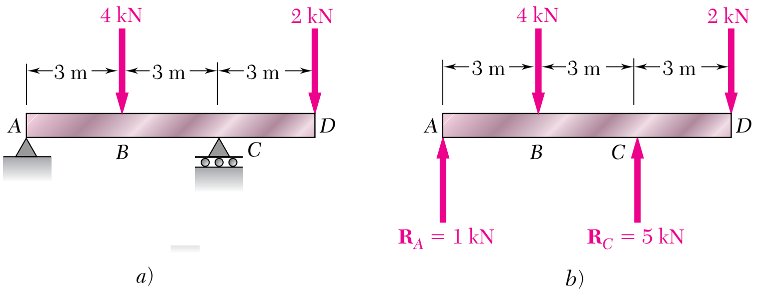


Figura 9.4

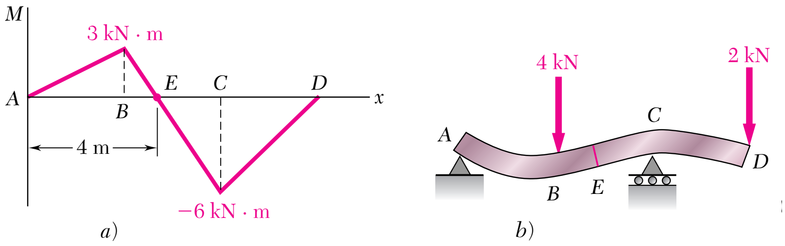


Figura 9.5

(figura 9.5*b*). Observe también que el máximo valor de la curvatura (es decir, el mínimo valor del radio de curvatura) ocurre en el apoyo *C*, donde $|M|$ es máximo.

De la información obtenida sobre su curvatura, se obtiene una buena idea sobre la forma de la viga deformada. No obstante, el análisis y diseño de la viga requieren información más precisa sobre la *deflexión* y la *pendiente* de la viga en varios puntos. De particular importancia es el conocimiento de la *deflexión máxima* de la viga. En la próxima sección se utilizará la ecuación (9.1) para obtener una relación entre la deflexión y, medida en un punto dado Q en el eje de la viga, y la distancia x de ese punto a algún origen fijo (figura 9.6). La relación obtenida es la ecuación de la *curva elástica*, es decir, la ecuación de la curva en la cual se convierte el eje de la viga, bajo la carga dada (figura 9.6*b*).†

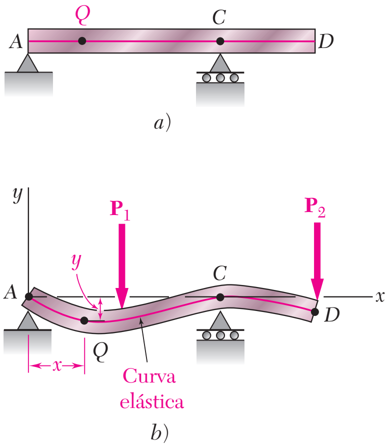


Figura 9.6

9.3 ECUACIÓN DE LA CURVA ELÁSTICA

Recuerde primero, del cálculo elemental, que la curvatura de una curva plana en un punto $Q(x,y)$ de la curva es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{9.2}$$

en donde dy/dx y d^2y/dx^2 son la primera y segunda derivadas de la función $y(x)$ representada por esa curva. Pero, en el caso de la curva elástica de una viga, la pendiente dy/dx es muy pequeña y su cuadrado es despreciable comparado con la unidad. Entonces:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9.3}$$

Sustituyendo por $1/\rho$ de (9.3) en (9.1), se tiene

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}} \tag{9.4}$$

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden; es la ecuación diferencial que gobierna la curva elástica.

---

† Debe notarse que, en este capítulo y el siguiente, y representa el desplazamiento vertical. En capítulos anteriores representaba la distancia de un punto dado, en una sección transversal al eje neutro de la sección.

El producto EI se conoce como la *rigidez a flexión* y si varía a lo largo de la viga, como en el caso de una viga de sección variable, debe expresársele como función de x antes de integrar la ecuación (9.4). Sin embargo, para una viga prismática, que es el caso considerado aquí, la rigidez a flexión es constante. Pueden multiplicarse ambos miembros de la ecuación (9.4) por EI e integrar en x. Se escribe

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

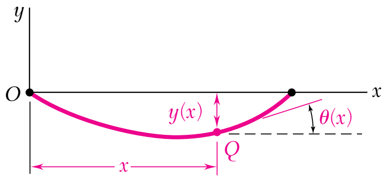


Figura 9.7

siendo C_1 una constante de integración. Si $\theta(x)$ es el ángulo en radianes que la tangente a la curva elástica forma con la horizontal en Q (figura 9.7), y recordando que este ángulo es pequeño, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \simeq \theta(x)$$

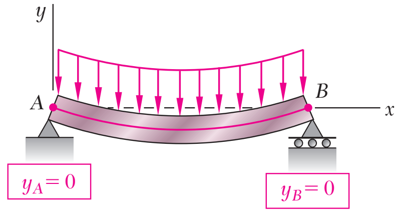
En consecuencia, la ecuación (9.5) puede escribirse en la forma alternativa

$$EI\,\theta(x) = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5$'$}$$

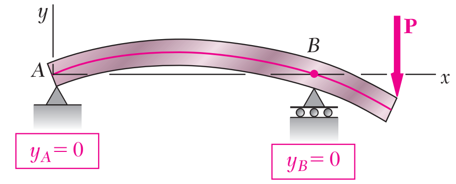
Integrando los dos miembros de la ecuación (9.5) en x, se tiene

$$EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x)\,dx + C_1\right]dx + C_2$$

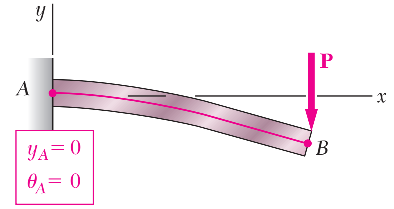
$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$



a) Viga simplemente soportada



b) Viga de un tramo en voladizo



c) Viga en voladizo

Figura 9.8 Condiciones de frontera para vigas estáticamente determinadas.

en donde C_2 es una segunda constante y el primer término del miembro derecho es la función de x obtenida integrando dos veces en x el momento flector $M(x)$. Si no fuera porque C_1 y C_2 permanecen indeterminadas, la ecuación (9.6) definiría la deflexión de la viga en cualquier punto dado Q y la ecuación (9.5) o la (9.5′) definirían del mismo modo la pendiente de la viga en Q.

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las *condiciones de frontera* o, dicho con mayor precisión, de las condiciones impuestas en la viga por sus apoyos. Limitando al análisis en esta sección a *vigas estáticamente determinadas*, es decir, a vigas apoyadas de tal manera que las reacciones pueden obtenerse por estática, observe que aquí puedan considerarse tres tipos de vigas (figura 9.8): *a*) la *viga simplemente apoyada*, *b*) la *viga de un tramo en voladizo* y *c*) la *viga en voladizo*.

En los primeros dos casos, los apoyos son fijos en A y móviles en B y todos requieren que la deflexión sea cero. Haciendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ en la ecuación (9.6) y luego $x = x_B$, $y = y_B = 0$ en la misma, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para C_1 y C_2. En el caso del voladizo (figura 9.8*c*), se nota que tanto la pendiente como la deflexión en A deben ser cero. Haciendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ en la ecuación (9.6) y, $x = x_A$, $\theta = \theta_A = 0$ en la ecuación (9.5′) se obtienen de nuevo dos ecuaciones que pueden resolverse para C_1 y C_2.

EJEMPLO 9.01

La viga en voladizo AB es de sección transversal uniforme y soporta una carga $\mathbf{P}$ en su extremo libre A (figura 9.9). Halle la ecuación de la curva elástica y la deflexión y pendiente en A.

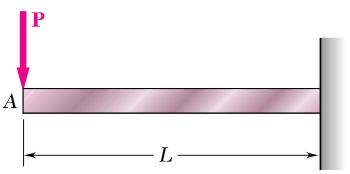


Figura 9.9

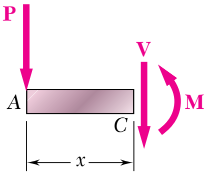


Figura 9.10

Usando el diagrama de cuerpo libre de la porción AC de la viga (figura 9.10) en donde C está a una distancia x del extremo A, se tiene

$$M = -Px \tag{9.7}$$

Sustituyendo M en la ecuación 9.4 y multiplicando por EI,

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

Integrando en x,

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + C_1 \tag{9.8}$$

Se observa ahora que en el extremo fijo B se tiene $x = L$ y $\theta = dy/dx = 0$ (figura 9.11). Sustituyendo estos valores (9.8) y despejando C_1, se tiene,

$$C_1 = \tfrac{1}{2}PL^2$$

que se reemplaza en (9.8):

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + \tfrac{1}{2}PL^2 \tag{9.9}$$

Integrando ambos miembros de (9.9),

$$EI\,y = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x + C_2 \tag{9.10}$$

Pero en B se tiene $x = L$, $y = 0$. Sustituyendo en (9.10),

$$0 = -\tfrac{1}{6}PL^3 + \tfrac{1}{2}PL^3 + C_2$$
$$C_2 = -\tfrac{1}{3}PL^3$$

Llevando este valor de C_2 a la ecuación (9.10) se obtiene la ecuación de la curva elástica:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x - \tfrac{1}{3}PL^3$$

o

$$y = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \tag{9.11}$$

La deflexión y la pendiente en A se obtiene haciendo $x = 0$ en las ecuaciones (9.11) y (9.9). Se halla que

$$y_A = -\frac{PL^3}{3EI} \qquad \text{y} \qquad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

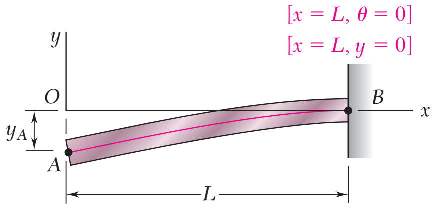


Figura 9.11

EJEMPLO 9.02

La viga prismática simplemente apoyada AB soporta una carga uniformemente distribuida w por unidad de longitud (figura 9.12). Halle la ecuación de la curva elástica y la deflexión máxima.

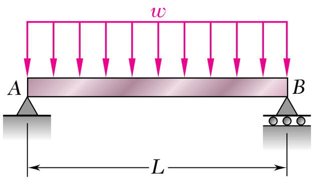


Figura 9.12

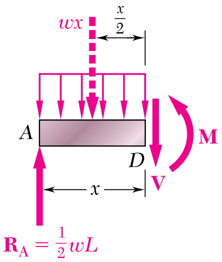


Figura 9.13

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción AD de la viga (figura 9.13) y tomando momentos con respecto a D, se encuentra que

$$M = \tfrac{1}{2}wLx - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{9.12}$$

Sustituyendo a M en la ecuación (9.4) y multiplicando ambos miembros por EI,

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \tag{9.13}$$

Integrando dos veces en x,

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_1 \tag{9.14}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_1x + C_2 \tag{9.15}$$

Observando que $y = 0$ en ambos extremos de la viga (figura 9.14), primero se hace $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación (9.15) y se obtiene $C_2 = 0$. Luego $x = L$ y $y = 0$ en la misma ecuación y se escribe

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_1L$$
$$C_1 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Llevando los valores de C_1 y C_2 a la ecuación (9.15) se obtiene la ecuación de la curva elástica.

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{12}wLx^3 - \tfrac{1}{24}wL^3x$$

o

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (9.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (9.14) el valor de C_1, se verifica que la pendiente de la viga es cero para $x = L/2$ y que la curva elástica tiene un mínimo en el punto medio C de la viga (figura 9.15). Haciendo $x = L/2$ en la ecuación (9.16),

$$y_C = \frac{w}{24EI}\left(-\frac{L^4}{16} + 2L\frac{L^3}{8} - L^3\frac{L}{2}\right) = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

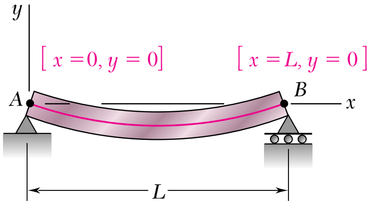


Figura 9.14

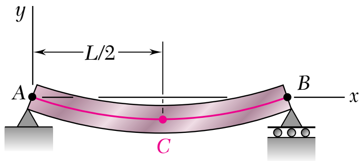


Figura 9.15

La deflexión máxima o, más exactamente, el máximo valor absoluto de la deflexión es:

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

Figura 9.16 Se requiere una función $M(x)$ diferente en cada parte de los brazos volados.

En los dos ejemplos considerados, sólo fue necesario un diagrama de cuerpo libre para determinar el momento flector en la viga. En consecuencia, sólo se utilizó una función de x para representar a M a lo largo de la viga. Esto, generalmente, no es el caso. Las cargas concentradas, las reacciones en los apoyos o las discontinuidades en una carga distribuida dividirán la viga en varias porciones y representarán el momento por una función diferente $M(x)$ en cada una de dichas porciones (figura 9.16). Cada función $M(x)$ conducirá a una expresión diferente para la pendiente $\theta(x)$ y para la deflexión $y(x)$. Como cada expresión para la deflexión debe contener dos constantes de integración, deben determinarse numerosas constantes. Como se estudiará en el próximo ejemplo, las condiciones adicionales de frontera requeridas pueden obtenerse observando que aunque la fuerza cortante y el momento flector pueden ser discontinuos en varios puntos de una viga, la *deflexión* y la *pendiente* de la viga *no pueden ser discontinuas* en ningún punto.

EJEMPLO 9.03

Para la viga prismática y la carga mostradas (figura 9.17) determine la pendiente y la deflexión en el punto D.

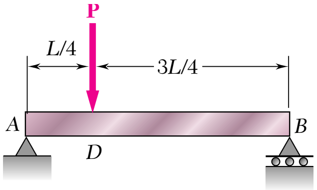


Figura 9.17

Debe dividirse la viga en dos porciones, AD y DB, y hallar la función $y(x)$ que define la curva elástica para cada una de ellas.

1. De *A* a *D* ($x < L/4$). Dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga *AE* de longitud $x < L/4$ (figura 9.18). Tomando momentos con respecto a *E*, se tiene

$$M_1 = \frac{3P}{4}x \tag{9.17}$$

o, de la ecuación (9.4)

$$EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{3}{4}Px \tag{9.18}$$

en donde $y_1(x)$ es la función que define la curva elástica *para la porción AD de la viga*. Integrando en x,

$$EI\,\theta_1 = EI\frac{dy_1}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 + C_1 \tag{9.19}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^3 + C_1x + C_2 \tag{9.20}$$

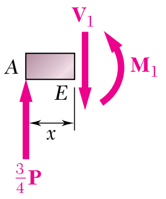


Figura 9.18

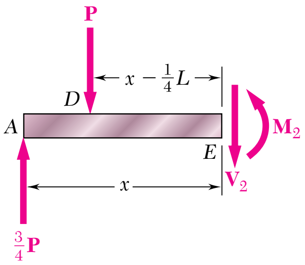


Figura 9.19

2. De *D* a *B* ($x > L/4$). Ahora dibuje el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga *AE* de longitud $x > L/4$ (figura 9.19) y escriba

$$M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) \tag{9.21}$$

o, de la ecuación (9.4), reordenando términos,

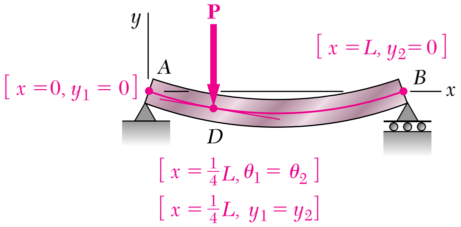
$$EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{1}{4}Px + \frac{1}{4}PL \tag{9.22}$$

en donde $y_2(x)$ define la curva elástica *para la porción DB de la viga*. Integrando en x,

$$EI\,\theta_2 = EI\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{8}Px^2 + \frac{1}{4}PLx + C_3 \tag{9.23}$$

$$EI\,y_2 = -\frac{1}{24}Px^3 + \frac{1}{8}PLx^2 + C_3x + C_4 \tag{9.24}$$

Cálculo de las constantes de integración. Las condiciones que deben satisfacer las constantes de integración se resumen en la figura 9.20. En el apoyo *A*, en donde la deflexión se define mediante la ecuación (9.20), deben tenerse $x = 0$ y $y_1 = 0$. En el apoyo *B*, donde la deflexión la da la ecuación (9.24), debe tenerse $x = L$ y $y_2 = 0$. También, puesto que no debe haber cambio en la deflexión o en la pendiente en el punto *D*, se sigue que $y_1 = y_2$ y $\theta_1 = \theta_2$ en $x = L/4$. Se tiene entonces



y
P
$[\,x = L,\ y_2 = 0\,]$
A
B
x
$[\,x = 0,\ y_1 = 0\,]$
D
$[\,x = \frac{1}{4}L,\ \theta_1 = \theta_2\,]$
$[\,x = \frac{1}{4}L,\ y_1 = y_2\,]$

Figura 9.20

$[x = 0,\ y_1 = 0]$, ecuación (9.20): $\quad 0 = C_2 \qquad (9.25)$

$[x = L,\ y_2 = 0]$, ecuación (9.24): $\quad 0 = \frac{1}{12}PL^3 + C_3L + C_4 \qquad (9.26)$

$[x = L/4,\ \theta_1 = \theta_2]$, ecuaciones (9.19) y (9.23):

$$\frac{3}{128}PL^2 + C_1 = \frac{7}{128}PL^2 + C_3 \tag{9.27}$$

$[x = L/4,\ y_1 = y_2]$, ecuaciones (9.20) y (9.24):

$$\frac{PL^3}{512} + C_1\frac{L}{4} = \frac{11PL^3}{1\,536} + C_3\frac{L}{4} + C_4 \tag{9.28}$$

Resolviendo estas ecuaciones,

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128},\ C_2 = 0,\ C_3 = -\frac{11PL^2}{128},\ C_4 = \frac{PL^3}{384}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en las ecuaciones (9.19) y (9.20), se tiene para $x \le L/4$,

$$EI\,\theta_1 = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \tag{9.29}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{7PL^2}{128}x \tag{9.30}$$

Haciendo $x = L/4$ en cada una de estas ecuaciones, se halla que la pendiente y la deflexión en *D* son, respectivamente,

$$\theta_D = -\frac{PL^2}{32EI} \qquad \text{y} \qquad y_D = -\frac{3PL^3}{256EI}$$

Note que como $\theta_D \neq 0$, la deflexión en *D* *no* es la máxima de la viga.

*9.4 DETERMINACIÓN DIRECTA DE LA CURVA ELÁSTICA A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

En la sección 9.3 se estudió que la ecuación de la curva elástica puede obtenerse integrando dos veces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

siendo $M(x)$ el momento flector de la viga. Recuerde, de la sección 5.3, que cuando una viga soporta una carga $w(x)$, se tiene $dM/dx = V$ y $dV/dx = -w$ en cualquier punto de la viga. Derivando la ecuación (9.4) con respecto a x y suponiendo a EI constante,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \tag{9.31}$$

y derivando de nuevo,

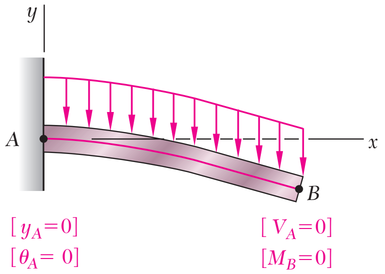
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = -\frac{w(x)}{EI}$$

Se concluye que cuando una viga prismática soporta una carga distribuida $w(x)$, su curva elástica obedece a la ecuación diferencial lineal de cuarto orden

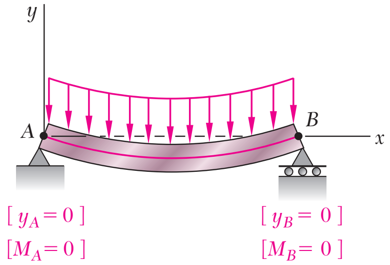
$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \tag{9.32}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (9.32) por la constante EI e integrando cuatro veces:

$$\begin{aligned}
EI\frac{d^4y}{dx^4} &= -w(x) \\
EI\frac{d^3y}{dx^3} &= V(x) = -\int w(x)\,dx + C_1 \\
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= M(x) = -\int dx \int w(x)\,dx + C_1x + C_2 \qquad (9.33) \\
EI\frac{dy}{dx} &= EI\,\theta(x) = -\int dx \int dx \int w(x)\,dx + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \\
EI\,y(x) &= -\int dx \int dx \int dx \int w(x)\,dx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4
\end{aligned}$$



a) Viga en voladizo



b) Viga simplemente soportada

Figura 9.21 Condiciones de frontera para vigas que soportan cargas distribuidas.

Las cuatro constantes de integración se determinan de las condiciones de frontera. Éstas incluyen: *a*) las condiciones impuestas en la deflexión o pendiente de la viga por sus apoyos (véase la sección 9.3) y *b*) la condición de que tanto *V* como *M* deben ser cero en el extremo libre de una viga en voladizo o que el momento flector debe ser cero en ambos extremos de una viga simplemente apoyada (véase sección 5.3). Esto se ilustra en la figura 9.21.

El método aquí presentado puede usarse eficientemente en voladizos o vigas simples con cargas distribuidas. En el caso de vigas con dos apoyos y voladizo, sin embargo, las reacciones en los apoyos causarán discontinuidades en la fuerza cortante, es decir, en la tercera derivada de *y*, y se requerirán diferentes funciones para definir la curva elástica en toda la viga.

EJEMPLO 9.04

La viga prismática simplemente apoyada *AB* soporta una carga uniformemente distribuida *w* por unidad de longitud (figura 9.22). Determine la ecuación de la curva elástica y la deflexión máxima. (Ésta es la misma viga del ejemplo 9.02.)

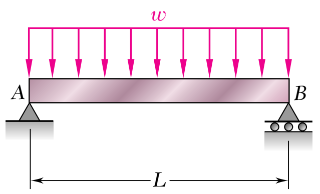


Figura 9.22

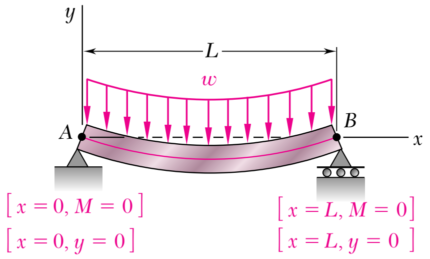


Figura 9.23

Como w = constante, las primeras tres de las ecuaciones (9.33) dan:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.34)$$

Puesto que las condiciones de frontera exigen que $M = 0$ en ambos extremos de la viga (figura 9.23), se hace primero $x = 0$ y $M = 0$ en la ecuación (9.34) y se obtiene $C_2 = 0$. Después se hace $x = L$ y $M = 0$ en la misma ecuación, para obtener $C_1 = \frac{1}{2}wL$.

Llevando los valores de C_1 y C_2 a la ecuación (9.34) e integrando dos veces:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \qquad (9.35)$$

Pero las condiciones de frontera también requieren que $y = 0$ en ambos extremos de la viga. Si $x = 0$, y $y = 0$ en la ecuación (9.35), se obtiene $C_4 = 0$; haciendo $x = L$ y $y = 0$ en la ecuación, se escribe

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_3L$$

$$C_3 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Llevando los valores de C_3 y C_4 a la ecuación (9.35) y dividiendo ambos miembros entre EI, se obtiene la ecuación de la curva elástica

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (9.36)$$

El valor de la máxima deflexión se obtiene haciendo $x = L/2$ en la ecuación (9.36). Se tiene

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

9.5 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

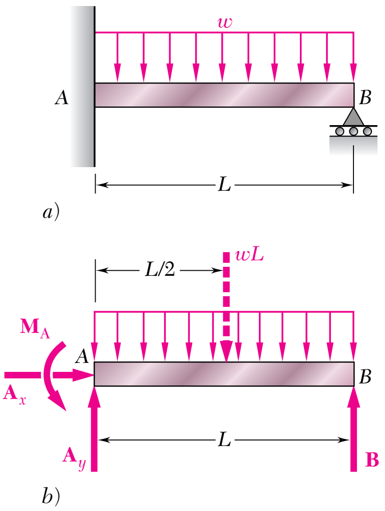


Figura 9.24

En las secciones anteriores, el análisis se limitó a vigas estáticamente determinadas. Considere ahora la viga prismática AB (figura 9.24*a*) empotrada en A y con apoyo sobre rodillos en B. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.24*b*), se observa que las reacciones incluyen cuatro incógnitas, con sólo tres ecuaciones de equilibrio disponibles, a saber

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{9.37}$$

Como sólo A_x puede determinarse mediante estas ecuaciones, se dice que la viga es *estáticamente indeterminada*.

Sin embargo, recuerde, de los capítulos 2 y 3, que en un problema estáticamente indeterminado pueden obtenerse las reacciones considerando las *deformaciones* de la estructura incluida. Por tanto, debe procederse con el cálculo de la pendiente y la deformación a lo largo de la viga. Siguiendo el método de la sección 9.3, el momento $M(x)$ en cualquier punto de AB se expresa en función de la distancia x desde A, la carga dada y las reacciones desconocidas. Integrando en x, se obtienen expresiones para θ y y que contienen dos incógnitas adicionales, llamadas las constantes de integración C_1 y C_2. Pero hay seis ecuaciones disponibles para hallar las reacciones y las constantes C_1 y C_2; son las tres ecuaciones de equilibrio (9.37) y las tres ecuaciones que expresan que las condiciones de frontera se satisfacen, es decir, que la pendiente y deflexión en A son nulas y que la deflexión en B es cero (figura 9.25). En consecuencia, las reacciones en los apoyos y la ecuación de la curva elástica pueden determinarse.

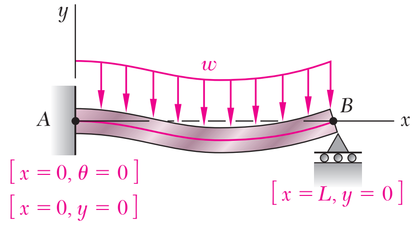


Figura 9.25

EJEMPLO 9.05

Determine las reacciones en los apoyos para la viga prismática de la figura 9.24*a*.

Ecuaciones de equilibrio. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.24*b*, se tiene

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: && A_x = 0 \\ &+\uparrow \Sigma F_y = 0: && A_y + B - wL = 0 \qquad (9.38) \\ &+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: && M_A + BL - \tfrac{1}{2}wL^2 = 0 \end{aligned}$$

Ecuación de la curva elástica. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga AC (figura 9.26), se escribe

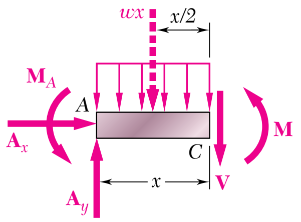


Figura 9.26

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad M + \tfrac{1}{2}wx^2 + M_A - A_y x = 0 \tag{9.39}$$

Resolviendo la ecuación (9.39) para M y llevando este valor a la ecuación (9.4),

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + A_y x - M_A$$

Integrando en x,

$$EI\,\theta = EI\,\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}A_y x^2 - M_A x + C_1 \qquad (9.40)$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (9.41)$$

Refiriéndose a las condiciones de frontera de la figura 9.25, se hacen $x = 0, \theta = 0$ en la ecuación (9.40), $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (9.41) y se concluye que $C_1 = C_2 = 0$. Así, la ecuación (9.41) puede formularse como sigue:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}A_y x^3 - \tfrac{1}{2}M_A x^2 \qquad (9.42)$$

Pero la tercera condición de frontera requiere que $y = 0$ para $x = L$. Llevando estos valores a la ecuación (9.42),

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{6}A_y L^3 - \tfrac{1}{2}M_A L^2$$

o

$$3M_A - A_y L + \tfrac{1}{4}wL^2 = 0 \qquad (9.43)$$

Resolviendo esta ecuación simultáneamente con las tres ecuaciones de equilibrio (9.38), se obtienen las reacciones en los apoyos:

$$A_x = 0 \qquad A_y = \tfrac{5}{8}wL \qquad M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad B = \tfrac{3}{8}wL$$

En el ejemplo anterior había una reacción redundante, es decir, una reacción adicional a las que se obtendrían por equilibrio. La viga es *estáticamente indeterminada de primer grado*. Otro ejemplo similar es el del problema modelo 9.3. Si los apoyos de la viga son tales que dos reacciones son redundantes (figura 9.27*a*), se dice que ésta es *indeterminada de segundo grado*. Aunque ahora hay cinco reacciones desconocidas (figura 9.27*b*), se halla que cuatro pueden obtenerse de las condiciones de frontera (figura 9.27*c*). Así, en total hay siete ecuaciones simultáneas para determinar las cinco reacciones y las dos constantes de integración.

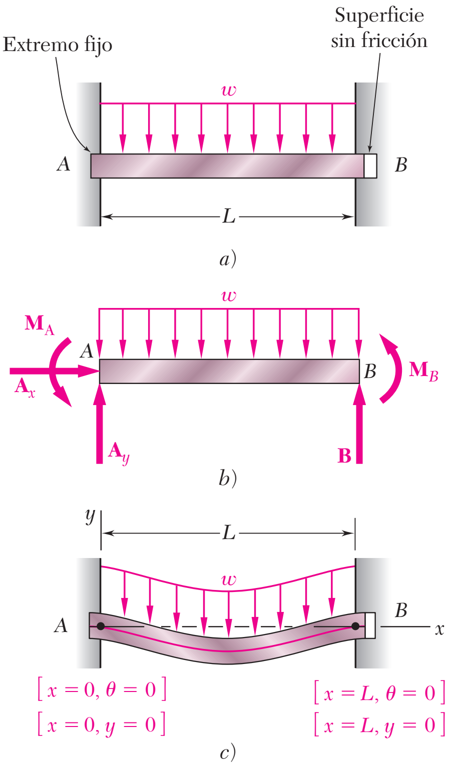
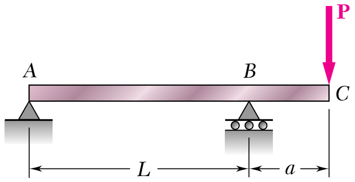


Figura 9.27

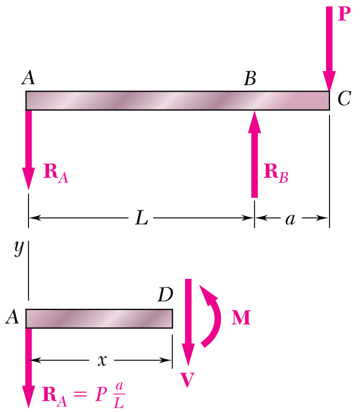


PROBLEMA MODELO 9.1

La viga parcialmente en voladizo de acero *ABC* soporta una carga concentrada **P** en el extremo *C*. Para la porción *AB* de la viga: *a*) obtenga la ecuación de la curva elástica, *b*) determine la deflexión máxima, *c*) calcule $y_{\text{máx}}$ para los siguientes datos:

W14 × 68	$I = 723 \text{ in.}^4$	$E = 29 \times 10^6$ psi
$P = 50$ kips	$L = 15 \text{ ft} = 180 \text{ in.}$	$a = 4 \text{ ft} = 48 \text{ in.}$

SOLUCIÓN



Diagramas de cuerpo libre. Reacciones: $\mathbf{R}_A = Pa/L\downarrow \quad \mathbf{R}_B = P(1 + a/L)\uparrow$. Usando el diagrama de cuerpo libre de la porción *AD* de longitud *x*, se tiene

$$M = -P\frac{a}{L}x \qquad (0 < x < L)$$

Ecuación diferencial de la curva elástica. Se utiliza la ecuación (9.4) y se escribe

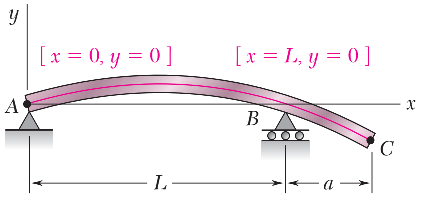
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P\frac{a}{L}x$$

Notando que la rigidez a flexión *EI* es constante, se integra dos veces

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + C_1 \tag{1}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + C_1x + C_2 \tag{2}$$

Determinación de constantes. Para las condiciones de frontera mostradas, se tiene:



$[x = 0,\ y = 0]$: De la ecuación (2), se encuentra $C_2 = 0$

$[x = L,\ y = 0]$: Usando nuevamente la ecuación (2), se escribe

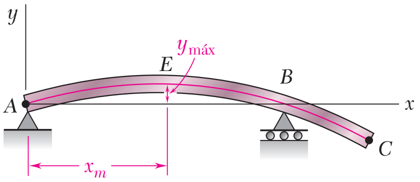
$$EI(0) = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}L^3 + C_1L \qquad C_1 = +\frac{1}{6}PaL$$

***a*) Ecuación de la curva elástica.** Sustituyendo C_1 y C_2 en las ecuaciones (1) y (2),

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + \frac{1}{6}PaL \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \tag{3}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + \frac{1}{6}PaLx \qquad y = \frac{PaL^2}{6EI}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \tag{4}$$ ◀

***b*) Deflexión máxima en la porción *AB*.** La deflexión máxima $y_{\text{máx}}$ ocurre en *E*, donde la pendiente de la curva elástica es cero. Haciendo $dy/dx = 0$ en la ecuación (3), se determina la abscisa x_m del punto *E*:



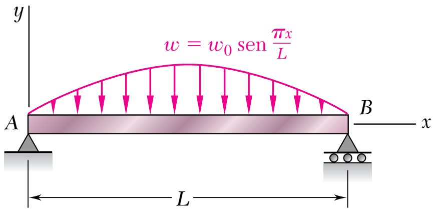
$$0 = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x_m}{L}\right)^2\right] \qquad x_m = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0.577L$$

Sustituyendo $x_m/L = 0.577$ en la ecuación (4), se tiene

$$y_{\text{máx}} = \frac{PaL^2}{6EI}[(0.577) - (0.577)^3] \qquad y_{\text{máx}} = 0.0642\frac{PaL^2}{EI}$$ ◀

***c*) Evaluación de $y_{\text{máx}}$.** Para los datos dados, el valor de $y_{\text{máx}}$ es

$$y_{\text{máx}} = 0.0642\frac{(50 \text{ kips})(48 \text{ in.})(180 \text{ in.})^2}{(29 \times 10^6 \text{ psi})(723 \text{ in.}^4)} \qquad y_{\text{máx}} = 0.238 \text{ in.}$$ ◀



PROBLEMA MODELO 9.2

Para la viga y carga mostradas, determine: *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión máxima.

SOLUCIÓN

Ecuación diferencial de la curva elástica. De la ecuación (9.32),

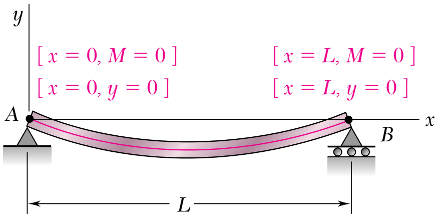
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \tag{1}$$

Integrando la ecuación (1) dos veces:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V = +w_0\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} + C_1 \tag{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Condiciones de frontera:



$[x = 0, M = 0]$: De la ecuación (3), se halla que $C_2 = 0$

$[x = L, M = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3), se escribe

$$0 = w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi + C_1L \qquad C_1 = 0$$

Así:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \tag{4}$$

Integrando dos veces la ecuación (4):

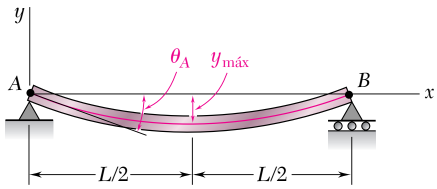
$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{L} + C_3 \tag{5}$$

$$EI\,y = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_3x + C_4 \tag{6}$$

Condiciones de frontera:

$[x = 0, y = 0]$: Usando la ecuación (6), se tiene que $C_4 = 0$

$[x = L, y = 0]$: De la ecuación (6), se halla que $C_3 = 0$



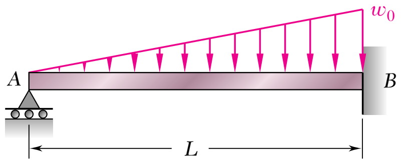
***a*) Ecuación de la curva elástica** $EIy = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$ ◀

***b*) Pendiente en el extremo *A*.** Para $x = 0$,

$$EI\,\theta_A = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos 0 \qquad \theta_A = \frac{w_0L^3}{\pi^3EI} \measuredangle$$ ◀

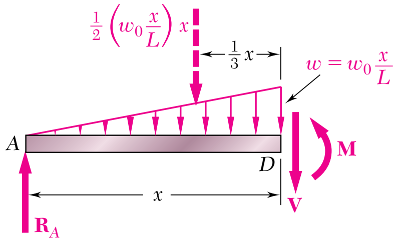
***c*) Deflexión máxima.** Para $x = \frac{1}{2}L$

$$ELy_{máx} = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \qquad y_{máx} = \frac{w_0L^4}{\pi^4EI}\downarrow$$ ◀



PROBLEMA MODELO 9.3

Para la viga uniforme AB, *a*) determine la reacción en A, *b*) obtenga la ecuación de la curva elástica, *c*) halle la pendiente en A. (Nótese que la viga es estáticamente indeterminada de primer grado.)



SOLUCIÓN

Momento flector. Usando el diagrama de cuerpo libre mostrado, se escribe

$$+\circlearrowleft\sum M_D = 0: \qquad R_Ax - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0x^2}{L}\right)\frac{x}{3} - M = 0 \qquad M = R_Ax - \frac{w_0x^3}{6L}$$

Ecuación diferencial de la curva elástica. Se utiliza la ecuación (9.4) y se escribe

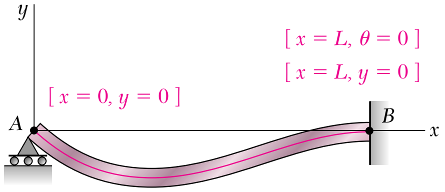
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_Ax - \frac{w_0x^3}{6L}$$

Notando que la rigidez a flexión EI es constante, se integra dos veces y se obtiene

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_Ax^2 - \frac{w_0x^4}{24L} + C_1 \qquad (1)$$

$$EI\,y = \frac{1}{6}R_Ax^3 - \frac{w_0x^5}{120L} + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

Condiciones de frontera. En el esquema se muestran las tres condiciones de frontera que deben satisfacerse



$$[x = 0, y = 0]: \quad C_2 = 0 \qquad (3)$$

$$[x = L, \theta = 0]: \quad \frac{1}{2}R_AL^2 - \frac{w_0L^3}{24} + C_1 = 0 \qquad (4)$$

$$[x = L, y = 0]: \quad \frac{1}{6}R_AL^3 - \frac{w_0L^4}{120} + C_1L + C_2 = 0 \qquad (5)$$

***a*) Reacción en *A*.** Multiplicando la ecuación (4) por L, restando miembro a miembro la ecuación (5) de la ecuación obtenida y notando que $C_2 = 0$, se tiene

$$\tfrac{1}{3}R_AL^3 - \tfrac{1}{30}w_0L^4 = 0 \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{1}{10}w_0L\uparrow \blacktriangleleft$$

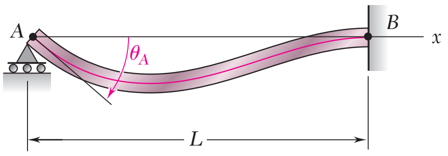
Note que la reacción es independiente de E y de I. Sustituyendo $R_A = \frac{1}{10}w_0L$ en la ecuación (4), se tiene

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10}w_0L)L^2 - \tfrac{1}{24}w_0L^3 + C_1 = 0 \qquad C_1 = -\tfrac{1}{120}w_0L^3$$

***b*) Ecuación de la curva elástica.** Sustituyendo R_A, C_1 y C_2 en la ecuación (2)

$$EI\,y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}w_0L\right)x^3 - \frac{w_0x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120}w_0L^3\right)x$$

$$y = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x) \blacktriangleleft$$



***c*) Pendiente en *A*.** Derivando la anterior ecuación con respecto a x,

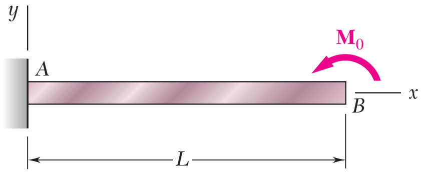
$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EIL}(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4)$$

Haciendo $x = 0$ se tiene $\qquad \theta_A = -\dfrac{w_0L^3}{120EI} \qquad \theta_A = \dfrac{w_0L^3}{120EI}\measuredangle \blacktriangleleft$

PROBLEMAS

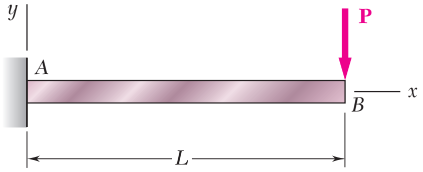
En los siguientes problemas suponga que la rigidez a flexión *EI* de cada viga es constante.

9.1 a 9.4 Para la carga mostrada en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo *AB*, *b*) la deflexión en el extremo libre, *c*) la pendiente en el extremo libre.



y
$\mathbf{M}_0$
A
B
x
L

Figura P9.1



y
$\mathbf{P}$
A
B
x
L

Figura P9.2

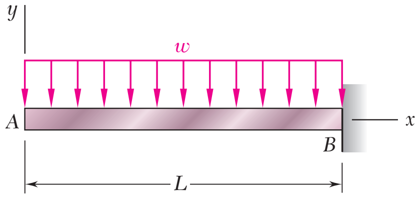
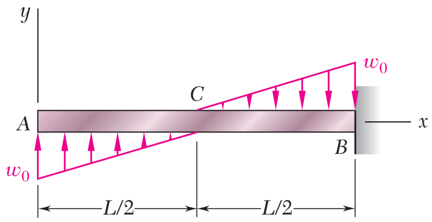


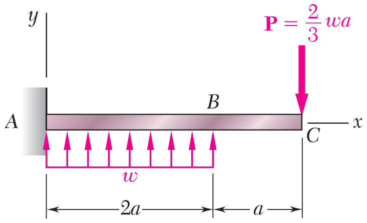
Figura P9.3



y
w_0
C
A
B
x
w_0
$L/2$
$L/2$

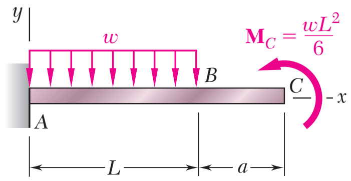
Figura P9.4

9.5 y 9.6 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *AB* de la viga, *b*) la deflexión en *B*, *c*) la pendiente en *B*.



y
$\mathbf{P} = \frac{2}{3}wa$
B
A
C
x
w
$2a$
a

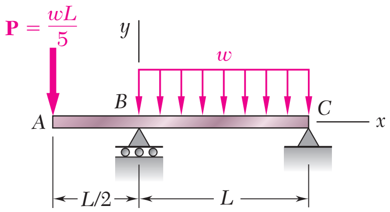
Figura *P9.5*



y
w
$\mathbf{M}_C = \frac{wL^2}{6}$
B
C
x
A
L
a

Figura P9.6

9.7 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *BC* de la viga, *b*) la deflexión en el punto medio del claro, *c*) la pendiente en *B*.



$\mathbf{P} = \frac{wL}{5}$
y
w
B
C
A
x
$L/2$
L

Figura P9.7

9.8 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *AB* de la viga, *b*) la pendiente en *A*, *c*) la pendiente en *B*.

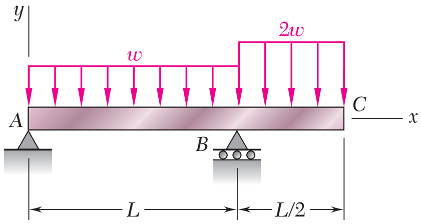

y
w
2w
A
B
C
x
L
L/2

Figura *P9.8*

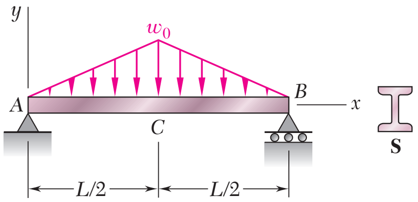

y
w_0
A
B
C
x
S
L/2
L/2

Figura P9.9

9.9 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado S8 × 18.4 y que $w_0 =$ 4 kips/ft, $L = 9$ ft y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en *A*, *b*) la deflexión en *C*.

9.10 Si se sabe que la viga *AB* es de un perfil laminado W130 × 23.8 y que $P = 50$ kN, $L = 1.25$ m y $E = 200$ GPa, determine *a*) la pendiente en *A*, *b*) la deflexión en *C*.

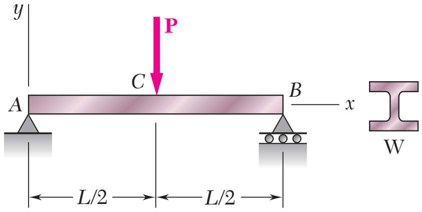

y
P
C
A
B
x
W
L/2
L/2

Figura P9.10

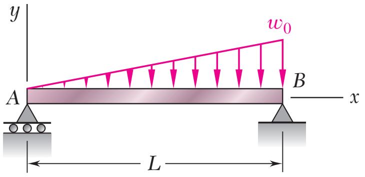


Figura P9.11

9.11 Para la viga y la carga mostradas, *a*) exprese la magnitud y ubicación de la máxima deflexión en términos de w_0, *L*, *E* e *I*. *b*) Calcule el valor de la deflexión máxima, suponiendo que la viga *AB* es de acero laminado W460 × 74 y que $w_0 =$ 60 kN/m, $L = 6$ m y $E = 200$ GPa.

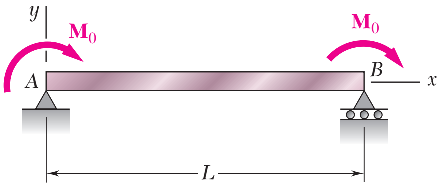

y
$\mathbf{M}_0$
$\mathbf{M}_0$
A
B
x
L

Figura P9.12

9.12 *a*) Determine la ubicación y magnitud de la deflexión máxima de la viga *AB* entre *A* y el centro de la viga. *b*) Si se supone que la viga *AB* es de un perfil W18 × 76, $M_0 = 150$ kip · ft y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la longitud máxima permisible *L* si la deflexión máxima no debe exceder de 0.05 in.

9.13 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

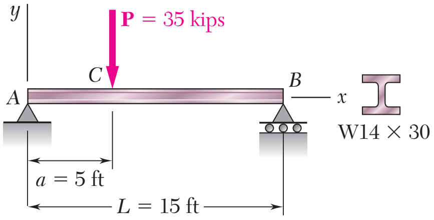

y
P = 35 kips
C
A
B
x
W14 × 30
a = 5 ft
L = 15 ft

Figura P9.13

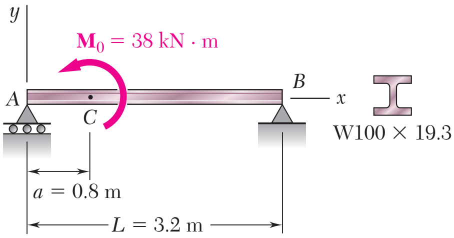

y
$\mathbf{M}_0$ = 38 kN · m
A
C
B
x
W100 × 19.3
a = 0.8 m
L = 3.2 m

Figura *P9.14*

9.14 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.15 Si se sabe que la viga *AE* es de un perfil W360 × 101 de acero laminado y que $M_0 = 310$ kN · m, $L = 2.4$ m, $a = 0.5$ m y $E = 200$ GPa, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *BD*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

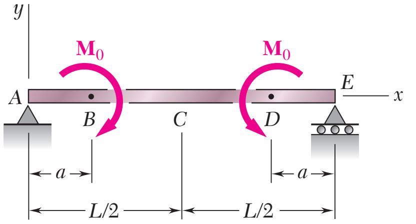

y
$\mathbf{M}_0$
$\mathbf{M}_0$
A
B
C
D
E
x
a
a
L/2
L/2

Figura *P9.15*

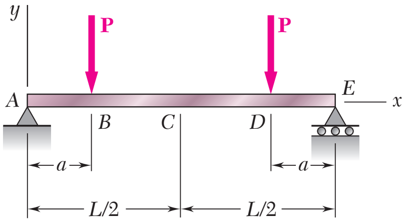

y
P
P
A
B
C
D
E
x
a
a
L/2
L/2

Figura P9.16

9.16 Si se sabe que la viga *AE* es una S200 × 27.4 de acero laminado y que $P = 17.5$ kN, $L = 2.5$ m, $a = 0.8$ m, y $E = 200$ GPa, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para el tramo *BD*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

9.17 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el extremo libre.

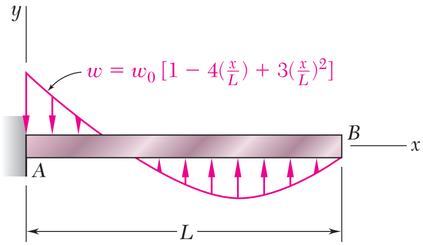

y
$w = w_0\,[1 - 4(\frac{x}{L}) + 3(\frac{x}{L})^2]$
A
B
x
L

Figura P9.17

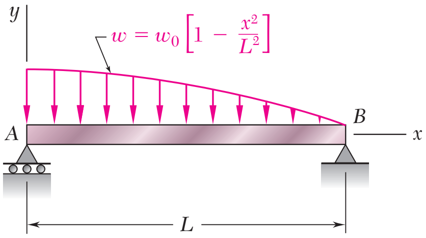

y
$w = w_0\left[1 - \frac{x^2}{L^2}\right]$
A
B
x
L

Figura P9.18

9.18 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio del claro.

9.19 a *9.22* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la reacción en el apoyo deslizante.

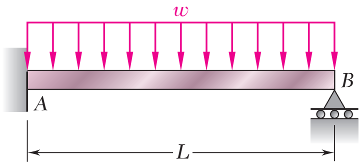


Figura P9.19

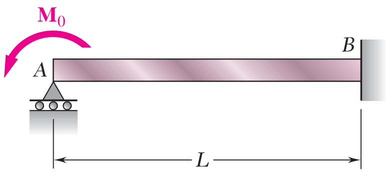

$\mathbf{M}_0$
A
B
L

Figura P9.20

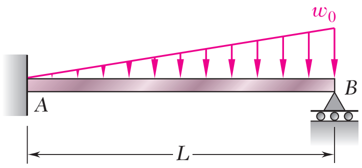


Figura *P9.21*

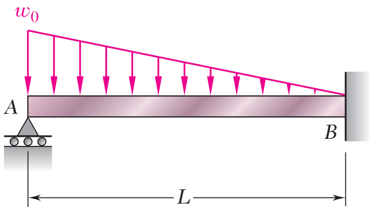


Figura *P9.22*

9.23 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en el apoyo deslizante cuando $w_0 = 65$ kN/m.

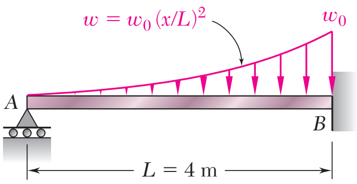

$w = w_0 (x/L)^2$
w_0
A
B
$L = 4$ m

Figura P9.23

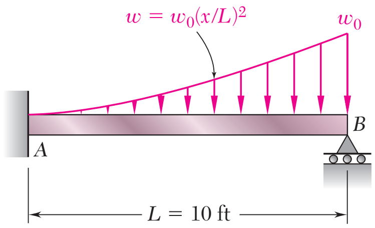

$w = w_0(x/L)^2$
w_0
A
B
$L = 10$ ft

Figura P9.24

9.24 Para la viga que se muestra en la figura, determine la reacción en el apoyo deslizante cuando $w_0 = 1.4$ kips/ft.

9.25 a 9.28 Determine la reacción en el apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

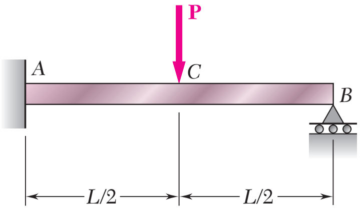


Figura P9.25

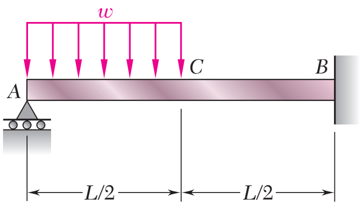


Figura P9.26

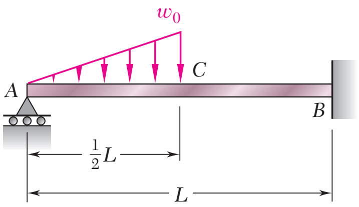

w_0
C
A
B
$\frac{1}{2}L$
L

Figura P9.27

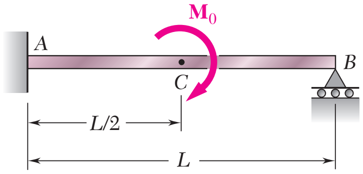


Figura P9.28

9.29 y *9.30* Determine la reacción en el apoyo deslizante y la deflexión en el punto C.

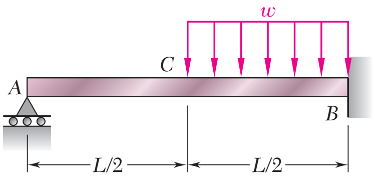


Figura P9.29

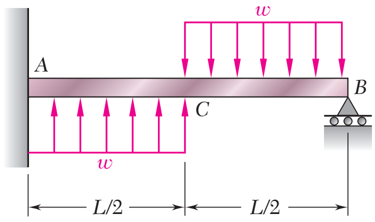


Figura *P9.30*

***9.31* y 9.32** Determine la reacción en el apoyo deslizante y la deflexión en el punto D, si se sabe que a es igual a $L/3$.

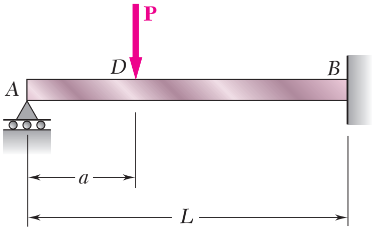


Figura *P9.31*

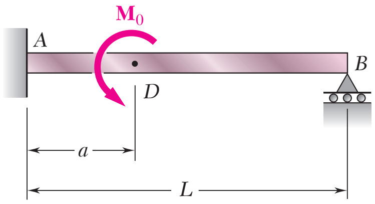


Figura P9.32

9.33 y 9.34 Determine la reacción en A y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

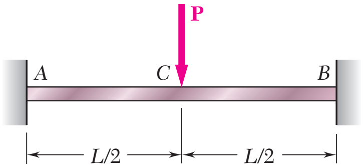


Figura P9.33

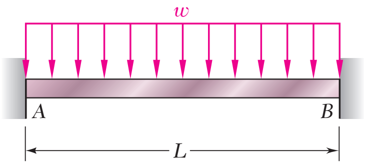


Figura P9.34

*9.6 USO DE FUNCIONES DE SINGULARIDAD PARA DETERMINAR LA PENDIENTE Y LA DEFLEXIÓN DE UNA VIGA

Al repasar lo estudiado hasta el momento en este capítulo, se advierte que el método de la integración proporciona un modo conveniente y efectivo de calcular la pendiente y la deflexión en cualquier punto de una viga prismática, *siempre que pueda representarse el momento flector mediante una función analítica única M(x)*. Sin embargo, cuando el modo de carga de la viga exige dos funciones para representar el momento flector, como en el ejemplo 9.03 (figura 9.17), se requieren cuatro constantes de integración y un número igual de ecuaciones que expresen continuidad en el punto D, así como condiciones de frontera en los apoyos A y B, para determinar estas constantes. Si se requieren tres o más funciones para representar el momento flector, aumenta el número de constantes y de ecuaciones adicionales, lo que da como resultado el uso de cálculos extensos. Éste puede ser el caso para la viga mostrada en la figura 9.28. En esta sección se estudiará cómo pueden simplificarse los cálculos mediante el uso de las funciones de singularidad analizadas en la sección 5.5.

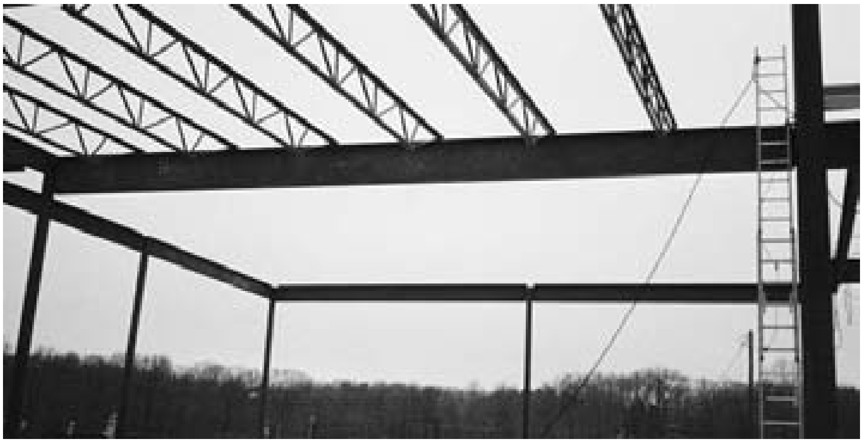


Figura 9.28 En esta estructura de un techo, cada uno de los travesaños aplica una carga concentrada a la viga en que se apoya.

Considere nuevamente la viga y carga del ejemplo 9.03 (figura 9.17) y dibuje el diagrama de cuerpo libre de esa viga (figura 9.29). Usando la función de singularidad apropiada, como se explicó en la sección 5.5, para representar la contribución a la fuerza cortante de la carga concentrada **P**, se escribe

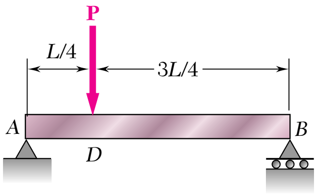


Figura 9.17 (repetida)

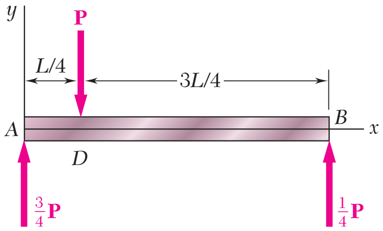


Figura 9.29

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

Integrando en x y recordando de la sección 5.5 que, en ausencia de pares concentrados, la expresión obtenida para el momento flector no tendrá términos constantes, se escribe

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \qquad (9.44)$$

Sustituyendo $M(x)$ de (9.44) en la ecuación (9.4),

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \qquad (9.45)$$

e integrando en x,

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \qquad (9.46)$$

$$EI\,y = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (9.47)\dagger$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan mediante las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.30. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (9.47),

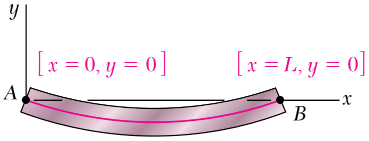


Figura 9.30

$$0 = 0 - \frac{1}{6}P\langle 0 - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + 0 + C_2$$

que se reducen a $C_2 = 0$, ya que cualquier paréntesis triangular que contenga una cantidad negativa es igual a cero. Haciendo ahora $x = L$, $y = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (9.47),

$$0 = \frac{1}{8}PL^3 - \frac{1}{6}P\langle \tfrac{3}{4}L\rangle^3 + C_1L$$

---

† Las condiciones de continuidad para la pendiente y la deflexión en D están *incluidas* en las ecuaciones (9.46) y (9.47). Ciertamente, la diferencia entre las expresiones para la pendiente θ_1 en AD y la pendiente θ_2 en DB está representada por el término $-\frac{1}{2}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^2$ en la ecuación (9.46), y este término es cero en D. Análogamente, la diferencia entre las expresiones para la deflexión y_1 en AD y la deflexión y_2 en DB es el término $-\frac{1}{6}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^3$ en la ecuación (9.47), y este término es también nulo en D.

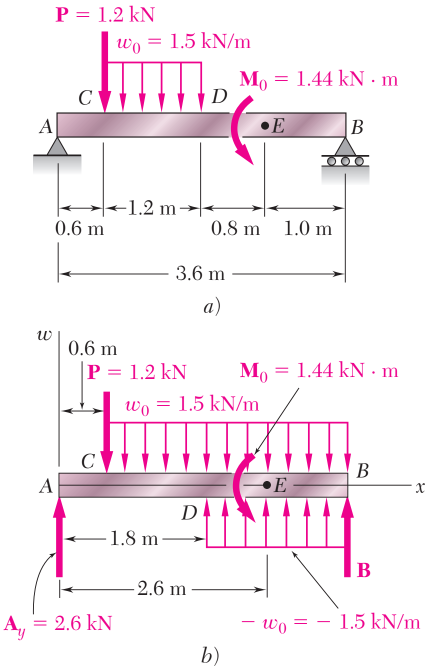
Como la cantidad entre paréntesis triangulares es positiva, éstos pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Resolviendo para C_1,

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

Se verifica que las expresiones obtenidas para las constantes C_1 y C_2 son las ya encontradas antes en la sección 9.3. Pero se ha eliminado la necesidad de las constantes adicionales C_3 y C_4 y no hay que escribir ecuaciones que expresen que la pendiente y la deflexión son continuas en el punto D.

EJEMPLO 9.06

Para la viga y carga mostradas en la figura 9.31*a* y usando funciones de singularidad *a*) exprese la pendiente y deflexión como funciones de la distancia x al apoyo A, *b*) halle la deflexión en el punto medio D. Considere $E = 200$ GPa e $I = 6.87 \times 10^{-6}$ m^4.



a)

b)

Figura 9.31

a) Note que la viga está cargada y apoyada como la viga del ejemplo 5.05. Refiriéndose a ese ejemplo, recuerde que la carga distribuida se reemplazó por dos cargas equivalentes de extremo abierto, mostradas en la figura 9.31*b*, y que para la fuerza cortante y el momento flector se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$V(x) = -1.5\langle x - 0.6\rangle^1 + 1.5\langle x - 1.8\rangle^1 + 2.6 - 1.2\langle x - 0.6\rangle^0$$

$$M(x) = -0.75\langle x - 0.6\rangle^2 + 0.75\langle x - 1.8\rangle^2 + 2.6x - 1.2\langle x - 0.6\rangle^1 - 1.44\langle x - 2.6\rangle^0$$

Integrando dos veces la última expresión, se obtiene

$$EI\theta = -0.25\langle x - 0.6\rangle^3 + 0.25\langle x - 1.8\rangle^3 + 1.3x^2 - 0.6\langle x - 0.6\rangle^2 - 1.44\,\langle x - 2.6\rangle^1 + C_1 \qquad (9.48)$$

$$EIy = -0.0625\langle x - 0.6\rangle^4 + 0.0625\langle x - 1.8\rangle^4 + 0.4333x^3 - 0.2\langle x - 0.6\rangle^3 - 0.72\langle x - 2.6\rangle^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.49)$$

Las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse de las condiciones de frontera mostradas en la figura 9.32. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (9.49) y notando que todos los paréntesis triangulares contienen cantidades negativas y que, por consiguiente, son nulas, se concluye que $C_2 = 0$. Haciendo $x = 3.6$, $y = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (9.49), se escribe

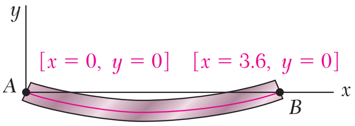


Figura 9.32

$$0 = -0.0625\langle 3.0\rangle^4 + 0.0625\langle 1.8\rangle^4 + 0.4333(3.6)^3 - 0.2\langle 3.0\rangle^3 - 0.72\langle 1.0\rangle^2 + C_1(3.6) + 0$$

Puesto que todas las cantidades entre paréntesis triangulares son positivas, éstos pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Despejando C_1, se tiene $C_1 = -2.692$.

b) Sustituyendo C_1 y C_2 en la ecuación (9.49) y haciendo $x = x_D = 1.8$ m, se halla que la deflexión en el punto D está definida por la relación

$$EIy_D = -0.0625\langle 1.2\rangle^4 + 0.0625\langle 0\rangle^4 + 0.4333(1.8)^3 - 0.2\langle 1.2\rangle^3 - 0.72\langle -0.8\rangle^2 - 2.692(1.8)$$

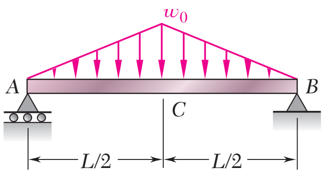
El último paréntesis triangular contiene una cantidad negativa y, por tanto, es igual a cero. Todos los otros paréntesis triangulares contienen cantidades positivas y pueden reemplazarse por paréntesis ordinarios. Se tiene

$$EIy_D = -0.0625(1.2)^4 + 0.0625(0)^4 + 0.4333(1.8)^3 - 0.2(1.2)^3 - 0 - 2.692(1.8) = -2.794$$

Recordando los valores numéricos de E e I, se escribe

$$(200 \text{ GPa})(6.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4)y_D = -2.794 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

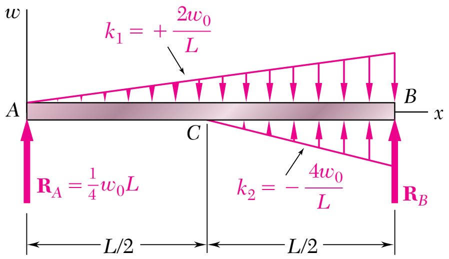
$$y_D = -13.64 \times 10^{-3} \text{ m} = -2.03 \text{ mm}$$



PROBLEMA MODELO 9.4

Para la viga prismática y carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en *A*, *c*) la deflexión máxima.

SOLUCIÓN



Momento flector. La ecuación que define el momento flector de la viga se obtuvo en el problema modelo 5.9. Usando el diagrama modificado de carga mostrado en la figura, se tenía en la ecuación (3)

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx$$

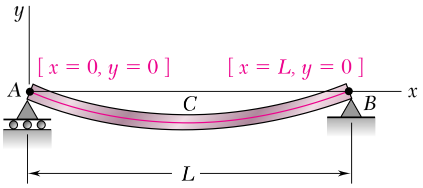
***a*) Ecuación de la curva elástica.** Usando la ecuación (9.4), se escribe

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \qquad (1)$$

e integrando dos veces *x*,

$$EI\,\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 + C_1 \qquad (2)$$

$$EI\,y = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2 \qquad (3)$$



Condiciones de frontera.

$[x = 0, y = 0]$: Usando la ecuación (3) y observando que cada paréntesis triangular $\langle\ \rangle$ contiene una cantidad negativa y que por tanto es igual a cero, se halla que $C_2 = 0$.

$[x = L, y = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3), se escribe

$$0 = -\frac{w_0L^4}{60} + \frac{w_0}{30L}\left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{w_0L^4}{24} + C_1L \qquad C_1 = -\frac{5}{192}w_0L^3$$

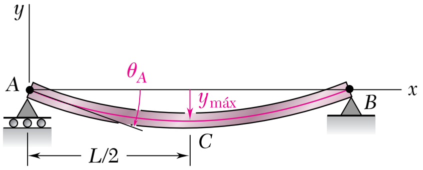
Sustituyendo C_1 y C_2 en las ecuaciones (2) y (3),

$$EI\,\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{5}{192}w_0L^3 \qquad (4)$$

$$EI\,y = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5}{192}w_0L^3x \qquad (5) ◀$$

***b*) Pendiente en *A*.** Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (4),

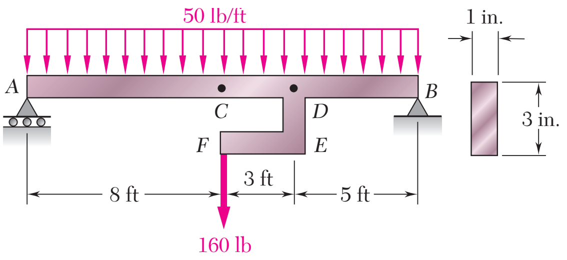
$$EI\,\theta_A = -\frac{5}{192}w_0L^3 \qquad \theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}\measuredangle ◀$$



***c*) Deflexión máxima.** Debido a la simetría de los apoyos y de la carga, la deflexión máxima ocurre en el punto *C*, donde $x = \tfrac{1}{2}L$. Sustituyendo en la ecuación (5)

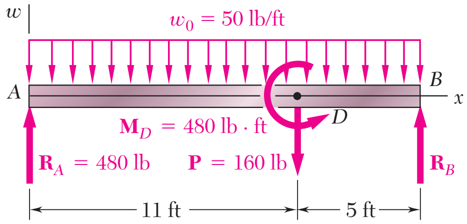
$$EI\,y_{\text{máx}} = w_0L^4\left[-\frac{1}{60(32)} + 0 + \frac{1}{24(8)} - \frac{5}{192(2)}\right] = -\frac{w_0L^4}{120}$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{w_0L^4}{120EI}\downarrow ◀$$



PROBLEMA MODELO 9.5

La barra rígida *DEF* se encuentra soldada en el punto *D* a la barra uniforme de acero *AB*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica de la viga, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.



SOLUCIÓN

Momento flector. La ecuación que define el momento flector se obtuvo en el problema modelo 5.10. Usando el diagrama modificado de carga mostrado y expresando *x* en ft, se tenía en la ecuación (3):

$$M(x) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}$$

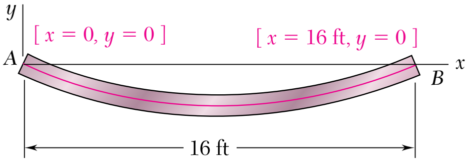
***a*) Ecuación de la curva elástica.** Usando la ecuación (8.4), se escribe

$$EI(d^2y/dx^2) = -25x^2 + 480x - 160\langle x - 11\rangle^1 - 480\langle x - 11\rangle^0 \quad \text{lb} \cdot \text{ft} \qquad (1)$$

e integrando dos veces en *x*,

$$EI\,\theta = -8.333x^3 + 240x^2 - 80\langle x - 11\rangle^2 - 480\langle x - 11\rangle^1 + C_1 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^2 \qquad (2)$$

$$EI\,y = -2.083x^4 + 80x^3 - 26.67\langle x - 11\rangle^3 - 240\langle x - 11\rangle^2 + C_1x + C_2 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^3 \qquad (3)$$



Condiciones de frontera.

$[x = 0, y = 0]$: Usando la ecuación (3) y observando que cada paréntesis triangular $\langle\ \rangle$ contiene una cantidad negativa y en consecuencia es igual a cero, se halla que $C_2 = 0$.

$[x = 16 \text{ ft}, y = 0]$: Usando de nuevo la ecuación (3) y teniendo en cuenta que cada paréntesis triangular contiene una cantidad positiva y, por tanto, puede reemplazarse por un paréntesis, se escribe

$$0 = -2.083(16)^4 + 80(16)^3 - 26.67(5)^3 - 240(5)^2 + C_1(16)$$
$$C_1 = -11.36 \times 10^3$$

Sustituyendo los valores hallados para C_1 y C_2 en la ecuación (3), se tiene

$$EI\,y = -2.083x^4 + 80x^3 - 26.67\langle x - 11\rangle^3 - 240\langle x - 11\rangle^2 - 11.36 \times 10^3x \quad \text{lb} \cdot \text{ft}^3 \qquad (3') \blacktriangleleft$$

Para calcular *EI* recuerde que $E = 29 \times 10^6$ psi

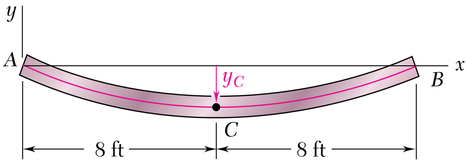
$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(1 \text{ in.})(3 \text{ in.})^3 = 2.25 \text{ in.}^4$$
$$EI = (29 \times 10^6 \text{ psi})(2.25 \text{ in.}^4) = 65.25 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{in.}^2$$

Sin embargo, como todos los cálculos anteriores se realizaron tomando los ft como unidades de longitud, se escribe

$$EI = (65.25 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{in.}^2)(1 \text{ ft}/12 \text{ in.})^2 = 453.1 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$$

***b*) Deflexión en el centro *C*.** Haciendo $x = 8$ ft en la ecuación (3′), se tiene

$$EI\,y_C = -2.083(8)^4 + 80(8)^3 - 26.67\langle -3\rangle^3 - 240\langle -3\rangle^2 - 11.36 \times 10^3(8)$$

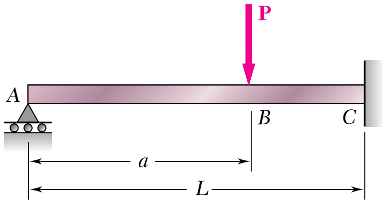


Observando que cada paréntesis triangular es cero y sustituyendo *EI* por su valor numérico

$$(453.1 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2)y_C = -58.45 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{ft}^3$$

y, resolviendo para y_C: $\qquad y_C = -0.1290$ ft $\qquad y_C = -1.548$ in. ◀

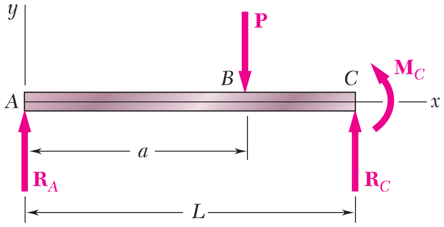
Note que la deflexión obtenida *no es* la deflexión máxima.



PROBLEMA MODELO 9.6

Para la viga uniforme *ABC*, *a*) exprese la reacción en *A* en función de *P*, *L*, *a*, *E* e *I*, *b*) determine la reacción en *A* y la deflexión bajo la carga cuando $a = L/2$.

SOLUCIÓN



Reacciones. Para la carga vertical **P**, las reacciones son como se muestran en la figura. Se observa que son estáticamente indeterminadas.

Fuerza cortante y momento flector. Usando una función paso para representar la contribución de **P** a la fuerza cortante, se escribe

$$V(x) = R_A - P\langle x - a\rangle^0$$

Integrando en *x*, se obtiene el momento flector:

$$M(x) = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

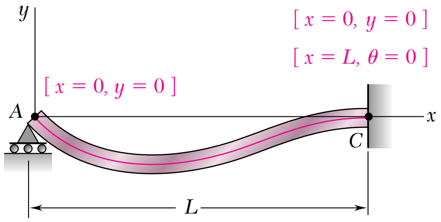
Ecuación de la curva elástica. Usando la ecuación (9.4) se escribe

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

Integrando dos veces en *x*,

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}P\langle x - a\rangle^2 + C_1$$

$$EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}P\langle x - a\rangle^3 + C_1 x + C_2$$



Condiciones de frontera. Notando que $\langle x - a\rangle$ es cero para $x = 0$, y $(L - a)$ para $x = L$, se escribe

$[x = 0, y = 0]$: $\quad C_2 = 0 \qquad (1)$

$[x = L, \theta = 0]$: $\quad \tfrac{1}{2}R_A L^2 - \tfrac{1}{2}P(L - a)^2 + C_1 = 0 \qquad (2)$

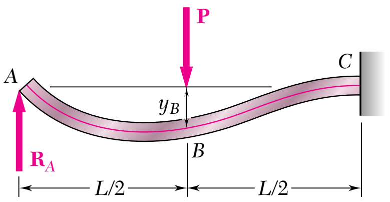
$[x = L, y = 0]$: $\quad \tfrac{1}{6}R_A L^3 - \tfrac{1}{6}P(L - a)^3 + C_1 L + C_2 = 0 \qquad (3)$

***a*) Reacción en *A*.** Multiplicando la ecuación (2) por *L*, restando miembro a miembro la ecuación (3) de la obtenida y observando que $C = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{3}R_A L^3 - \frac{1}{6}P(L - a)^2[3L - (L - a)] = 0$$

$$\mathbf{R}_A = P\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2\left(1 + \frac{a}{2L}\right)\uparrow \blacktriangleleft$$

Se advierte que la reacción es independiente de *E* e *I*.



***b*) Reacción en *A* y deflexión en *B* cuando $a = \tfrac{1}{2}L$.** Haciendo $a = \tfrac{1}{2}L$ en la expresión obtenida de R_A, se tiene

$$R_A = P(1 - \tfrac{1}{2})^2(1 + \tfrac{1}{4}) = 5P/16 \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{5}{16}P\uparrow \blacktriangleleft$$

Sustituyendo $a = L/2$ y $R_A = 5P/16$ en la ecuación (2) y resolviendo para C_1, se halla que $C_1 = -PL^2/32$. Haciendo $x = L/2$, $C_1 = -PL^2/32$ y $C_2 = 0$ en la expresión obtenida para *y*, se tiene

$$y_B = -\frac{7PL^3}{768EI} \qquad y_B = \frac{7PL^3}{768EI}\downarrow \blacktriangleleft$$

Note que la deflexión obtenida *no* es la deflexión máxima.

PROBLEMAS

Emplee funciones de singularidad para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a flexión *EI* de cada viga es constante.

9.35 y 9.36 Para la viga y la carga mostradas en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

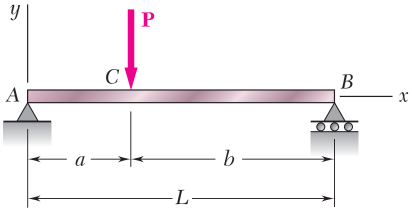
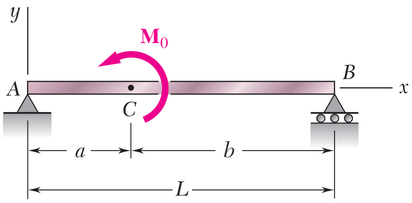


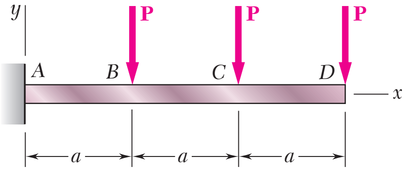
Figura P9.35



y
M0
A
B
x
C
a
b
L

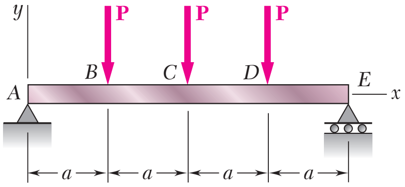
Figura P9.36

9.37 y *9.38* Para la viga y la carga mostradas, determine la deflexión en *a*) el punto *B*, *b*) el punto *C*, *c*) el punto *D*.



y
P
P
P
A
B
C
D
x
a
a
a

Figura P9.37



y
P
P
P
B
C
D
A
E
x
a
a
a
a

Figura *P9.38*

9.39 y *9.40* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el extremo *D*.

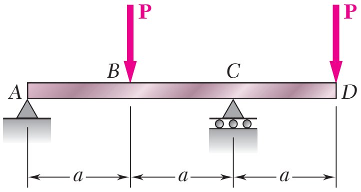
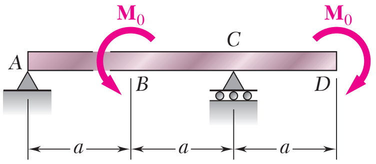


Figura P9.39



M0
M0
C
A
B
D
a
a
a

Figura *P9.40*

9.41 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

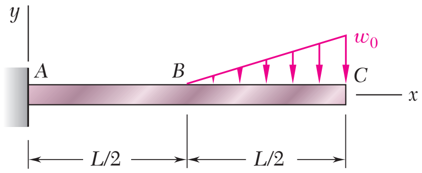

y
A
B
w_0
C
x
L/2
L/2

Figura P9.41

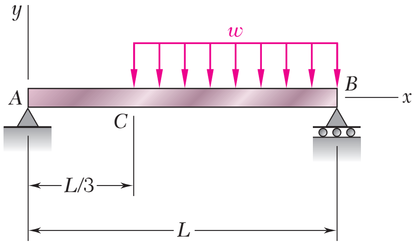


Figura P9.42

9.42 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el punto *A*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

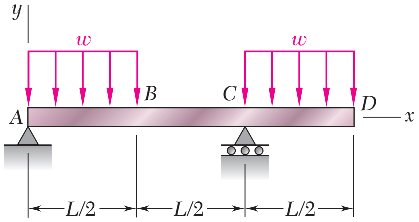

y
w
w
B
C
D
A
x
L/2
L/2
L/2

Figura *P9.43*

9.43 Para la viga y la carga representadas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el punto *D*.

9.44 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto medio *C*.

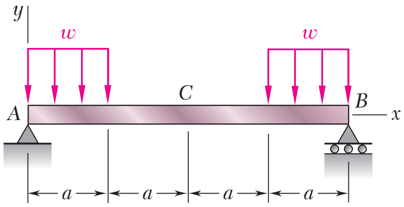

y
w
w
C
B
A
x
a
a
a
a

Figura P9.44

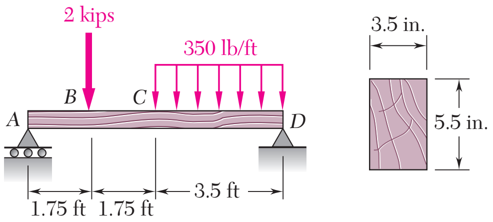

2 kips
350 lb/ft
B
C
A
D
1.75 ft
1.75 ft
3.5 ft
3.5 in.
5.5 in.

Figura P9.45

9.45 Para la viga de madera y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 1.6 \times 10^6$ psi.

9.46 Para la viga y la carga ilustradas en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

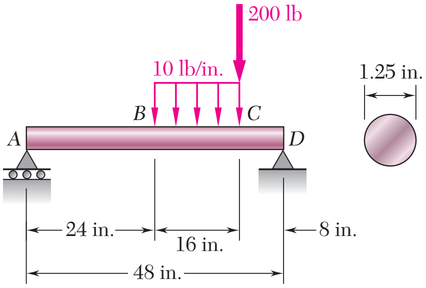

200 lb
10 lb/in.
1.25 in.
B
C
A
D
24 in.
16 in.
8 in.
48 in.

Figura *P9.46*

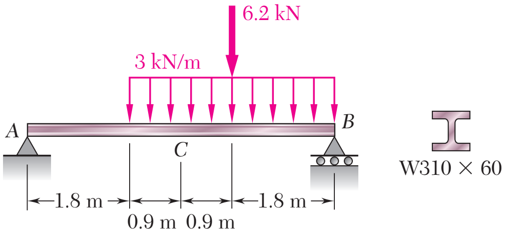

6.2 kN
3 kN/m
A
B
C
W310 × 60
1.8 m
0.9 m
0.9 m
1.8 m

Figura P9.47

9.47 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.48 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto medio C. Utilice $E = 200$ GPa.

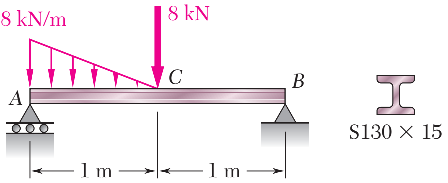

48 kN/m
8 kN
A
C
B
S130 × 15
1 m
1 m

Figura P9.48

9.49 y 9.50 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el apoyo deslizante, *b*) la deflexión en el punto C.

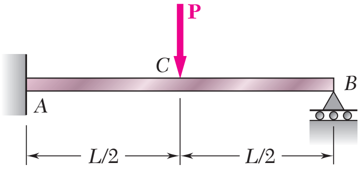


Figura P9.49

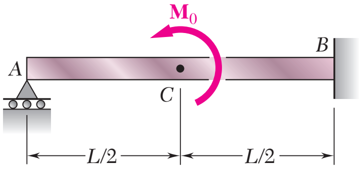


Figura P9.50

9.51 y *9.52* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el apoyo deslizante, *b*) la deflexión en el punto B.

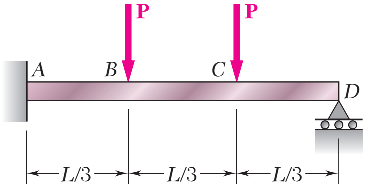

P
P
A
B
C
D
L/3
L/3
L/3

Figura P9.51

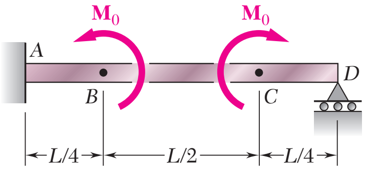

M0
M0
A
B
C
D
L/4
L/2
L/4

Figura *P9.52*

9.53 Para la viga y la carga que se ilustran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto C, *b*) la deflexión en el punto B. Utilice $E = 200$ GPa.

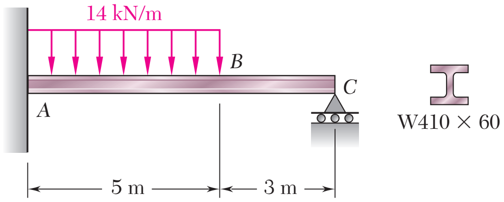

14 kN/m
B
C
A
W410 × 60
5 m
3 m

Figura P9.53

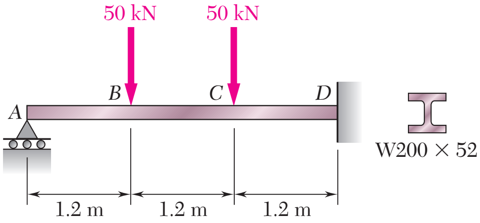

50 kN
50 kN
A
B
C
D
W200 × 52
1.2 m
1.2 m
1.2 m

Figura P9.54

9.54 Para la viga y la carga que se ilustran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto A, *b*) la deflexión en el punto B. Utilice $E = 200$ GPa.

9.55 y 9.56 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

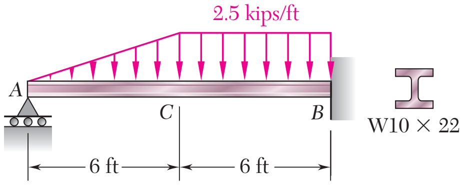

2.5 kips/ft
A
C
B
W10 × 22
6 ft
6 ft

Figura *P9.55*

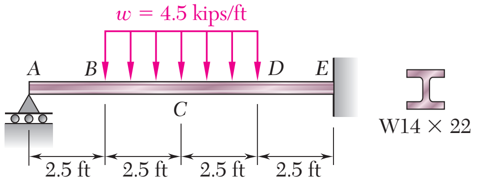

w = 4.5 kips/ft
A
B
D
E
C
W14 × 22
2.5 ft
2.5 ft
2.5 ft
2.5 ft

Figura P9.56

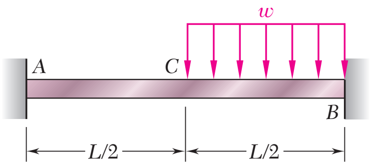


Figura P9.57

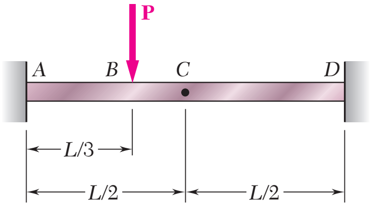

P
A
B
C
D
L/3
L/2
L/2

Figura P9.58

9.57 y 9.58 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*.

9.59 a 9.62 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la magnitud y localización de la mayor deflexión hacia abajo.

9.59 La viga y la carga del problema 9.45.
9.60 La viga y la carga del problema 9.46.
9.61 La viga y la carga del problema 9.47.
9.62 La viga y la carga del problema 9.48.

9.63 La barra rígida *BDE* está soldada en el punto *B* a la viga de acero laminado *AC*. Para la carga que se ilustra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 200$ GPa.

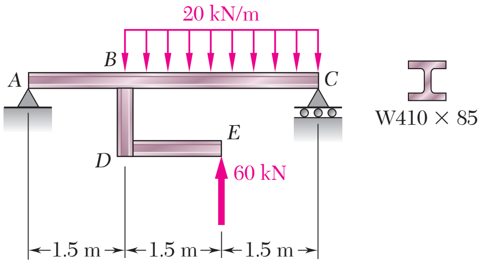

20 kN/m
A
B
C
W410 × 85
E
D
60 kN
1.5 m
1.5 m
1.5 m

Figura *P9.63*

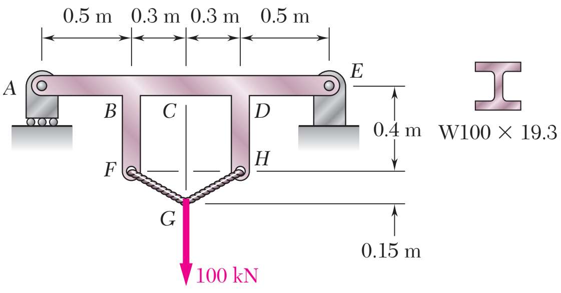

0.5 m
0.3 m
0.3 m
0.5 m
A
E
B
C
D
0.4 m
W100 × 19.3
F
H
G
0.15 m
100 kN

Figura *P9.64*

9.64 Las barras rígidas *BF* y *DH* están soldadas a la viga de acero laminado *AE*, como se muestra en la figura. Para la carga que se ilustra, determine *a*) la deflexión en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

9.7 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Cuando una viga se somete a varias cargas concentradas o distribuidas, a menudo es conveniente calcular de manera separada la pendiente y la deflexión causadas por cada carga. La pendiente y la deflexión totales se obtienen aplicando el principio de superposición (véase la sección 2.12) y sumando los valores de la pendiente o la deflexión correspondiente a las diversas cargas.

EJEMPLO 9.07

Determine la pendiente y deflexión en D para la viga y carga mostradas (figura 9.33), sabiendo que la rigidez a flexión de la viga es $EI = 100 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$.

La pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga pueden obtenerse superponiendo las pendientes y deflexiones causadas respectivamente por la carga concentrada y por la carga distribuida (figura 9.34).

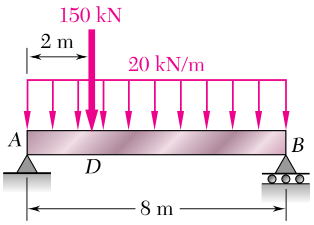
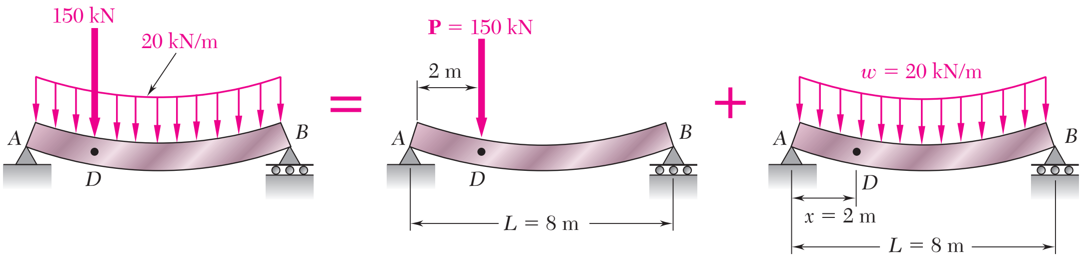


Figura 9.33



a) *b*) *c*)

Figura 9.34

Como la carga concentrada en la figura 9.34*b* se aplica a un cuarto del claro, pueden usarse los resultados obtenidos para la viga y la carga del ejemplo 9.03 y escribirse

$$(\theta_D)_P = -\frac{PL^2}{32EI} = -\frac{(150 \times 10^3)(8)^2}{32(100 \times 10^6)} = -3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_P = -\frac{3PL^3}{256EI} = -\frac{3(150 \times 10^3)(8)^3}{256(100 \times 10^6)} = -9 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$= -9 \text{ mm}$$

Por otra parte, recordando la ecuación de la curva elástica obtenida para la carga uniformemente distribuida en el ejemplo 9.02, la deflexión en la figura 9.34*c* se expresa como:

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \tag{9.50}$$

y diferenciando con respecto a x,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(-4x^3 + 6Lx^2 - L^3) \tag{9.51}$$

Haciendo $w = 20$ kN/m, $x = 2$ m y $L = 8$ m, en las ecuaciones (9.51) y (9.50), se tiene

$$(\theta_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-352) = -2.93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-912) = -7.60 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$= -7.60 \text{ mm}$$

Combinando las pendientes y deflexiones producidas por las cargas concentradas y distribuidas, se obtiene:

$$\theta_D = (\theta_D)_P + (\theta_D)_w = -3 \times 10^{-3} - 2.93 \times 10^{-3}$$
$$= -5.93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$
$$y_D = (y_D)_P + (y_D)_w = -9 \text{ mm} - 7.60 \text{ mm} = -16.60 \text{ mm}$$

Para facilitar el trabajo de los ingenieros, los manuales de ingeniería estructural y mecánica incluyen tablas con las deflexiones y pendientes de vigas para diversas cargas y apoyos. En el apéndice D se encuentra una de estas tablas. Note que la pendiente y la deflexión de la viga de la figura 9.33 hubieran podido determinarse a partir de allí. Ciertamente, usando la información dada en los casos 5 y 6, pudo haberse expresado la deflexión de la viga para cualquier valor $x \leq L/4$. Tomando la derivada de la expresión así obtenida, se habría determinado la pendiente de la viga en el mismo intervalo. También se observa que la pendiente en los extremos de la viga puede obtenerse sumando los valores correspondientes de la tabla. Sin embargo, la deflexión máxima de la viga de la figura 9.33 *no puede* obtenerse sumando las deflexiones máximas de los casos 5 y 6, pues éstas ocurren en puntos diferentes de la viga.†

9.8 APLICACIÓN DE LA SUPERPOSICIÓN A VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Figura 9.35 Las vigas continuas que soportan este puente de autopista tiene tres soportes que son indeterminados.

A menudo será útil el método de la superposición para determinar las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada. Considerando primero una viga indeterminada de primer grado (véase sección 9.5), como la que se muestra en la figura 9.35 se seguirá el método descrito en la sección 2.9. Se escoge una de las reacciones como redundante y se elimina o modifica el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata como una carga desconocida que, junto con las otras, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. La pendiente o la deflexión donde el apoyo se ha modificado o eliminado se obtiene calculando separadamente las deformaciones causadas por las cargas dadas y la reacción redundante, y superponiendo los resultados obtenidos. Una vez calculadas las reacciones en los apoyos, pueden determinarse la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga.

---

† El valor aproximado de la deflexión máxima de la viga se obtiene elaborando la gráfica de los valores de y correspondientes a varios de x. La determinación de la localización exacta y magnitud de la deflexión máxima requiere igualar a cero la expresión de la pendiente y resolver esta ecuación para x.

EJEMPLO 9.08

Determine las reacciones en los apoyos de la viga prismática y la carga mostradas en la figura 9.36. (Ésta es la misma viga del ejemplo 9.05 de la sección 9.5.)

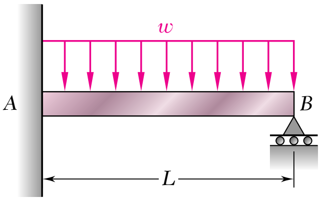
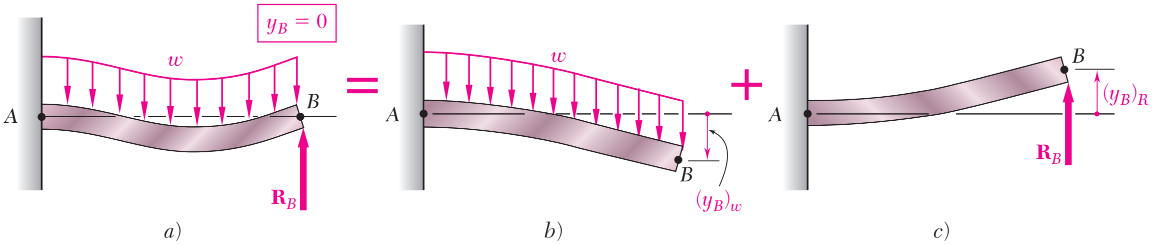


Figura 9.36

La reacción en B se considera redundante y se libera la viga de ese apoyo. La reacción $\mathbf{R}_B$ se establece como una carga desconocida (figura 9.37*a*) y se obtendrá de la condición de que la deflexión de la viga en B debe ser cero.



a) *b*) *c*)

Figura 9.37

La solución se efectúa tomando por separado la deflexión $(y_B)_w$ producida en B por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.37*b*) y la deflexión $(y_B)_R$ producida en el mismo punto por la reacción redundante $\mathbf{R}_B$ (figura 9.37*c*).

De la tabla del apéndice D (casos 2 y 1) se halla que

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

Escribiendo que la deflexión en B es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R = 0$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

y resolviendo para R_B, $\qquad R_B = \frac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_B = \frac{3}{8}wL\uparrow$

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.38) y escribiendo las correspondientes ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A + R_B - wL = 0 \tag{9.52}$$

$$R_A = wL - R_B = wL - \tfrac{3}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$

$$\mathbf{R}_A = \tfrac{5}{8}wL\uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A + R_B L - (wL)(\tfrac{1}{2}L) = 0 \tag{9.53}$$

$$M_A = \tfrac{1}{2}wL^2 - R_B L = \tfrac{1}{2}wL^2 - \tfrac{3}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}wL^2$$

$$\mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowleft$$

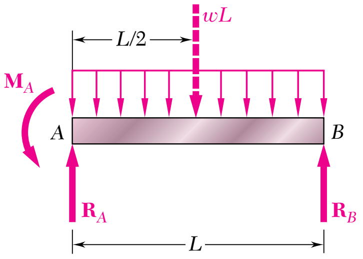


Figura 9.38

Solución alternativa. El par en el extremo empotrado A puede considerarse redundante y reemplazarse el extremo fijo por un apoyo de segundo género. El par $\mathbf{M}_A$ es ahora una carga desconocida (figura 9.39a) y se calculará de la condición de que la pendiente debe ser cero en el punto A. La solución se consigue considerando separadamente la pendiente $(\theta_A)_w$ producida en A por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.39b) y la pendiente $(\theta_A)_M$ producida por el mismo punto por el par desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.39c).

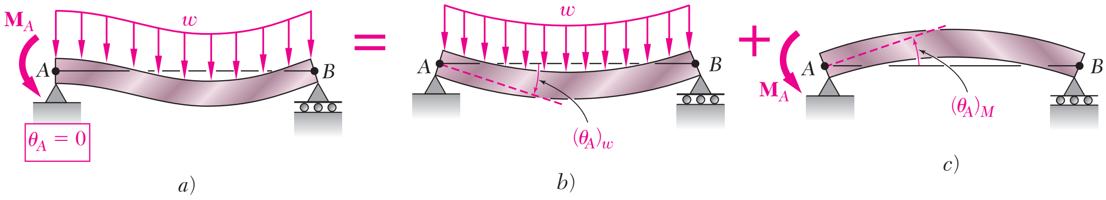


Figura 9.39

Usando la tabla del apéndice D (casos 6 y 7) y observando que A y B deben intercambiarse en el caso 7, se halla que:

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} \qquad (\theta_A)_M = \frac{M_A L}{3EI}$$

Escribiendo que la pendiente en A es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se halla que:

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_M = 0$$

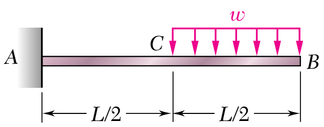
$$\theta_A = -\frac{wL^3}{25EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0$$

y, despejando a M_A,

$$M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2\circlearrowleft$$

Los valores R_A y R_B pueden encontrarse mediante las ecuaciones de equilibrio (9.52) y (9.53).

La viga estudiada en el ejemplo previo era indeterminada de primer grado. En el caso de una viga indeterminada de segundo grado (véase sección 9.5), dos reacciones deben designarse como redundantes y los soportes correspondientes eliminados y modificados como corresponda. Las reacciones redundantes se tratan entonces como cargas desconocidas que, simultáneamente con las otras cargas, deben producir deformaciones compatibles con los apoyos originales (véase problema modelo 9.9).

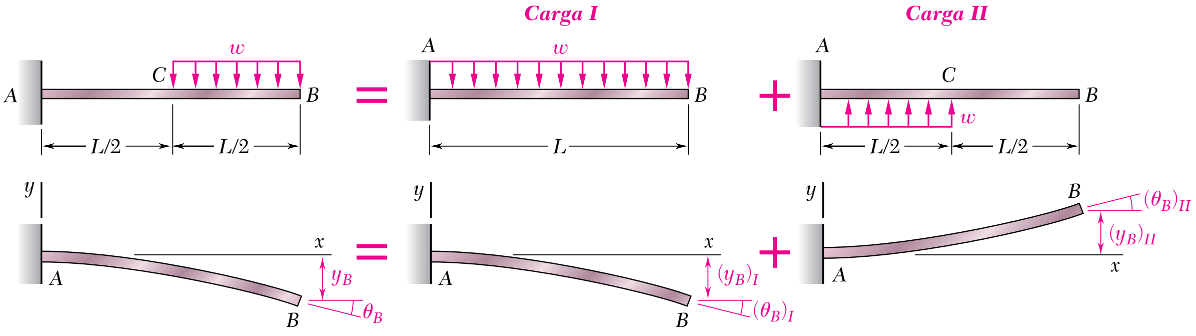


PROBLEMA MODELO 9.7

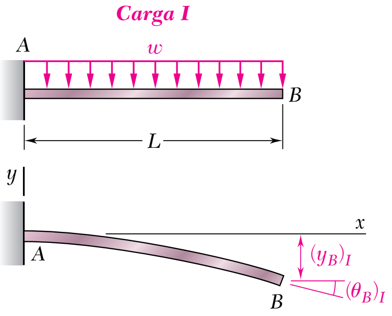
Para la viga y carga mostradas en la figura, determine la pendiente y la deflexión del punto *B*.

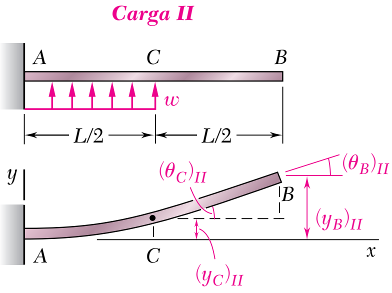
SOLUCIÓN

Principio de superposición. La carga dada puede obtenerse superponiendo las cargas mostradas en la siguiente "película de ecuación de carga". La viga *AB* es, naturalmente, la misma en cada parte de la figura.


Carga I
Carga II
w
A
C
B
L/2
L/2
=
A
w
B
L
+
A
C
B
w
L/2
L/2
y
x
A
B
y_B
θ_B
=
y
x
A
B
$(y_B)_I$
$(\theta_B)_I$
+
y
B
$(\theta_B)_{II}$
$(y_B)_{II}$
A
x

Para cada una de las cargas I y II, la pendiente y la deflexión en *B* se determinan usando la tabla de *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.


Carga I
A
w
B
L
y
x
A
B
$(y_B)_I$
$(\theta_B)_I$


Carga II
A
C
B
w
L/2
L/2
y
$(\theta_C)_{II}$
$(\theta_B)_{II}$
B
$(y_B)_{II}$
A
C
x
$(y_C)_{II}$

Carga I

$$(\theta_B)_\text{I} = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad (y_B)_\text{I} = -\frac{wL^4}{8EI}$$

Carga II

$$(\theta_C)_\text{II} = +\frac{w(L/2)^3}{6EI} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_C)_\text{II} = +\frac{w(L/2)^4}{8EI} = +\frac{wL^4}{128EI}$$

En la porción *CB*, el momento flector para la carga II es cero y, por tanto, la curva elástica es una línea recta.

$$(\theta_B)_\text{II} = (\theta_C)_\text{II} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_B)_\text{II} = (y_C)_\text{II} + (\theta_C)_\text{II}\left(\frac{L}{2}\right)$$

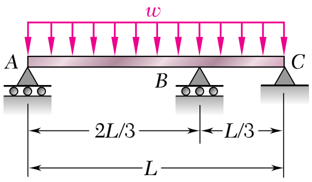
$$= \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI}\left(\frac{L}{2}\right) = +\frac{7wL^4}{384EI}$$

Pendiente en el punto *B*

$$\theta_B = (\theta_B)_\text{I} + (\theta_B)_\text{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI} \qquad \theta_B = \frac{7wL^3}{48EI} \measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexión en *B*

$$y_B = (y_B)_\text{I} + (y_B)_\text{II} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{41wL^4}{384EI} \qquad y_B = \frac{41wL^4}{384EI}\downarrow \blacktriangleleft$$

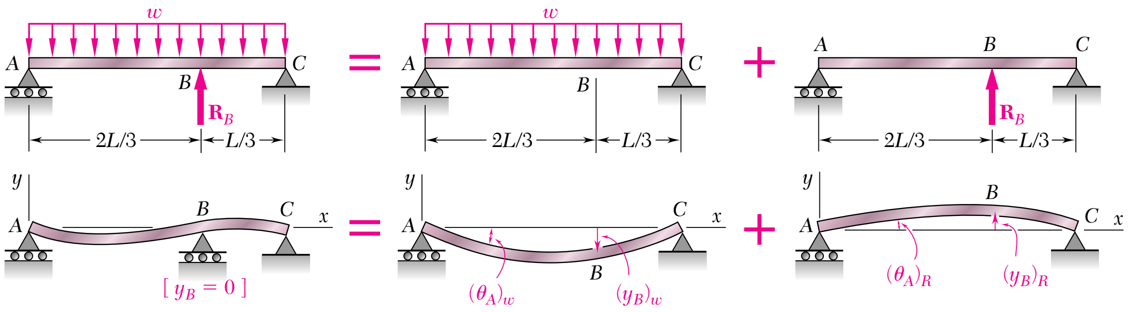


PROBLEMA MODELO 9.8

Para la viga y carga mostradas en la figura, halle *a*) la reacción de cada apoyo, *b*) la pendiente en el extremo *A*.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. La reacción $\mathbf{R}_B$ se escoge como redundante y se considera como carga desconocida. Las deflexiones debidas a la carga distribuida y a la reacción $\mathbf{R}_B$ se examinan separadamente, como se indica en la figura.



Para cada carga, la deflexión en el punto B se halla usando la tabla de *deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

Carga distribuida. Se utiliza el caso 6 del apéndice D

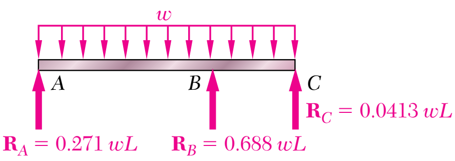
$$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

En el punto B, $x = \frac{2}{3}L$:

$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI}\left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right)\right] = -0.01132\frac{wL^4}{EI}$$

Carga por la reacción redundante. Del caso 5, apéndice D, con $a = \frac{2}{3}L$ y $b = \frac{1}{3}L$, se tiene

$$(y_B)_R = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL} = +\frac{R_B}{3EIL}\left(\frac{2}{3}L\right)^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 = 0.01646\frac{R_BL^3}{EI}$$



***a*) Reacciones de los apoyos.** Recordando que $y_B = 0$, se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R$$

$$0 = -0.01132\frac{wL^4}{EI} + 0.01646\frac{R_BL^3}{EI} \qquad \mathbf{R}_B = 0.688wL\uparrow ◀$$

Como la reacción R_B ahora es conocida, se utiliza el método de la estática para determinar las otras reacciones: $\mathbf{R}_A = 0.271wL\uparrow$ $\quad\mathbf{R}_C = 0.0413wL\uparrow$ ◀

***b*) Pendiente en el extremo *A*.** Refiriéndose de nuevo al apéndice D, se tiene

Carga distribuida. $(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} = -0.04167\frac{wL^3}{EI}$

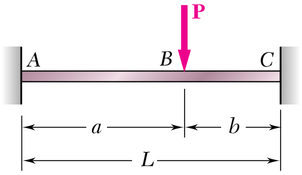
Carga de reacción redundante. Para $P = -R_B = -0.688wL$ y $b = \frac{1}{3}L$

$$(\theta_A)_R = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} = +\frac{0.688wL}{6EIL}\left(\frac{L}{3}\right)\left[L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2\right] \qquad (\theta_A)_R = 0.03398\frac{wL^3}{EI}$$

Finalmente, $\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R$

$$\theta_A = -0.04167\frac{wL^3}{EI} + 0.03398\frac{wL^3}{EI} = -0.00769\frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A = 0.00769\frac{wL^3}{EI} \measuredangle$$ ◀

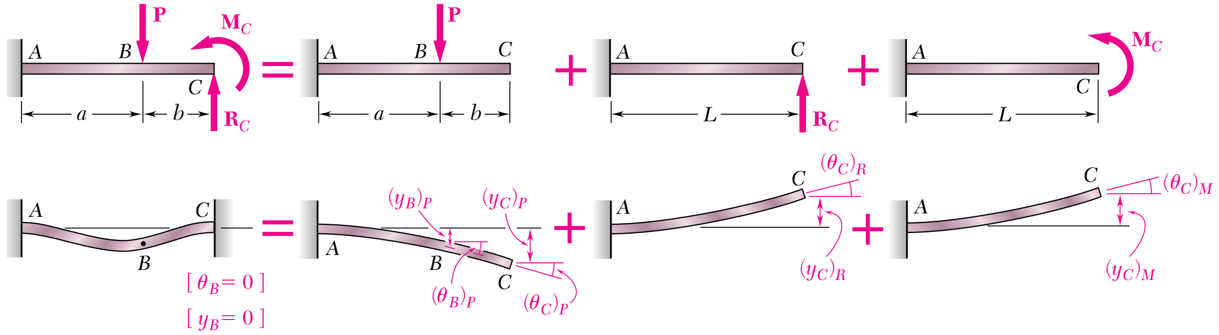


PROBLEMA MODELO 9.9

Para la viga y carga mostradas, determine la reacción en el empotramiento C.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Suponiendo que la carga axial en la viga es cero, la viga ABC es indeterminada de segundo grado y se escogen como redundantes la fuerza vertical $\mathbf{R}_C$ y el par $\mathbf{M}_C$. Las deformaciones producidas por la carga **P**, la fuerza $\mathbf{R}_C$ y el par $\mathbf{M}_C$ se consideran separadamente como se muestra.



Para cada carga, la pendiente y la deflexión en C se encuentran en la tabla *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

Carga P. Se observa que, para esta carga, la porción BC de la viga es recta.

$$(\theta_C)_P = (\theta_B)_P = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad (y_C)_P = (y_B)_P + (\theta_B)_P b$$

$$= -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI}b = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b)$$

Fuerza R_C $\qquad (\theta_C)_R = +\frac{R_C L^2}{2EI} \qquad (y_C)_R = +\frac{R_C L^3}{3EI}$

Par M_C $\qquad (\theta_C)_M = +\frac{M_C L}{EI} \qquad (y_C)_M = +\frac{M_C L^2}{2EI}$

Condiciones de frontera. En el extremo C la pendiente y la deflexión deben ser cero.

$[x = L, \theta_C = 0]$: $\qquad \theta_C = (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M$

$$0 = -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI} \tag{1}$$

$[x = L, y_C = 0]$: $\qquad y_C = (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M$

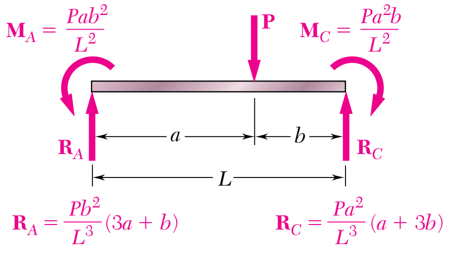
$$0 = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI} \tag{2}$$

Componentes de la reacción en *C*. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) se encuentran las reducciones

$$R_C = +\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \qquad \mathbf{R}_C = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)\uparrow \blacktriangleleft$$

$$M_C = -\frac{Pa^2 b}{L^2} \qquad \mathbf{M}_C = \frac{Pa^2 b}{L^2} \curvearrowright \blacktriangleleft$$

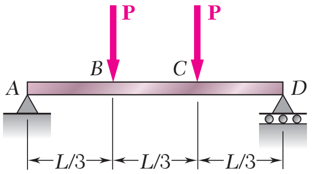
La reacción en A puede hallarse ahora usando los métodos de estática.



PROBLEMAS

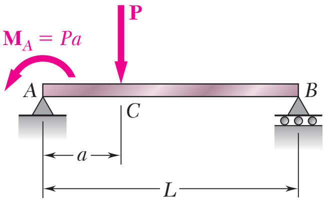
Utilice el método de superposición para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a flexión *EI* de cada viga es constante.

9.65 a 9.68 Para la viga y la carga mostradas en las figuras, determine *a*) la deflexión en *C*, *b*) la pendiente en el extremo *A*.



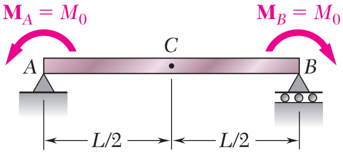
P
P
B
C
A
D
L/3
L/3
L/3

Figura P9.65



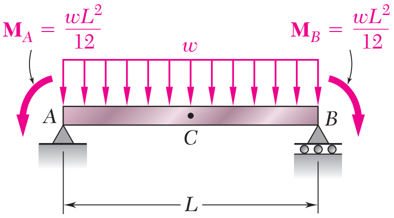
P
$M_A = Pa$
A
B
C
a
L

Figura P9.66



$M_A = M_0$
$M_B = M_0$
C
A
B
L/2
L/2

Figura P9.67



$M_A = \frac{wL^2}{12}$
w
$M_B = \frac{wL^2}{12}$
A
C
B
L

Figura P9.68

9.69* y *9.70 Para la viga en voladizo y la carga mostradas en las figuras, determine la pendiente y la deflexión en el extremo libre.

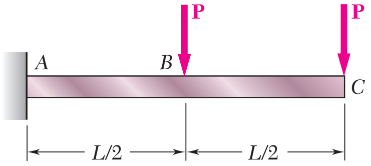
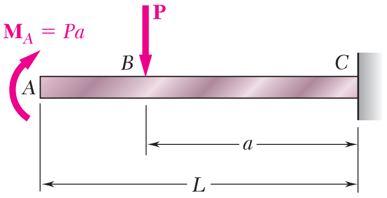


Figura *P9.69*



$M_A = Pa$
P
B
C
A
a
L

Figura *P9.70*

9.71 y 9.72 Para la viga en voladizo y la carga mostradas en las figuras, determine la pendiente y la deflexión en el punto *B*.

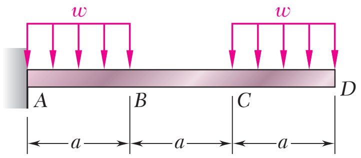
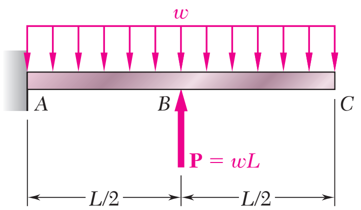


Figura P9.71



w
A
B
C
$P = wL$
L/2
L/2

Figura P9.72

9.73 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el extremo C. Use $E = 200$ GPa.

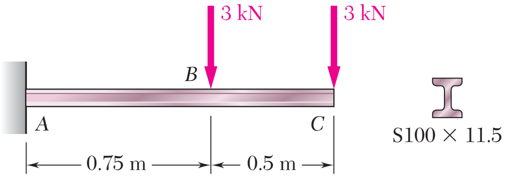

3 kN
3 kN
B
A
C
S100 × 11.5
0.75 m
0.5 m

Figura P9.73 y *P9.74*

9.74 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el punto B. Use $E = 200$ GPa.

9.75 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el extremo C. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.76 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y deflexión en el punto B. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

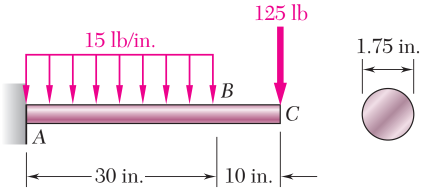

125 lb
15 lb/in.
1.75 in.
B
C
A
30 in.
10 in.

Figura P9.75 y P9.76

9.77 y *9.78* Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto C. Utilice $E = 200$ GPa.

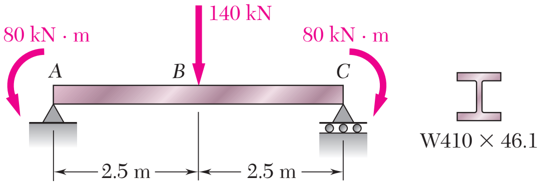

80 kN · m
140 kN
80 kN · m
A
B
C
W410 × 46.1
2.5 m
2.5 m

Figura P9.77

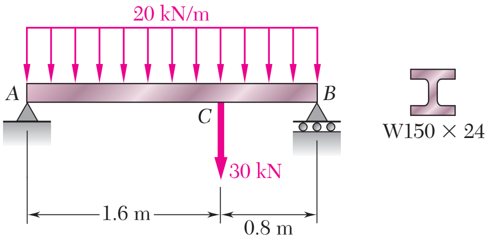

20 kN/m
A
B
C
W150 × 24
30 kN
1.6 m
0.8 m

Figura *P9.78*

9.79 y 9.80 Para la viga uniforme que se muestra en las figuras, determine *a*) la reacción en A, *b*) la reacción en B.

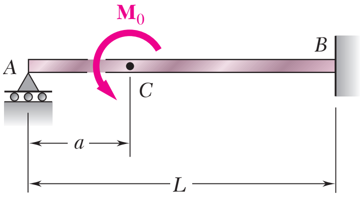


Figura P9.79

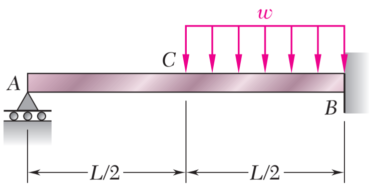


Figura P9.80

9.81 y *9.82* Para la viga uniforme que se muestra en las figuras, determine la reacción en cada uno de los tres apoyos.

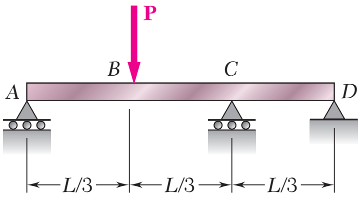

P
B
C
A
D
L/3
L/3
L/3

Figura P9.81

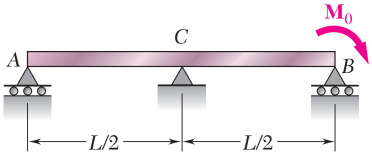


Figura *P9.82*

9.83 y *9.84* Para la viga que se muestra en las figuras, determine la reacción en *B*.

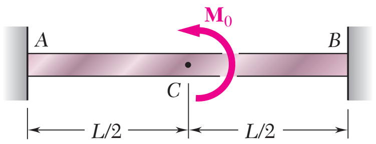

$\mathbf{M}_0$
A
B
C
L/2
L/2

Figura P9.83

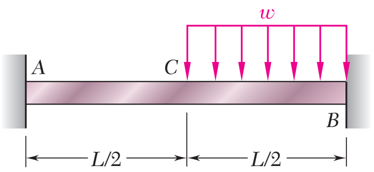


Figura *P9.84*

9.85 La viga *DE* descansa sobre la viga en voladizo *AC*, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa una varilla cuadrada con 10 mm de lado, determine la deflexión en el extremo *C* si el par de 25 N · m se aplica *a*) en el extremo *E* de la viga *DE*, *b*) en el extremo *C* de la viga *AC*. Utilice $E = 200$ GPa.

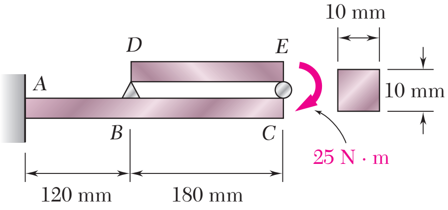

10 mm
D
E
A
10 mm
B
C
25 N · m
120 mm
180 mm

Figura P9.85

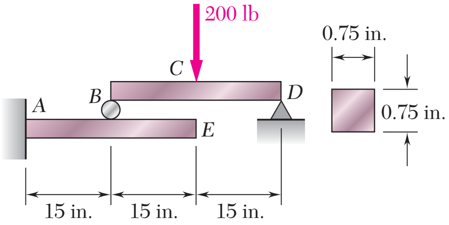

200 lb
0.75 in.
C
B
D
A
0.75 in.
E
15 in.
15 in.
15 in.

Figura P9.86

9.86 La viga *BD* descansa sobre la viga en voladizo *AE*, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa una varilla cuadrada con 0.75 in. de lado, determine para la carga que se indica, *a*) la deflexión en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *E*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.87 Las dos vigas que se muestran en la figura tienen la misma sección transversal y están unidas mediante una bisagra en *C*. Para las cargas mostradas, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

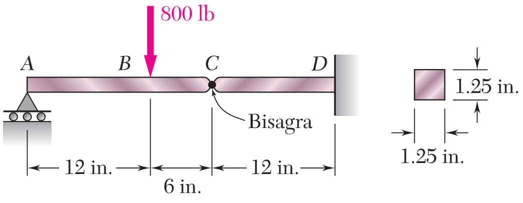

800 lb
A
B
C
D
Bisagra
1.25 in.
1.25 in.
12 in.
6 in.
12 in.

Figura P9.87

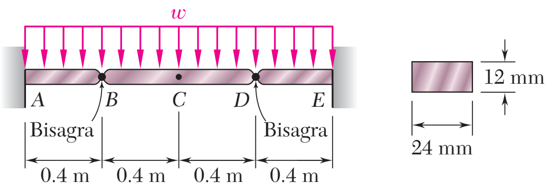

w
A
B
C
D
E
Bisagra
Bisagra
12 mm
24 mm
0.4 m
0.4 m
0.4 m
0.4 m

Figura P9.88

9.88 Una viga central *BD* está unida por medio de bisagras a dos vigas en voladizo *AB* y *DE*. Todas las vigas tienen la sección transversal que se indica. Para la carga que se muestra en la figura, determine el máximo valor de *w* si la deflexión en *C* no debe exceder 3 mm. Considere $E = 200$ GPa.

9.89 Antes de aplicar la carga uniformemente distribuida *w*, había un espacio $\delta_0 = 1.2$ mm entre los extremos de las barras en voladizo *AB* y *CD*. Si $E = 105$ GPa y $w = 30$ kN/m, determine *a*) la reacción en *A* y *b*) la reacción en *D*.

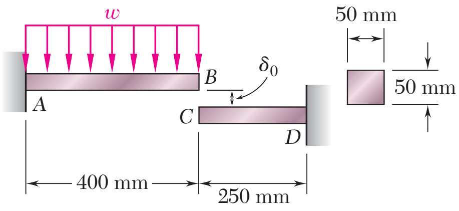

w
50 mm
B
δ_0
50 mm
A
C
D
400 mm
250 mm

Figura P9.89

9.90 Antes de aplicar la carga de 2 kips/ft, había un espacio $\delta_0 = 0.8$ in. entre la viga W16 × 40 y el apoyo en C. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la reacción en cada apoyo después de aplicar la carga uniformemente distribuida.

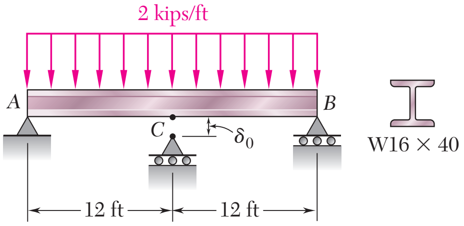

2 kips/ft
A
B
C
δ_0
W16 × 40
12 ft
12 ft

Figura *P9.90*

9.91 Las vigas AB y DE que se muestran en la figura tienen la misma rigidez a flexión. Para la carga mostrada, determine la reacción *a*) en B, *b*) en E.

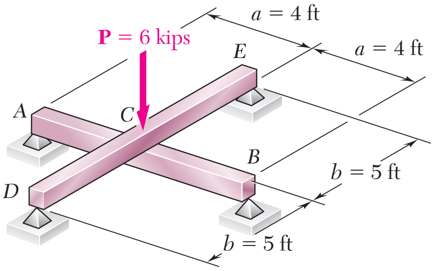

P = 6 kips
a = 4 ft
a = 4 ft
E
A
C
B
D
b = 5 ft
b = 5 ft

Figura *P9.91*

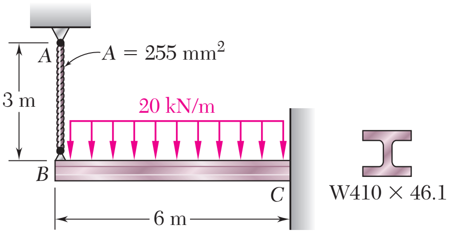

A
A = 255 mm²
3 m
20 kN/m
B
C
6 m
W410 × 46.1

Figura P9.92

9.92 La viga en voladizo BC está unida al cable de acero AB, como se muestra en la figura. Si se sabe que el cable estaba inicialmente tenso, determine la tensión en el cable causada por la carga distribuida que se indica. Use $E = 200$ GPa.

9.93 Una varilla BC con $\frac{7}{8}$ in. de diámetro está unida a la palanca AB y al apoyo fijo en C. La palanca AB tiene una sección transversal uniforme de $\frac{3}{8}$ in. de espesor y 1 in. de profundidad. Para la carga que se muestra en la figura, determine la deflexión en el punto A. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

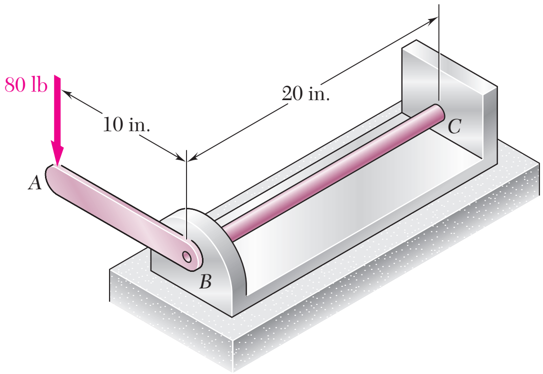

80 lb
10 in.
20 in.
A
B
C

Figura P9.93

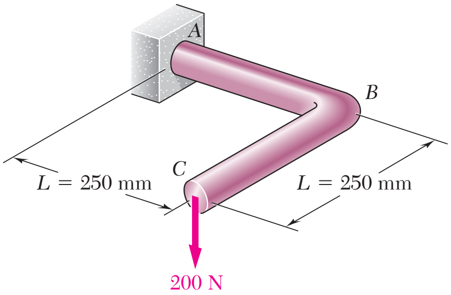

A
B
C
L = 250 mm
L = 250 mm
200 N

Figura P9.94

9.94 Una varilla de 16 mm de diámetro se dobla en la forma mostrada en la figura. Determine la deflexión del extremo C después de aplicar la fuerza de 200 N. Utilice $E = 200$ GPa y $G = 80$ GPa.

*9.9 TEOREMAS DE MOMENTO DE ÁREA

De la sección 9.2 a la 9.6, se usó un método matemático basado en la integración de ecuaciones diferenciales para determinar la deflexión y pendiente de una viga en cualquier punto dado. El momento flector se expresó como una función $M(x)$ de la distancia x medida a lo largo de la viga, y dos integraciones sucesivas condujeron a las funciones $\theta(x)$ y $y(x)$ que representan, respectivamente, la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga. En esta sección se verá cómo pueden usarse las propiedades geométricas de la curva elástica para determinar la deflexión y pendiente de una viga en un punto específico (figura 9.40).

Figura 9.40 Las deflexiones de las vigas que soportan los pisos de un edificio deben tomarse en cuenta en el proceso de diseño.

Considere una viga AB sometida a alguna carga arbitraria (figura 9.41*a*). Se dibuja el diagrama que representa la variación de la cantidad M/EI a lo largo de la viga, que se obtuvo dividiendo el momento flexionante M entre la rigidez de flexión EI (figura 9.41*b*). Se observa que, excepto para distintas escalas en la ordenada, este diagrama será el mismo que el del momento flector si la rigidez a flexión de la viga es constante.

Al recordar la ecuación (9.4) de la sección 9.3, y el hecho de que $dy/dx = \theta$, se tiene:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

o bien

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.54}$$†

Al considerar dos puntos arbitrarios C y D en la viga e integrando ambos miembros de la ecuación (9.54) de C a D, se tiene

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$$

o bien

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.55}$$

en donde θ_C y θ_D denotan la pendiente en los puntos C y D, respectivamente (figura 9.41*c*). Pero el miembro del lado derecho de la ecuación (9.55) representa el área bajo el diagrama (M/EI) entre C y D, y el miembro del lado izquierdo es el ángulo entre las tangentes a la curva elástica en C y D (figura 9.41*d*). Si se denota este ángulo como $\theta_{D/C}$, se tiene

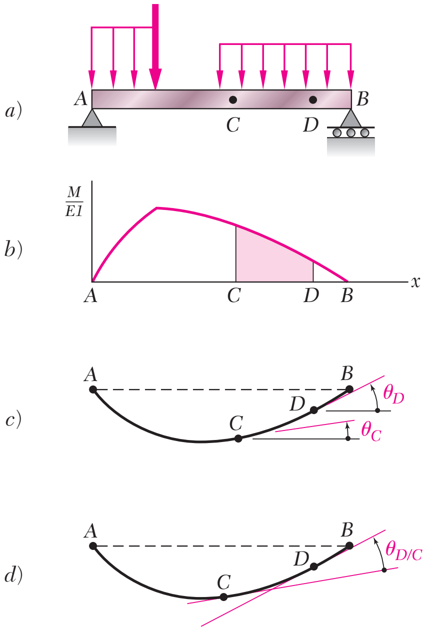


Figura 9.41

$$\boxed{\theta_{D/C} = \text{área debajo del diagrama } (M/EI) \text{ entre } C \text{ y } D} \tag{9.56}$$

Éste es el *primer teorema del momento de superficie*.

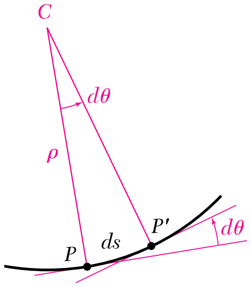


Figura 9.42

---

† Esta relación también puede obtenerse haciendo referencia a los resultados de la sección 9.3, al notar que el ángulo $d\theta$ formado por las tangentes a la curva elástica en P y P', también es el ángulo que forman las normales correspondientes a dicha curva (figura 9.42). Entonces se tiene que $d\theta = ds/\rho$, en donde ds es la longitud del arco PP' y ρ es el radio de curvatura en P. Sustituyendo para $1/\rho$ de la ecuación (4.21), y observando que, como la pendiente en P es muy pequeña, ds es igual en una primera aproximación a la distancia horizontal dx entre P y P', entonces se tiene

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.54}$$

Se observa que el ángulo $\theta_{D/C}$ y el área bajo el diagrama (M/EI) tienen el mismo signo. En otras palabras, un área positiva (por ejemplo, un área localizada sobre el eje x) corresponde a una rotación contra las agujas del reloj de la tangente a la curva elástica conforme se pasa de C a D, y un área negativa corresponde a una rotación en el sentido del movimiento del reloj.

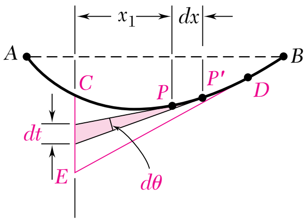


Figura 9.43

Considere dos puntos P y P' localizados entre C y D y a una distancia dx uno de otro (figura 9.43). Las tangentes a la curva elástica dibujadas en P y P' interceptan un segmento de longitud dt sobre la vertical a través del punto C. Dado que la pendiente θ en P y el ángulo $d\theta$ formado por las tangentes en P y P' son cantidades pequeñas, se puede asumir que dt es igual al arco de círculo de radio x_1 que subtiende el ángulo $d\theta$. Se tiene, entonces

$$dt = x_1\, d\theta$$

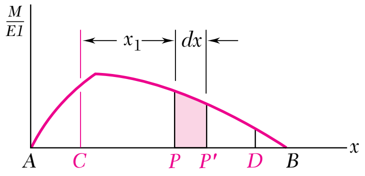


Figura 9.44

o, sustituyendo para $d\theta$ de la ecuación (9.54),

$$dt = x_1 \frac{M}{EI}\, dx \tag{9.57}$$

Ahora, se integra la ecuación (9.57) desde C hasta D. Se observa que, conforme el punto P describe la curva elástica desde C hasta D, la tangente en P recorre la vertical en C, desde C hasta E. La integral del miembro del lado izquierdo, entonces, es igual a la distancia vertical de C a la tangente en D. Esta distancia se denota por $t_{C/D}$ y se llama *desviación tangencial de C con respecto a D*. Así, se tiene

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}\, dx \tag{9.58}$$

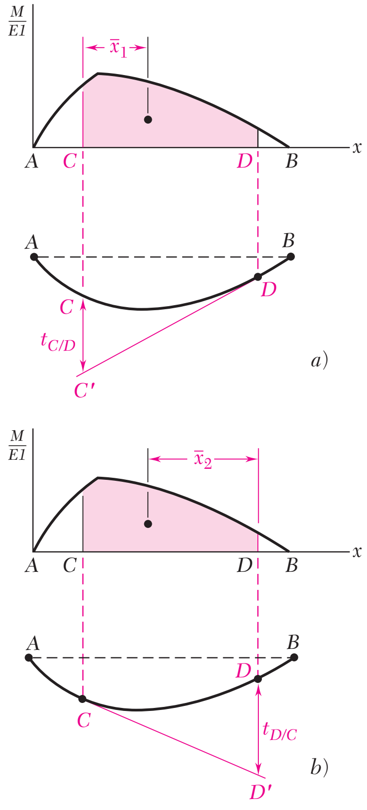


Figura 9.45

Se observa que (M/EI) dx representa un elemento de área bajo el diagrama (M/EI), y $x_1(M/EI)\,dx$ es el primer momento de ese elemento con respecto al eje vertical que pasa por C (figura 9.44). El miembro del lado derecho de la ecuación (9.58), entonces, representa el primer momento del área localizada bajo el diagrama (M/EI) entre C y D, con respecto a dicho eje.

Por tanto, es posible establecer el *segundo teorema del momento de área* como sigue: *la desviación tangencial $t_{C/D}$ de C con respecto a D es igual al primer momento del área bajo el diagrama (M/EI) entre C y D con respecto a un eje vertical que pasa por C.*

Si se tiene presente que el primer momento de un área con respecto a un eje es igual al producto del área con la distancia de su centroide a dicho eje, también puede establecerse el segundo teorema del momento de área como sigue:

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\, \bar{x}_1 \tag{9.59}$$

en donde el área se refiere al área bajo el diagrama (M/EI), y donde $\bar{x}_1$ es la distancia del centroide del área al eje vertical que pasa por C (figura 9.45*a*).

Se debe tener cuidado para distinguir entre la desviación tangencial de C con respecto a D, denotada por $t_{C/D}$, y la desviación tangencial de D con respecto a C, la cual se denota por $t_{D/C}$. La desviación tangencial $t_{D/C}$ representa la distancia vertical de D a la tangente a la curva elástica en C, y se obtiene multiplicando el área bajo el diagrama (M/EI) por la distancia $\bar{x}_2$ desde su centroide al eje vertical que pasa por D (figura 9.45*b*):

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_2 \tag{9.60}$$

Se observa que, si el área bajo el diagrama (M/EI) se localiza arriba del eje x, su primer momento con respecto al eje vertical será positivo; si se localiza abajo del eje x, su primer momento será negativo. En la figura 9.45 se observa que un punto con una desviación tangencial *positiva* se localiza *arriba* de la tangente correspondiente, mientras que un punto con una desviación tangencial *negativa* se localizará *debajo* de esa tangente.

*9.10 APLICACIÓN A VIGAS EN VOLADIZO Y VIGAS CON CARGAS SIMÉTRICAS

Se recuerda que el primer teorema de momento de área que se obtuvo en la sección precedente define el ángulo $\theta_{D/C}$ *entre* las tangentes en dos puntos C y D de la curva elástica. Entonces, el ángulo θ_D que la tangente en D forma con la horizontal, es decir, la pendiente en D, puede obtenerse sólo si se conoce la pendiente en C. En forma similar, el segundo teorema de momento de área define la distancia vertical de un punto de la curva elástica desde la tangente en otro punto. La desviación tangencial $t_{D/C}$, entonces, ayudará a localizar el punto D sólo si se conoce la tangente en C. Se concluye que los dos teoremas de momento de área se pueden aplicar eficazmente a la determinación de pendientes y deflexiones sólo si primero se ha determinado una cierta *tangente de referencia* a la curva elástica.

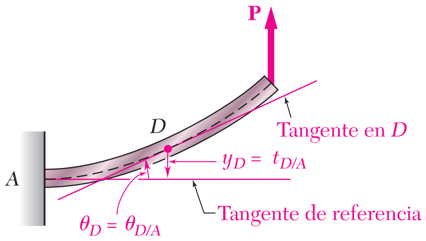


Figura 9.46

En el caso de una *viga en voladizo* (figura 9.46), se conoce la tangente a la curva elástica en el extremo fijo A y puede usarse como la tangente de referencia. Como $\theta_A = 0$, la pendiente de la viga en cualquier punto D es $\theta_D = \theta_{D/A}$ y puede obtenerse por medio del primer teorema de momento de superficie. Por otro lado, la deflexión y_D del punto D es igual a la desviación tangencial $t_{D/A}$ medida desde la tangente de referencia horizontal en A y puede obtenerse por medio del segundo teorema de momento de área.

En el caso de una viga AB apoyada simplemente con una *carga simétrica* (figura 9.47*a*) o en el caso de una viga simétrica colgante con carga simétrica (véase el problema modelo 9.11), la tangente en el centro C de la viga debe ser horizontal en razón de la simetría y puede usarse como la tangente de referencia (figura 9.47*b*). Como $\theta_C = 0$, la pendiente en el apoyo B es $\theta_B = \theta_{B/C}$ y puede obtenerse por medio del primer teorema de momento de área. También se observa que $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{B/C}$ y, por tanto, puede obtenerse por medio del segundo teorema de momento de superficie. La pendiente en cualquier otro punto D de la viga (figura 9.47*c*) se encuentra de manera similar, y la deflexión D puede expresarse como $y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$.

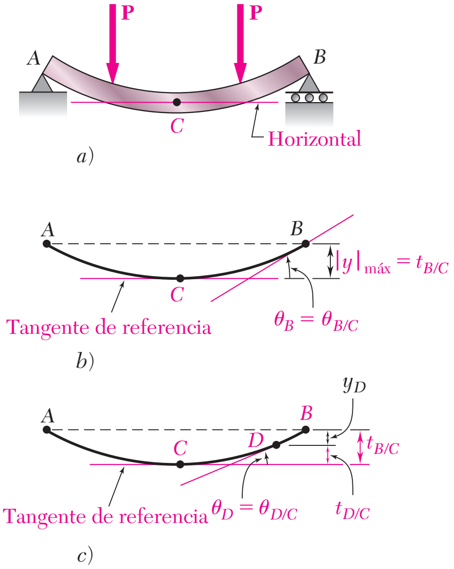


Figura 9.47

EJEMPLO 9.09

Determine la pendiente y deflexión en el extremo *B* de la viga prismática volada *AB* cuando está cargada como se indica (figura 9.48), si se sabe que la rigidez de flexión de la viga es $EI = 10\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$.

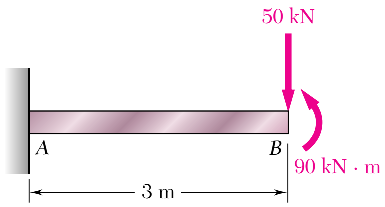
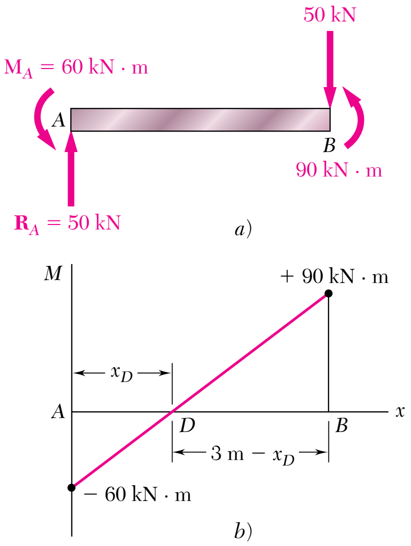


Figura 9.48

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.49*a*). Al sumar las componentes verticales y los momentos respecto a *A*, se encuentra que la reacción en el extremo fijo *A* consta de una componente de fuerza vertical $\mathbf{R}_A$ de 50 kN y un par $\mathbf{M}_A$ de 60 kN · m en sentido contrario al de las agujas del reloj. En seguida, se dibuja el diagrama de momento flector (figura 9.49*b*) y se determina, a partir de triángulos semejantes, la distancia x_D del extremo *A* al punto *D* de la viga, donde $M = 0$:

$$\frac{x_D}{60} = \frac{3 - x_D}{90} = \frac{3}{150} \qquad x_D = 1.2\ \text{m}$$



a)

b)

Figura 9.49

Dividiendo la rigidez a flexión *EI* se obtienen los valores obtenidos para *M*, se dibuja el diagrama (*M*/*EI*) (figura 9.50) y se calculan las áreas que corresponden, respectivamente, a los segmentos *AD* y *DB*, asignándose signo positivo al área localizada arriba del eje *x*, y signo negativo a la ubicada debajo de dicho eje. Usando el primer teorema de momento de área, se tiene

$$\begin{aligned}\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A &= \text{área de } A \text{ a } B = A_1 + A_2\\ &= -\tfrac{1}{2}(1.2\ \text{m})(6 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})\\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(1.8\ \text{m})(9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})\\ &= -3.6 \times 10^{-3} + 8.1 \times 10^{-3}\\ &= +4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

y, como $\theta_A = 0$,

$$\theta_B = +4.5 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

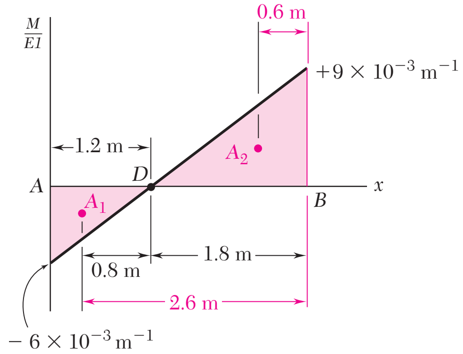


Figura 9.50

Ahora, con el segundo teorema de momento de área, se escribe que la desviación tangencial $t_{B/A}$ es igual al primer momento respecto a un eje vertical que pasa por *B* del área total entre *A* y *B*. Expresando el momento de cada área parcial como el producto de dicha área con la distancia de su centroide al eje que pasa por *B*, se tiene

$$\begin{aligned}t_{B/A} &= A_1(2.6\ \text{m}) + A_2(0.6\ \text{m})\\ &= (-3.6 \times 10^{-3})(2.6\ \text{m}) + (8.1 \times 10^{-3})(0.6\ \text{m})\\ &= -9.36\ \text{mm} + 4.86\ \text{mm} = -4.50\ \text{mm}\end{aligned}$$

Como la tangente de referencia en *A* es horizontal, la deflexión en *B* es igual a $t_{B/A}$ y se tiene que

$$y_B = t_{B/A} = -4.50\ \text{mm}$$

En la figura 9.51 se ha bosquejado la viga una vez deflectada.

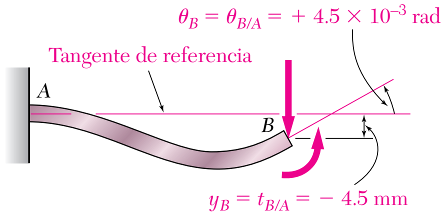


Figura 9.51

*9.11 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLECTOR POR PARTES

En muchas aplicaciones, se simplifica la determinación del ángulo $\theta_{D/C}$ y de la desviación tangencial $t_{D/C}$ si el efecto de cada carga se evalúa en forma independiente. Se dibuja un diagrama (M/EI) distinto para cada carga, y se obtiene el ángulo $\theta_{D/C}$ sumando algebraicamente las áreas bajo los distintos diagramas. En forma similar, la desviación tangencial $t_{D/C}$ se obtiene con la suma de los primeros momentos de estas áreas respecto a un eje vertical que pasa por D. De un diagrama (M/EI) dibujado en la forma descrita se dice que fue *dibujado por partes*.

Cuando se dibuja por partes un momento flector diagrama (M/EI), las distintas áreas definidas por éste consisten en formas geométricas simples, tales como rectángulos, triángulos y segmentos parabólicos. Por conveniencia, en la figura 9.52 se indican las áreas y centroides de dichas formas.

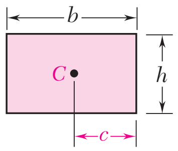
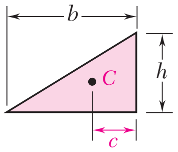
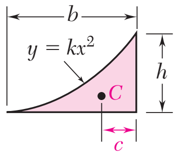
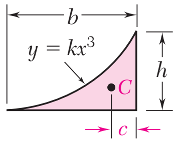
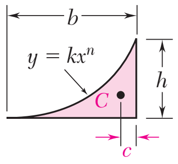
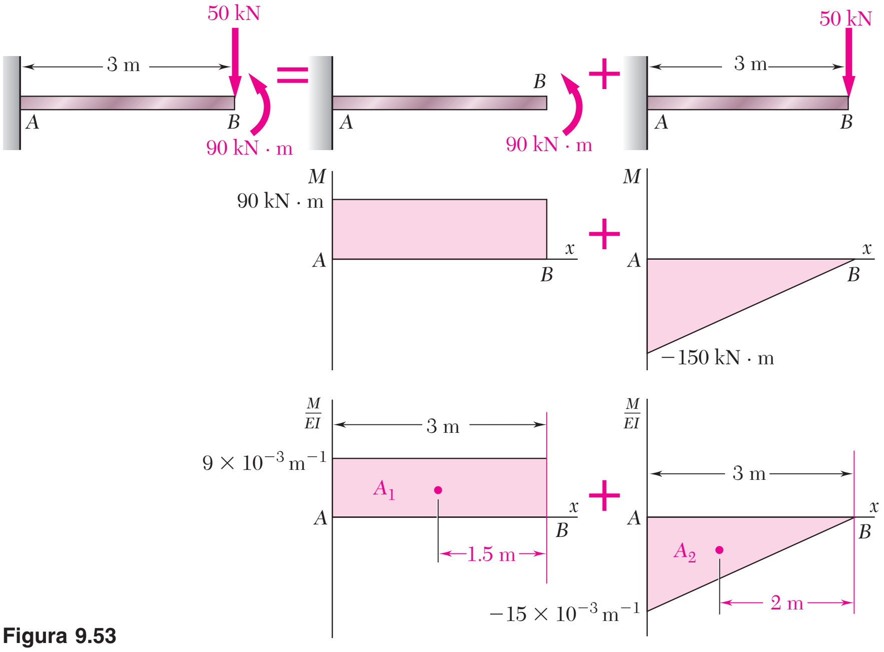
Forma		Área	c
Rectángulo		bh	$\frac{b}{2}$
Triángulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
Segmento parabólico		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
Segmento cúbico		$\frac{bh}{4}$	$\frac{b}{5}$
Segmento en general		$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{b}{n+2}$

Figura 9.52 Áreas y centroides de las formas más comunes.

EJEMPLO 9.10

Determine la pendiente y deflexión en el extremo *B* de la viga prismática del ejemplo 9.09, y dibuje el diagrama de momento flector por partes.



50 kN
3 m
A
B
90 kN · m
=
B
A
90 kN · m
+
50 kN
3 m
A
B
M
90 kN · m
A
x
B
+
M
A
x
B
−150 kN · m
M/EI
3 m
9 × 10⁻³ m⁻¹
A₁
A
x
B
1.5 m
+
M/EI
3 m
A
A₂
x
B
2 m
−15 × 10⁻³ m⁻¹

Figura 9.53

Se reemplaza la carga dada por dos cargas equivalentes, como se observa en la figura 9.53, y se dibujan los correspondientes diagramas de momento flector y los diagramas (*M*/*EI*) de derecha a izquierda, comenzando en el extremo libre *B*.

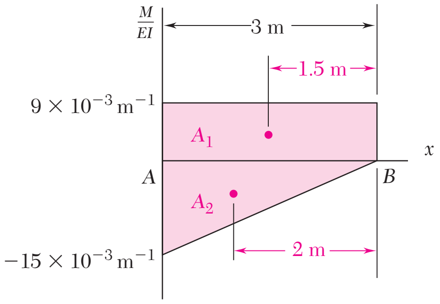
Al aplicar el primer teorema de momento de área, y recordando que $\theta_A = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta_{B/A} &= A_1 + A_2\\ &= (9\times10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m}) - \tfrac{1}{2}(15\times10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m})\\ &= 27\times10^{-3} - 22.5\times10^{-3} = 4.5\times10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

Al aplicar al segundo teorema de momento de área, se calcula el primer momento de cada área sobre un eje vertical que pase por *B* y queda

$$\begin{aligned}y_B = t_{B/A} &= A_1(1.5\ \text{m}) + A_2(2\ \text{m})\\ &= (27\times10^{-3})(1.5\ \text{m}) - (22.5\times10^{-3})(2\ \text{m})\\ &= 40.5\ \text{mm} - 45\ \text{mm} = -4.5\ \text{mm}\end{aligned}$$

En la práctica es conveniente agrupar en un solo dibujo las dos partes del diagrama (*M*/*EI*) (figura 9.54).



M/EI
3 m
1.5 m
9 × 10⁻³ m⁻¹
A₁
x
A
B
A₂
2 m
−15 × 10⁻³ m⁻¹

Figura 9.54

EJEMPLO 9.11

Para la viga prismática AB y la carga que se muestra (figura 9.55), determine la pendiente en el apoyo y la deflexión máxima.

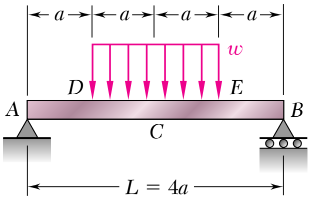

a
a
a
a
w
D
E
A
B
C
L = 4a

Figura 9.55

Primero se bosqueja la viga deflectada (figura 9.56). Como la tangente en el centro C de la viga es horizontal, se usará como tangente de referencia, y se tiene que $|y|_{\text{máx}} = t_{A/C}$. Por otro lado, como $\theta_C = 0$, se tiene que

$$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A \qquad \text{o} \qquad \theta_A = -\theta_{C/A}$$

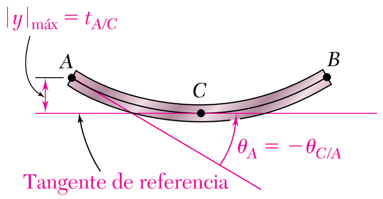

$|y|_{\text{máx}} = t_{A/C}$
A
B
C
$\theta_A = -\theta_{C/A}$
Tangente de referencia

Figura 9.56

Del diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.57), se deduce que

$$R_A = R_B = wa$$

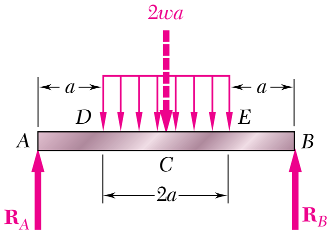

2wa
a
a
D
E
A
B
C
2a
$\mathbf{R}_A$
$\mathbf{R}_B$

Figura 9.57

A continuación, se dibujan los diagramas de esfuerzo cortante y de momento flector para el tramo AC de la viga. Estos diagramas se dibujan por partes, considerando por separado los efectos de la reacción $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Sin embargo, por conveniencia, las dos partes de cada diagrama se grafican juntas (figura 9.58). Recuerde, de la sección 5.3, que al estar uniformemente distribuida la carga, las partes correspondientes de los diagramas de cortante y momento flector serán lineal y parabólica, respectivamente. Las áreas y centroides del triángulo y del segmento parabólico pueden obtenerse de la figura 9.52, y se encuentra que son, respectivamente,

$$A_1 = \frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2wa^2}{EI}\right) = \frac{2wa^3}{EI}$$

y

$$A_2 = -\frac{1}{3}(a)\left(\frac{wa^2}{2EI}\right) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Al aplicar el primer teorema de momento de área se obtiene

$$\theta_{C/A} = A_1 + A_2 = \frac{2wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{11wa^3}{6EI}$$

Al observar en las figuras 9.55 y 9.56 que $a = \frac{1}{4}L$ y $\theta_A = -\theta_{C/A}$, se tiene que

$$\theta_A = -\frac{11wa^3}{6EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

Al aplicar el segundo teorema de momento de área resulta,

$$t_{A/C} = A_1\frac{4a}{3} + A_2\frac{7a}{4} = \left(\frac{2wa^3}{EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{7a}{4} = \frac{19wa^4}{8EI}$$

y

$$|y|_{\text{máx}} = t_{A/C} = \frac{19wa^4}{8EI} = \frac{19wL^4}{2048EI}$$

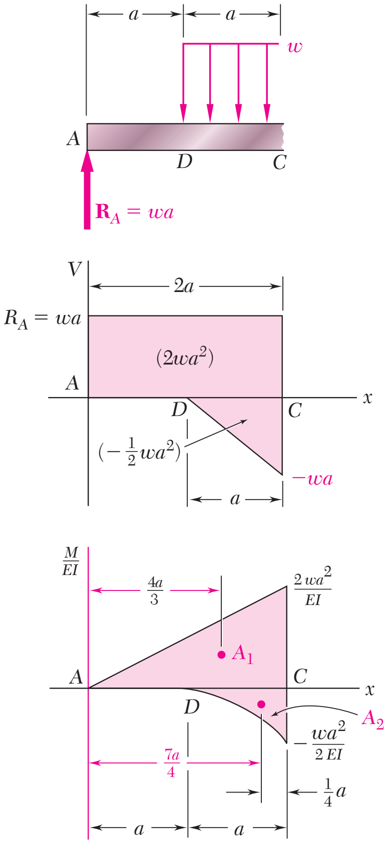
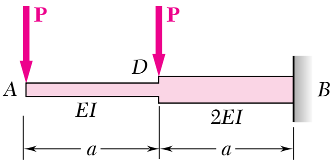
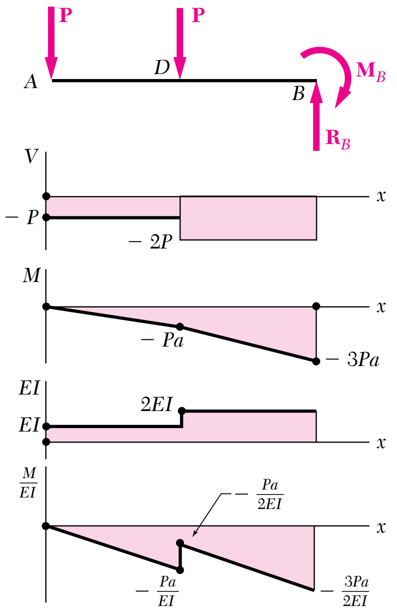

a
a
w
A
D
C
$\mathbf{R}_A = wa$
V
2a
$R_A = wa$
$(2wa^2)$
A
x
D
C
$(-\frac{1}{2}wa^2)$
$-wa$
a
$\frac{M}{EI}$
$\frac{4a}{3}$
$\frac{2wa^2}{EI}$
A_1
A
C
x
D
A_2
$-\frac{wa^2}{2EI}$
$\frac{7a}{4}$
$\frac{1}{4}a$
a
a

Figura 9.58


P
P
D
A
B
EI
2EI
a
a

PROBLEMA MODELO 9.10

Los travesaños prismáticos AD y DB se encuentran soldados entre sí para formar la viga volada ADB. Si se sabe que la rigidez a flexión es EI en el tramo AD de la viga, y $2EI$ en el tramo DB, determine, para la carga que se muestra en la figura, la pendiente y la deflexión en el extremo A.

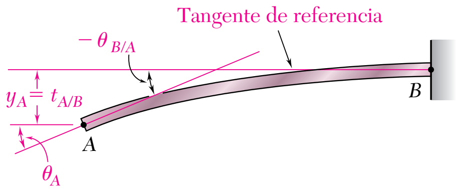

P
P
A
D
B
M_B
R_B
V
x
− P
− 2P
M
x
− Pa
− 3Pa
EI
2EI
EI
x
M/EI
− Pa/2EI
x
− Pa/EI
− 3Pa/2EI

SOLUCIÓN

Diagrama (M/EI). Primero se dibuja el diagrama de momento flector para la viga y después se obtiene el diagrama (M/EI) dividiendo el valor de M en cada punto de la viga entre el valor correspondiente de rigidez a flexión.

Tangente de referencia. Se elige la tangente horizontal en el extremo fijo B como la tangente de referencia. Como $\theta_B = 0$ y $y_B = 0$, queda

$$\theta_A = -\theta_{B/A} \qquad y_A = t_{A/B}$$

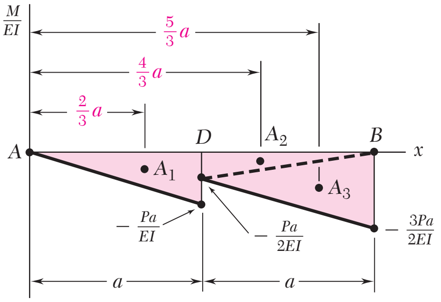

Tangente de referencia
− θ B/A
y_A = t_A/B
B
A
θ_A

Pendiente en A. Al dividir el diagrama (M/EI) en las tres partes que se muestran, se tiene

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\frac{3Pa}{2EI}a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$


M/EI
5/3 a
4/3 a
2/3 a
A
D
A_2
B
x
A_1
A_3
− Pa/EI
− Pa/2EI
− 3Pa/2EI
a
a

Al usar el primer teorema de momento de área, queda

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

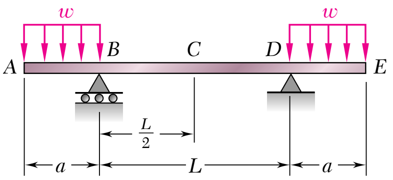
$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \qquad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI} \measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexión en A. Con el segundo teorema de momento de área, se tiene

$$y_A = t_{A/B} = A_1\left(\frac{2}{3}a\right) + A_2\left(\frac{4}{3}a\right) + A_3\left(\frac{5}{3}a\right)$$

$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right)\frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \qquad y_A = \frac{23Pa^3}{12EI}\downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 9.11

Para la viga prismática y la carga que se muestra en la figura, determine la pendiente y la deflexión en el extremo *E*.

SOLUCIÓN

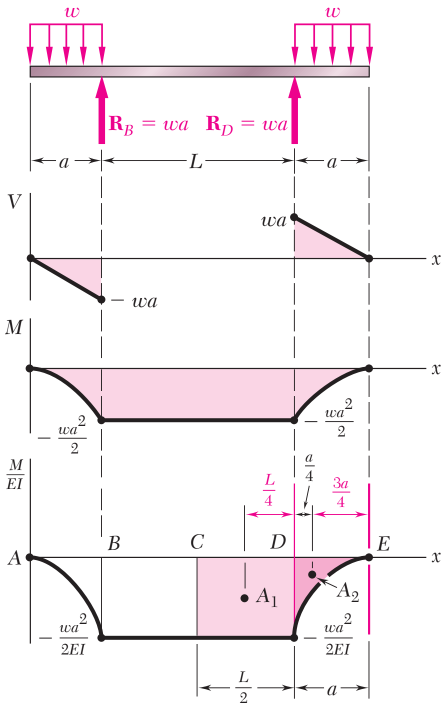


Diagrama (*M/EI*). Del diagrama de cuerpo libre de la viga, se determinan las reacciones y después se dibujan los diagramas de momento cortante y flector. Como la rigidez a flexión de la viga es constante, se divide cada valor de *M* entre *EI* y se obtiene el diagrama (*M*/*EI*) que se muestra.

Tangente de referencia. Como la viga y su carga son simétricas respecto al punto medio *C*, la tangente en *C* es horizontal y se utiliza como tangente de referencia. Al mirar el boceto se observa que como $\theta_C = 0$,

$$\theta_E = \theta_C + \theta_{E/C} = \theta_{E/C} \qquad (1)$$

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} \qquad (2)$$

Pendiente en *E*. Con referencia al diagrama (*M*/*EI*) y usando el primer teorema de momento de área, se tiene que

$$A_1 = -\frac{wa^2}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

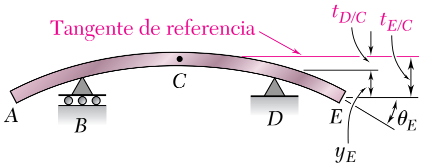
$$A_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)(a) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Con la ecuación (1) queda

$$\theta_E = \theta_{E/C} = A_1 + A_2 = -\frac{wa^2L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_E = -\frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a) \qquad \theta_E = \frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a)\measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexión en *E*. Al emplear el segundo teorema de momento de área, se tiene que



$$t_{D/C} = A_1\frac{L}{4} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{L}{4} = -\frac{wa^2L^2}{16EI}$$

$$t_{E/C} = A_1\left(a + \frac{L}{4}\right) + A_2\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\left(a + \frac{L}{4}\right) + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^2L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

Al usar la ecuación (2), queda

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} = -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

$$y_E = -\frac{wa^3}{8EI}(2L + a) \qquad y_E = \frac{wa^3}{8EI}(2L + a)\downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

Utilice el método de momento de área para resolver los siguientes problemas.

9.95 a *9.98* Para la viga en voladizo uniforme y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo libre, *b*) la deflexión en el extremo libre.

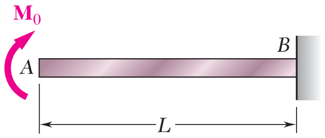

$\mathbf{M}_0$
A
B
L

Figura P9.95

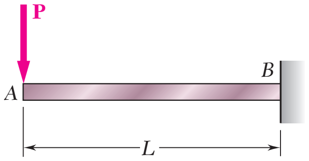


Figura P9.96

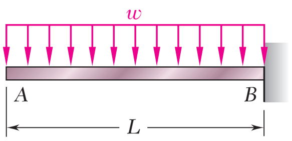


Figura P9.97

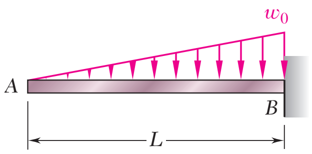


Figura *P9.98*

***9.99* y 9.100** Para la viga en voladizo uniforme y la carga que se muestran en las figuras, determine la pendiente y la deflexión en *a*) el punto *B*, *b*) el punto *C*.

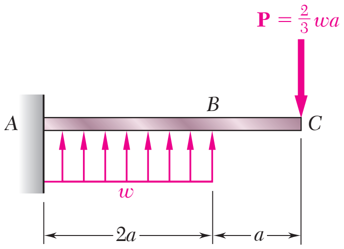

$\mathbf{P} = \frac{2}{3} wa$
A
B
C
w
$2a$
a

Figura *P9.99*

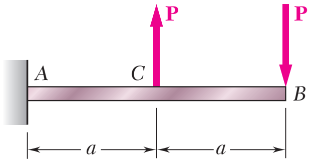


Figura P9.100

9.101 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

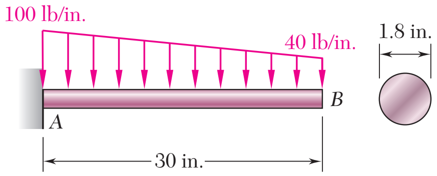

100 lb/in.
40 lb/in.
1.8 in.
A
B
30 in.

Figura P9.101

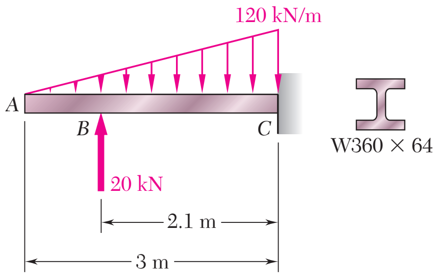

120 kN/m
A
B
C
W360 × 64
20 kN
2.1 m
3 m

Figura P9.102

9.102 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.103 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente y la deflexión en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

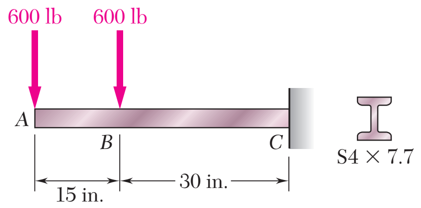

600 lb
600 lb
A
B
C
S4 × 7.7
15 in.
30 in.

Figura P9.103

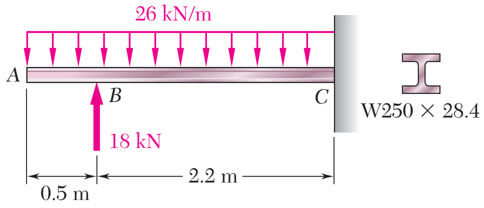

26 kN/m
A
B
C
W250 × 28.4
18 kN
0.5 m
2.2 m

Figura P9.104

9.104 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.105 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión y la pendiente en el extremo *A* ocasionadas por el momento $\mathbf{M}_0$.

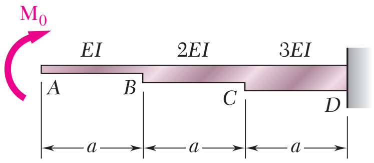

M0
EI
2EI
3EI
A
B
C
D
a
a
a

Figura *P9.105*

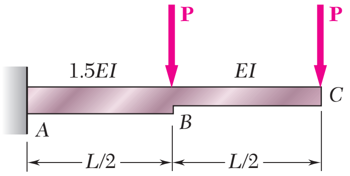

P
P
1.5EI
EI
A
B
C
L/2
L/2

Figura P9.106

9.106 Para la viga en voladizo y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

9.107 Dos placas de recubrimiento están soldadas a una viga de acero laminado como se muestra en la figura. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el extremo *A*.

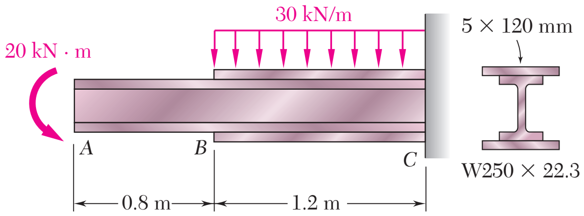

30 kN/m
20 kN · m
5 × 120 mm
A
B
C
W250 × 22.3
0.8 m
1.2 m

Figura P9.107

9.108 Dos placas de recubrimiento están soldadas a una viga de acero laminado como se muestra en la figura. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la pendiente y la deflexión en el extremo *C*.

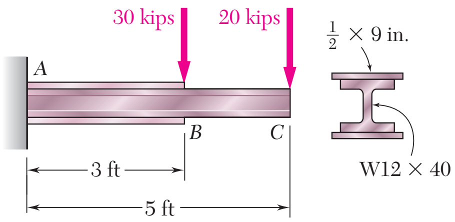

30 kips
20 kips
1/2 × 9 in.
A
B
C
W12 × 40
3 ft
5 ft

Figura *P9.108*

9.109 a 9.114 Para la viga prismática y la carga que se muestra en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

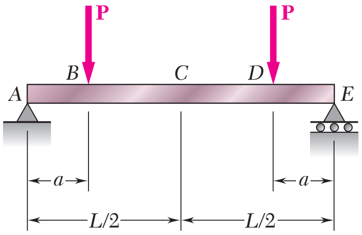

P
P
A
B
C
D
E
a
a
L/2
L/2

Figura P9.109

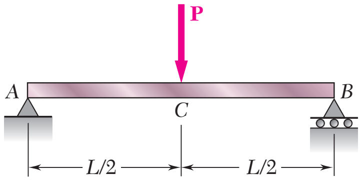


Figura P9.110

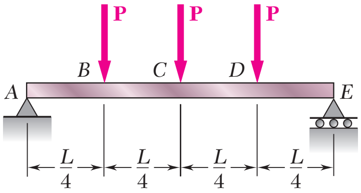

P
P
P
A
B
C
D
E
L/4
L/4
L/4
L/4

Figura P9.111

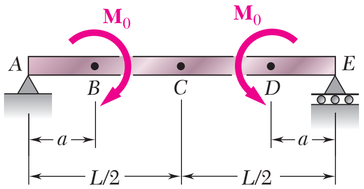

M_0
M_0
A
B
C
D
E
a
a
L/2
L/2

Figura P9.112

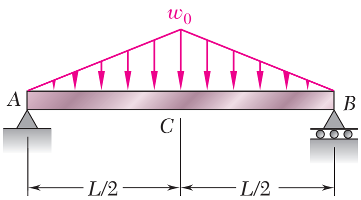


Figura *P9.113*

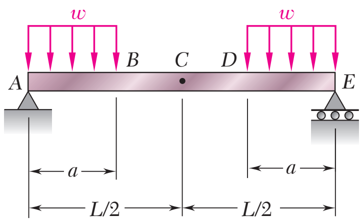

w
w
A
B
C
D
E
a
a
L/2
L/2

Figura P9.114

9.115 y *9.116* Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

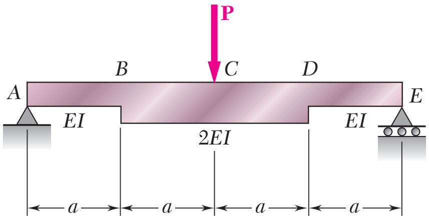

P
A
B
C
D
E
EI
2EI
EI
a
a
a
a

Figura P9.115

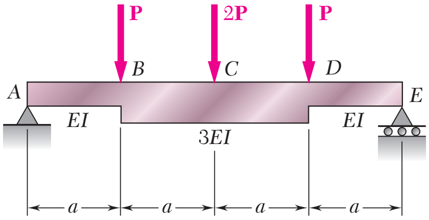

P
2P
P
A
B
C
D
E
EI
3EI
EI
a
a
a
a

Figura *P9.116*

9.117 Si se sabe que la magnitud de la carga **P** es de 7 kips, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

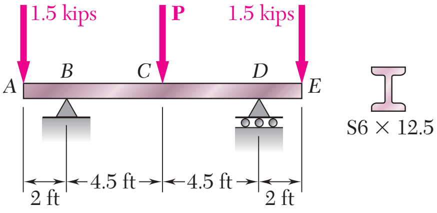

1.5 kips
P
1.5 kips
A
B
C
D
E
S6 × 12.5
2 ft
4.5 ft
4.5 ft
2 ft

Figura *P9.117*

9.118 y 9.119 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio de la viga. Use $E = 200$ GPa.

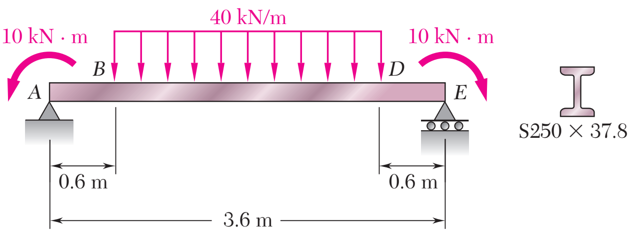

10 kN · m
40 kN/m
10 kN · m
A
B
D
E
S250 × 37.8
0.6 m
0.6 m
3.6 m

Figura P9.118

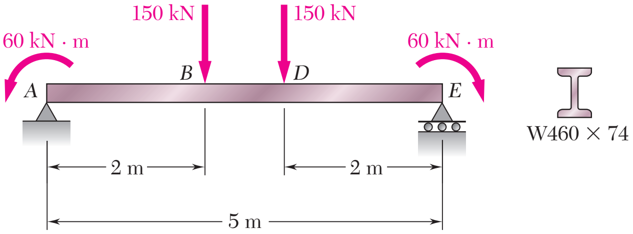

150 kN
150 kN
60 kN · m
60 kN · m
A
B
D
E
W460 × 74
2 m
2 m
5 m

Figura P9.119

9.120 Para la viga y la carga del problema 9.117, determine *a*) el valor de **P** para el cual la deflexión es cero en el punto medio *C* de la viga, *b*) la deflexión correspondiente en el extremo *A*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.121 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, y si se sabe que $w = 8$ kN/m, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice $E = 200$ GPa.

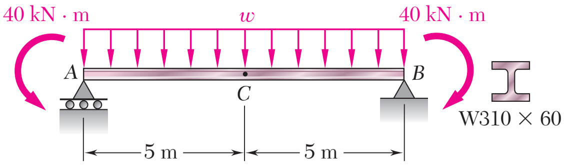

40 kN · m
w
40 kN · m
A
B
C
W310 × 60
5 m
5 m

Figura P9.121 y P9.122

9.122 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine el valor de *w* para el cual la deflexión es cero en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

***9.123** Una varilla uniforme *AE* se apoya en los puntos *B* y *D*. Determine la distancia *a* para la cual la pendiente en los extremos *A* y *E* es igual a cero.

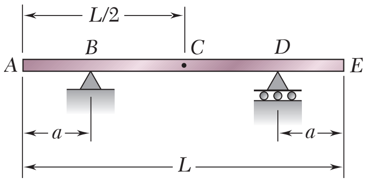

L/2
A
B
C
D
E
a
a
L

Figura P9.123 y P9.124

***9.124** Una varilla uniforme *AE* se apoya en los puntos *B* y *D*. Determine la distancia *a* desde los extremos de la varilla hasta los puntos de apoyo, si las deflexiones hacia abajo en los puntos *A*, *C* y *E* deben ser iguales.

*9.12 APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE MOMENTO DE ÁREA A VIGAS CON CARGAS ASIMÉTRICAS

En la sección 9.10 se vio que, cuando una viga colgante apoyada simplemente soporta una carga simétrica, la tangente al centro C de la viga es horizontal y puede usarse como tangente de referencia. Cuando una viga colgante apoyada simplemente soporta una carga asimétrica, en general no es posible determinar por inspección el punto de la viga donde la tangente es horizontal. Se deben emplear otros medios para localizar una tangente de referencia, por ejemplo, una tangente de pendiente conocida para usarse en la aplicación de cualquiera de los dos teoremas de momento de área.

Generalmente conviene más seleccionar la tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga. Por ejemplo, si se considera la tangente en el apoyo A de la viga AB apoyada simplemente (figura 9.59*a*) se determina su pendiente con el cálculo de la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto de A, y dividiendo $t_{B/A}$ entre la distancia L entre los apoyos. Si se recuerda que la desviación tangencial de un punto localizado arriba de la tangente es positiva, queda

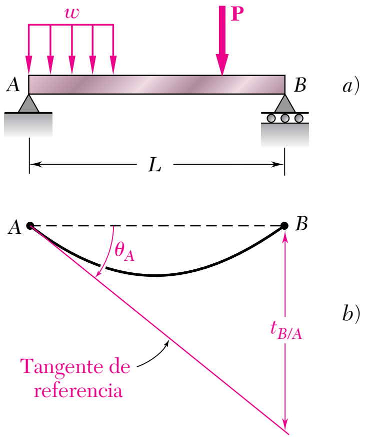


Figura 9.59

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} \tag{9.61}$$

Una vez que se ha encontrado la pendiente de la tangente de referencia, es posible determinar la pendiente θ_D de la viga en el punto D (figura 9.60) con el uso del primer teorema de momento de área para obtener $\theta_{D/A}$, y entonces se tiene

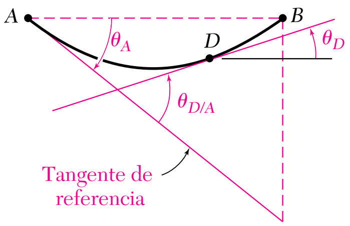


Figura 9.60

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} \tag{9.62}$$

La desviación tangencial $t_{D/A}$ de D respecto al apoyo A se obtiene del segundo teorema de momento de área. Se observa que $t_{D/A}$ es igual al segmento ED (figura 9.61) y representa la distancia vertical de D *a la tangente de referencia*. Por otro lado, la deflexión y_D del punto D representa la distancia vertical de D *a la línea horizontal AB* (figura 9.62). Como y_D es igual en magnitud al segmento FD, puede expresarse como la diferencia entre EF y ED (figura 9.63). Al analizar los triángulos semejantes AFE y ABH se ve que

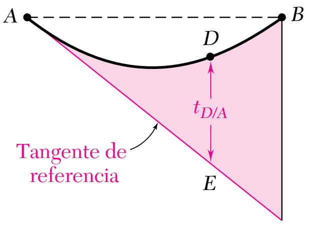


Figura 9.61

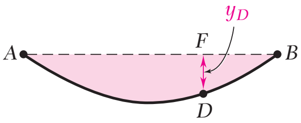


Figura 9.62

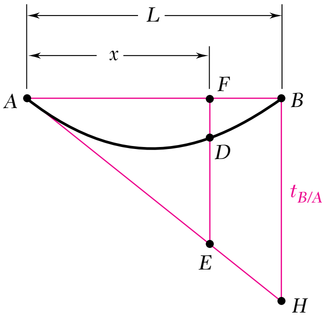


Figura 9.63

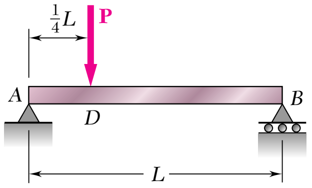
$$\frac{EF}{x} = \frac{HB}{L} \qquad \text{o} \qquad EF = \frac{x}{L} t_{B/A}$$

y al recordar las convenciones de signos para las deflexiones y desviaciones tangenciales, queda

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L} t_{B/A} \tag{9.63}$$

EJEMPLO 9.12

Para la viga prismática y la carga que se indica (figura 9.64) determine la pendiente y deflexión en el punto D.



$\frac{1}{4}L$
P
A
B
D
L

Figura 9.64

Tangente de referencia en el apoyo A. Se calculan las reacciones en los apoyos y se dibuja el diagrama (M/EI) (figura 9.65). Se determina la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto al apoyo A, aplicando el segundo teorema de momento de área y calculando los momentos de las áreas A_1 y A_2 arriba de un eje vertical que pasa por B. Queda

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{3PL^2}{128EI} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\frac{3L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{9PL^2}{128EI}$$

$$t_{B/A} = A_1\left(\frac{L}{12} + \frac{3L}{4}\right) + A_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{3PL^2}{128EI}\frac{10L}{12} + \frac{9PL^2}{128EI}\frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{128EI}$$

La pendiente de la tangente de referencia en A es (figura 9.66)

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\frac{7PL^2}{128EI}$$

Pendiente en D. Al aplicar el primer teorema de momento de área de A a D, queda

$$\theta_{D/A} = A_1 = \frac{3PL^2}{128EI}$$

Entonces, la pendiente en D es

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} = -\frac{PL^2}{32EI}$$

Deflexión en D. Primero se determina la desviación tangencial $DE = t_{D/A}$ con el cálculo del momento del área A_1 sobre un eje vertical que pasa por D:

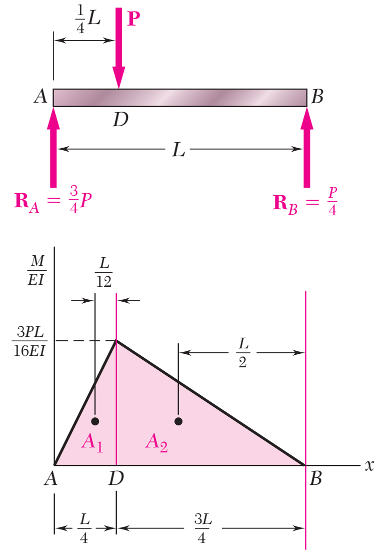
$$DE = t_{D/A} = A_1\left(\frac{L}{12}\right) = \frac{3PL^2}{128EI}\frac{L}{12} = \frac{PL^3}{512EI}$$

La deflexión en D es igual a la diferencia entre los segmentos DE y EF (figura 9.66). Queda

$$y_D = DE - EF = t_{D/A} - \tfrac{1}{4}t_{B/A}$$

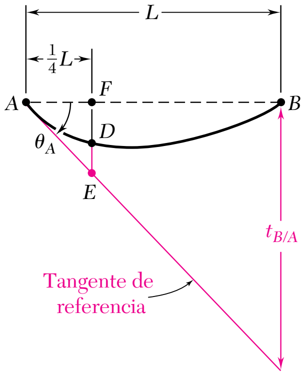
$$= \frac{PL^3}{512EI} - \frac{1}{4}\frac{7PL^3}{128EI}$$

$$y_D = -\frac{3PL^3}{256EI} = -0.01172PL^3/EI$$



$\frac{1}{4}L$
P
A
B
D
L
$\mathbf{R}_A = \frac{3}{4}P$
$\mathbf{R}_B = \frac{P}{4}$
$\frac{M}{EI}$
$\frac{L}{12}$
$\frac{3PL}{16EI}$
$\frac{L}{2}$
A_1
A_2
x
A
D
B
$\frac{L}{4}$
$\frac{3L}{4}$

Figura 9.65



L
$\frac{1}{4}L$
A
F
B
D
θ_A
E
$t_{B/A}$
Tangente de referencia

Figura 9.66

*9.13 DEFLEXIÓN MÁXIMA

Cuando una viga colgante apoyada simplemente soporta una carga asimétrica, la deflexión máxima, por lo general, no ocurre en el centro de la viga. Éste es el caso de las vigas que forman el marco de la plataforma horizontal del tráiler que se aprecia en la figura 9.67, la cual se utiliza para transportar un trascavo con ruedas.

Figura 9.67 Las deflexiones de las vigas que se usan en el puente deben analizarse para las diferentes posiciones posibles de la carga.

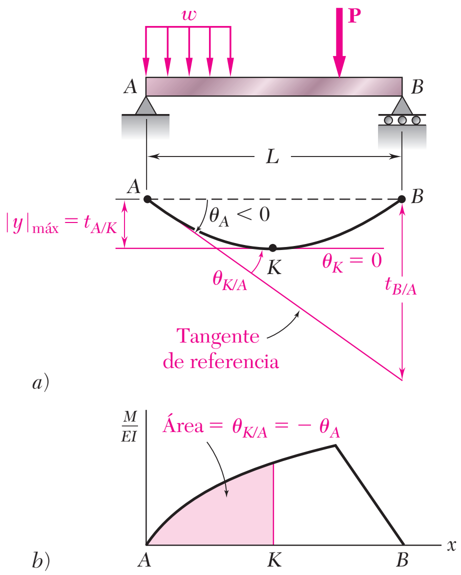


Figura 9.68

Para determinar la máxima deflexión de una viga como la descrita, se debe localizar el punto K de ella en el que la tangente es horizontal, y calcular la deflexión en dicho punto.

El análisis debe comenzar con la determinación de una tangente de referencia en uno de los apoyos. Si se selecciona el apoyo A, la pendiente θ_A se obtiene con el método utilizado en la sección precedente, es decir, con el cálculo de la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B con respecto a A y dividiendo dicha cantidad entre la distancia L entre los dos apoyos.

Como la pendiente θ_K en el punto K es cero (figura 9.68*a*), debe cumplirse que

$$\theta_{K/A} = \theta_K - \theta_A = 0 - \theta_A = -\theta_A$$

Si se recuerda el primer teorema de momento de área, se concluye que el punto K puede determinarse con la medición bajo el diagrama (M/EI) de un área igual a $\theta_{K/A} = -\theta_A$ (figura 9.68*b*).

Con la observación de que la deflexión máxima $|y|_{\text{máx}}$ es igual a la desviación tangencial $t_{A/K}$ del apoyo A con respecto a K (figura 9.68*a*), se obtiene $|y|_{\text{máx}}$ con el cálculo del primer momento del área A entre A y K respecto al eje vertical que pasa por A (figura 9.68*b*).

EJEMPLO 9.13

Determine la deflexión máxima de la viga del ejemplo 9.12.

Determinación del punto K en donde la pendiente vale cero. Recuerde del ejemplo 9.12, que la pendiente en el punto *D*, en donde se aplica la carga, es negativa. Se deduce que el punto *K*, donde la pendiente vale cero, se localiza entre *D* y el apoyo *B* (figura 9.69). Los cálculos, por tanto, se simplifican si se relaciona la pendiente en *K* con la pendiente en *B*, en vez de la pendiente en *A*.

Como en el ejemplo 9.12 ya se determinó la pendiente en *A*, la pendiente en *B* se obtiene con

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{B/A} = \theta_A + A_1 + A_2$$

$$\theta_B = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} + \frac{9PL^2}{128EI} = \frac{5PL^2}{128EI}$$

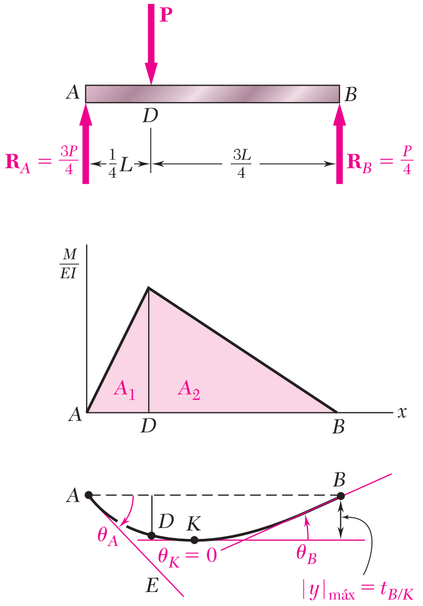


Figura 9.69

Al observar que el momento flector a una distancia u del extremo *B* es $M = \frac{1}{4}Pu$ (figura 9.70*a*), se expresa el área A' ubicada entre *K* y *B* bajo el diagrama (M/EI) (figura 9.70*b*) como

$$A' = \frac{1}{2}\frac{Pu}{4EI}u = \frac{Pu^2}{8EI}$$

Del primer teorema del momento de área se tiene

$$\theta_{B/K} = \theta_B - \theta_K = A'$$

y como $\theta_K = 0$, $\qquad \theta_B = A'$

Al sustituir los valores que se obtuvieron para θ_B y A', queda

$$\frac{5PL^2}{128EI} = \frac{Pu^2}{8EI}$$

y, al resolver para u, queda

$$u = \frac{\sqrt{5}}{4}L = 0.559L$$

Por tanto, la distancia del apoyo *A* al punto *K* es

$$AK = L - 0.559L = 0.441L$$

Deflexión máxima. La deflexión máxima $|y|_{máx}$ es igual a la desviación tangencial $t_{B/K}$ y, por tanto, al primer momento del área A' sobre un eje vertical que pasa por *B* (figura 9.70*b*). Se tiene

$$|y|_{máx} = t_{B/K} = A'\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^2}{8EI}\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^3}{12EI}$$

Al sustituir el valor obtenido para u, queda

$$|y|_{máx} = \frac{P}{12EI}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}L\right)^3 = 0.01456PL^3/EI$$

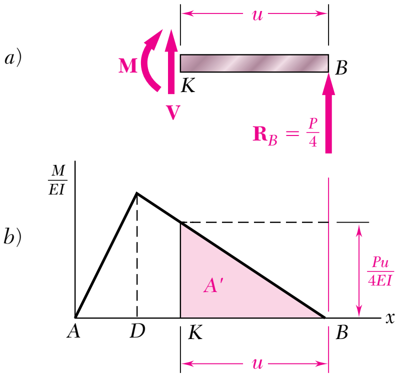


Figura 9.70

*9.14 USO DE LOS TEOREMAS DE MOMENTO DE ÁREA CON VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada se pueden determinar por medio del método de momento de área en una forma muy parecida a la que se describió en la sección 9.8. Por ejemplo, en el caso de una viga indeterminada al primer grado, se designa como redundante a una de las reacciones y se elimina o modifica de acuerdo con el apoyo correspondiente. Luego, a la reacción redundante se le trata como una carga desconocida que, junto con las demás cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. La condición de compatibilidad se expresa casi siempre escribiendo que la desviación tangencial de un apoyo respecto a otro es cero, o bien, que tiene un valor predeterminado.

Se dibujan dos diagramas de cuerpo libre distintos. Uno muestra *las cargas dadas y las reacciones correspondientes* en los apoyos que no hayan sido eliminados; el otro muestra *la reacción redundante y las reacciones correspondientes* en los mismos apoyos (véase el ejemplo 9.14). Después se dibuja un diagrama M/EI para cada una de las dos cargas, y las desviaciones tangenciales buscadas se obtienen con el segundo teorema de momento de área. Al superponer los resultados obtenidos, se expresa la condición requerida de compatibilidad y se determina la reacción redundante. Las otras reacciones se obtienen del diagrama de cuerpo libre de la viga.

Una vez determinadas las reacciones en los apoyos, es posible obtener la pendiente y deflexión por medio del método de momento de área en cualquier otro punto de la viga.

EJEMPLO 9.14

Determine la reacción en los apoyos para la viga prismática y carga que se muestra (figura 9.71).

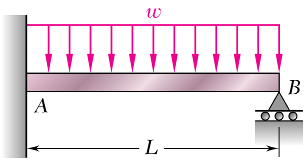


Figura 9.71

Se considera redundante al par que se ejerce en el extremo fijo A y se reemplaza al extremo fijo por un apoyo puntual. Ahora se considera al par $\mathbf{M}_A$ como una carga desconocida (figura 9.72*a*) y se determinará a partir de la condición de que la tangente a la viga en A debe ser horizontal. Se deduce que esta tangente debe pasar a través del apoyo B, y, entonces, que la desviación tangencial $t_{B/A}$ de B con respecto a A debe valer cero. Se llega a la solución con el cálculo separado de la desviación tangencial $(t_{B/A})_w$ ocasionada por la carga uniformemente distribuida w (figura 9.72*b*) y la desviación tangencial $(t_{B/A})_M$ producida por el par desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.72*c*).

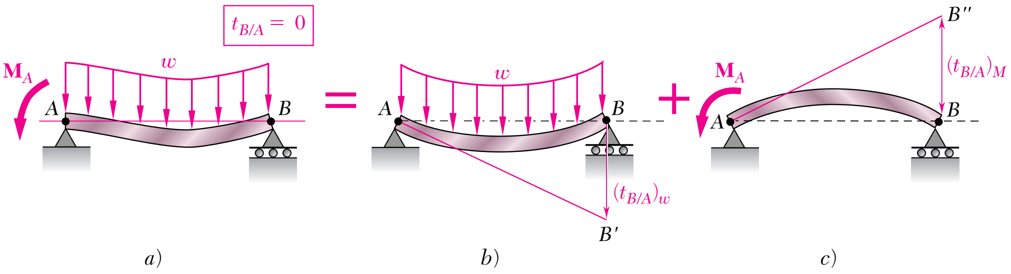


Figura 9.72

Al considerar primero el diagrama de cuerpo libre de la viga bajo la carga distribuida conocida w (figura 9.73*a*), se determinan las reacciones correspondientes en los apoyos A y B. Queda

$$(\mathbf{R}_A)_1 = (\mathbf{R}_B)_1 = \tfrac{1}{2}wL\uparrow \tag{9.64}$$

Ahora se dibujan los diagramas correspondientes de momento cortante y (M/EI) (figuras 9.73*b* y *c*). Al observar que M/EI queda representado por un arco de parábola, y recordando la fórmula $A = \frac{2}{3}bh$, para el área bajo dicha curva, se calcula el primer momento de esta área sobre un eje vertical que pasa por B, y queda

$$(t_{B/A})_w = A_1\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}L\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{24EI} \tag{9.65}$$

A continuación, se considera el diagrama de cuerpo libre de la viga cuando está sujeta al par desconocido $\mathbf{M}_A$ (figura 9.74*a*) y se determinan las reacciones correspondientes en A y en B:

$$(\mathbf{R}_A)_2 = \frac{M_A}{L}\uparrow \qquad (\mathbf{R}_B)_2 = \frac{M_A}{L}\downarrow \tag{9.66}$$

Al dibujar el diagrama (M/EI) correspondiente (figura 9.74*b*), se aplica otra vez el segundo teorema de momento de área y queda

$$(t_{B/A})_M = A_2\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}L\frac{M_A}{EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{M_AL^2}{3EI} \tag{9.67}$$

Se combinan los resultados obtenidos en las ecuaciones (9.65) y (9.67), y se expresa que la desviación tangencial resultante $t_{B/A}$ debe valer cero (figura 9.72), queda

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$
$$\frac{wL^4}{24EI} - \frac{M_AL^2}{3EI} = 0$$

y, al resolver para M_A, se tiene

$$M_A = +\tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2\,\circlearrowleft$$

Al sustituir M_A en la ecuación (9.66) y tener presente la ecuación (9.64), se obtienen los valores de R_A y R_B:

$$R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \tfrac{1}{2}wL + \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$
$$R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \tfrac{1}{2}wL - \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{3}{8}wL$$

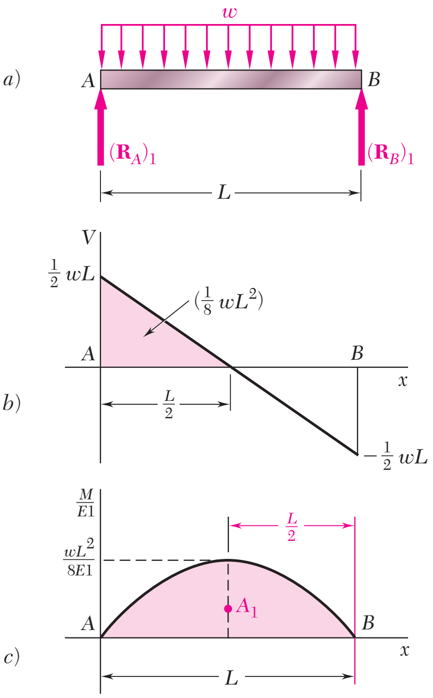


Figura 9.73

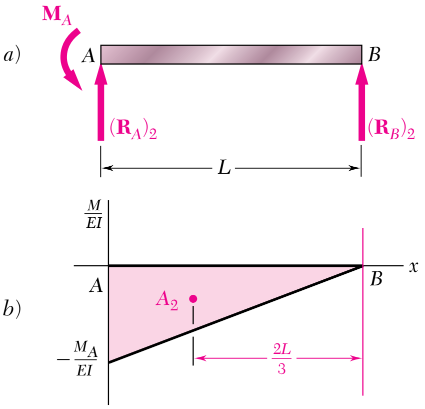
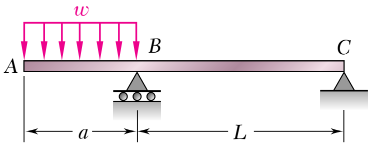


Figura 9.74

En el ejemplo recién considerado, sólo había una reacción redundante, es decir, la viga era *estáticamente indeterminada al primer grado*. Los *teoremas de momento de área* también pueden usarse cuando hay reacciones redundantes adicionales. Como se analizó en la sección 9.5, en ese caso es necesario escribir ecuaciones adicionales. Por tanto, para una viga que sea *estáticamente indeterminada al segundo grado*, será necesario seleccionar dos redundantes y escribir dos ecuaciones que consideren las *deformaciones* de la estructura en cuestión.

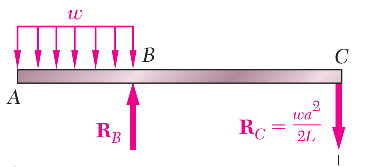


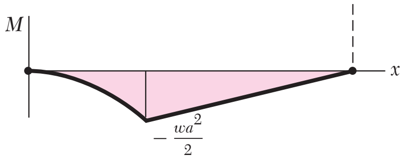
PROBLEMA MODELO 9.12

Para la viga y carga mostradas en la figura, *a*) determine la deflexión en el extremo *A*, *b*) evalúe y_A para los siguientes datos:

$W10 \times 33$: $I = 170 \text{ in.}^4$ $\qquad E = 29 \times 10^6$ psi
$a = 3 \text{ ft} = 36 \text{ in.}$ $\qquad L = 5.5 \text{ ft} = 66 \text{ in.}$
$w = 13.5 \text{ kips/ft} = 1\,125 \text{ lb/in.}$

SOLUCIÓN





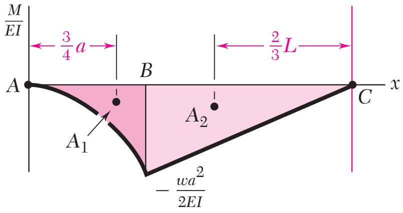
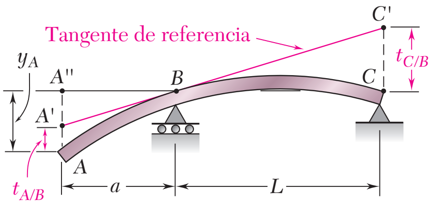


Diagrama (*M/EI*). Primero se dibuja el diagrama de momento flector. Como la rigidez de flexión *EI* es constante, se obtiene el diagrama (*M/EI*) que se muestra, el cual consiste en un segmento parabólico de área A_1 y un triángulo de área A_2.

$$A_1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)a = -\frac{wa^3}{6EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)L = -\frac{wa^2L}{4EI}$$



Tangente de referencia en *B*. La tangente de referencia se dibuja en el punto *B* como se indica. La desviación tangencial de *C* respecto a *B* se determina con el uso del segundo teorema de momento de área:

$$t_{C/B} = A_2\frac{2L}{3} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{2L}{3} = -\frac{wa^2L^2}{6EI}$$

Para los triángulos semejantes $A''A'B$ y $CC'B$ se encuentra que

$$A''A' = t_{C/B}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^2L^2}{6EI}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^3L}{6EI}$$

Usando otra vez el segundo teorema de momento de área queda

$$t_{A/B} = A_1\frac{3a}{4} = \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{3a}{4} = -\frac{wa^4}{8EI}$$

a*) Deflexión en el extremo *A

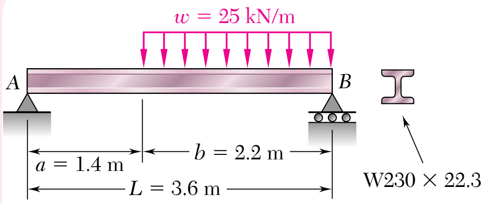
$$y_A = A''A' + t_{A/B} = -\frac{wa^3L}{6EI} - \frac{wa^4}{8EI} = -\frac{wa^4}{8EI}\left(\frac{4}{3}\frac{L}{a} + 1\right)$$

$$y_A = \frac{wa^4}{8EI}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{L}{a}\right)\downarrow \blacktriangleleft$$

***b*) Evaluación de y_A.** Al sustituir los datos proporcionados, se tiene

$$y_A = \frac{(1\,125 \text{ lb/in.})(36 \text{ in.})^4}{8(29 \times 10^6 \text{ lb/in.}^2)(170 \text{ in.}^4)}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{66 \text{ in.}}{36 \text{ in.}}\right)$$

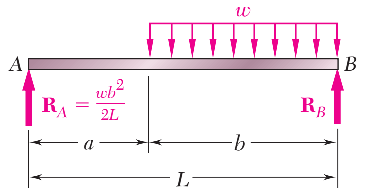
$$y_A = 0.1650 \text{ in.} \downarrow \blacktriangleleft$$



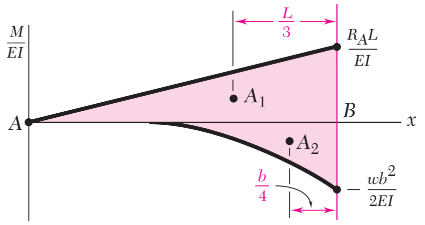
w = 25 kN/m
A
B
a = 1.4 m
b = 2.2 m
L = 3.6 m
W230 × 22.3

PROBLEMA MODELO 9.13

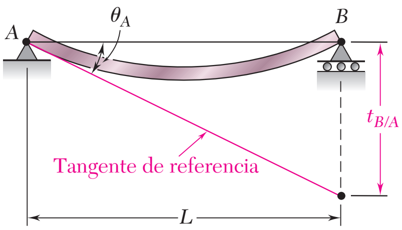
Para la viga y carga que se representan en la figura, determine la magnitud y ubicación de la deflexión más grande. Considere $E = 200$ GPa.



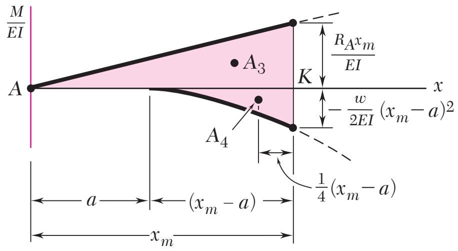
w
A
B
$\mathbf{R}_A = \frac{wb^2}{2L}$
$\mathbf{R}_B$
a
b
L



$\frac{M}{EI}$
$\frac{L}{3}$
$\frac{R_A L}{EI}$
A_1
A
B
x
A_2
$\frac{b}{4}$
$-\frac{wb^2}{2EI}$



θ_A
A
B
$t_{B/A}$
Tangente de referencia
L



$\frac{M}{EI}$
$\frac{R_A x_m}{EI}$
A_3
A
K
x
$-\frac{w}{2EI}(x_m-a)^2$
A_4
$\frac{1}{4}(x_m-a)$
a
(x_m-a)
x_m

SOLUCIÓN

Reacciones. Con el uso de un diagrama de cuerpo libre de la viga completa se encuentra que

$$\mathbf{R}_A = 16.81\text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = 38.2\text{ kN}\uparrow$$

Diagrama (*M/EI*). Se dibuja por partes el diagrama (*M/EI*), considerando en forma separada los efectos de la reacción $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Las áreas del triángulo y del segmento son

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{R_A L}{EI}L = \frac{R_A L^2}{2EI} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wb^2}{2EI}\right)b = -\frac{wb^3}{6EI}$$

Tangente de referencia. Se elige como tangente de referencia a la tangente a la viga. Con el uso del segundo teorema de momento de área se determina la desviación tangencial $t_{B/A}$ del apoyo B respecto al apoyo A:

$$t_{B/A} = A_1\frac{L}{3} + A_2\frac{b}{4} = \left(\frac{R_A L^2}{2EI}\right)\frac{L}{3} + \left(-\frac{wb^3}{6EI}\right)\frac{b}{4} = \frac{R_A L^3}{6EI} - \frac{wb^4}{24EI}$$

Pendiente en A

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\left(\frac{R_A L^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) \qquad (1)$$

Deflexión más grande. La deflexión mayor ocurre en el punto K, donde la pendiente de la viga vale cero. Entonces queda

$$\theta_K = \theta_A + \theta_{K/A} = 0 \qquad (2)$$

pero

$$\theta_{K/A} = A_3 + A_4 = \frac{R_A x_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3 \qquad (3)$$

Se sustituyen en la ecuación (2) los valores de θ_A y $\theta_{K/A}$ obtenidos con las ecs. (1) y (3):

$$-\left(\frac{R_A L^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) + \left[\frac{R_A x_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3\right] = 0$$

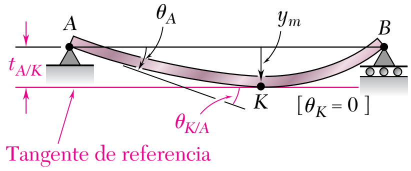
Al sustituir los datos numéricos, se obtiene

$$-29.53\frac{10^3}{EI} + 8.405x_m^2\frac{10^3}{EI} - 4.167(x_m - 1.4)^3\frac{10^3}{EI} = 0$$

Se resuelve por ensayo y error para x_m y se encuentra que $x_m = 1.890$ m ◀

Al calcular los momentos de A_3 y A_4 sobre un eje vertical que pasa por A, se tiene

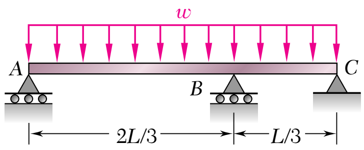
$$\begin{aligned}|y|_m = t_{A/K} &= A_3\frac{2x_m}{3} + A_4\left[a + \frac{3}{4}(x_m - a)\right] \\ &= \frac{R_A x_m^3}{3EI} - \frac{wa}{6EI}(x_m - a)^3 - \frac{w}{8EI}(x_m - a)^4\end{aligned}$$



$t_{A/K}$
A
θ_A
y_m
B
K
$[\theta_K = 0]$
$\theta_{K/A}$
Tangente de referencia

Con el uso de los datos dados, $R_A = 16.81$ kN, e $I = 28.9 \times 10^{-6}$ m^4, se encuentra

$y_m = 6.39$ mm ↓ ◀

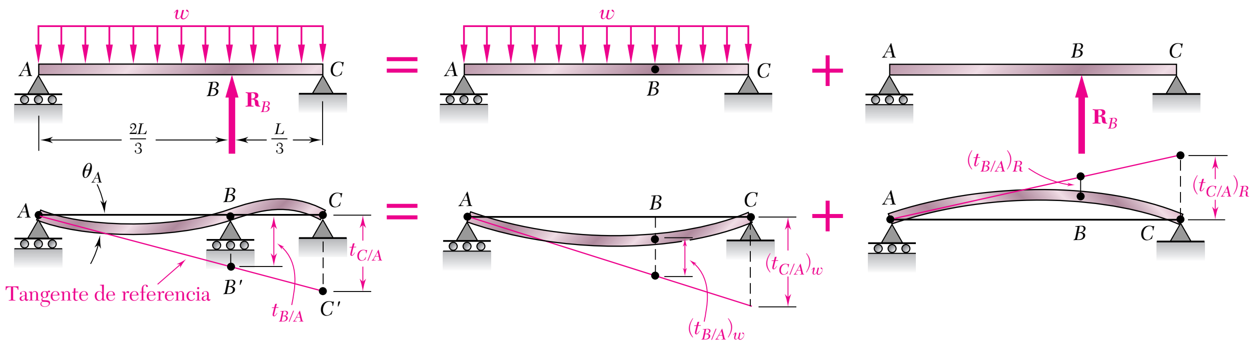


PROBLEMA MODELO 9.14

Para la viga y carga uniformes que se muestran en la figura, determine la reacción en B.

SOLUCIÓN

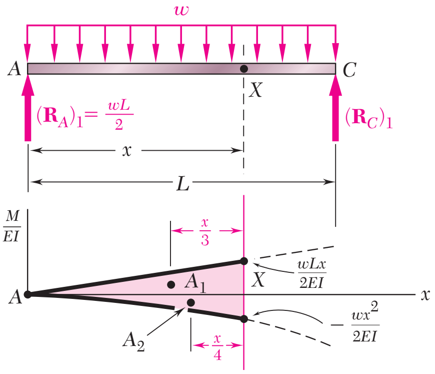
La viga es indeterminada al tercer grado. Se elige a $\mathbf{R}_B$ como redundante y se consideran separadamente la carga distribuida y la carga de reacción redundante. A continuación se selecciona como tangente de referencia a la tangente en A. De los triángulos semejantes ABB' y ACC' se obtiene



w
A
B
C
$\mathbf{R}_B$
$\frac{2L}{3}$
$\frac{L}{3}$
=
+
θ_A
Tangente de referencia
B'
C'
$t_{B/A}$
$t_{C/A}$
$(t_{B/A})_w$
$(t_{C/A})_w$
$(t_{B/A})_R$
$(t_{C/A})_R$

$$\frac{t_{C/A}}{L} = \frac{t_{B/A}}{\frac{2}{3}L} \qquad t_{C/A} = \frac{3}{2}t_{B/A} \tag{1}$$

Para cada carga se dibuja el diagrama (M/EI) y después se determinan las desviaciones tangenciales de B y C con respecto a A.



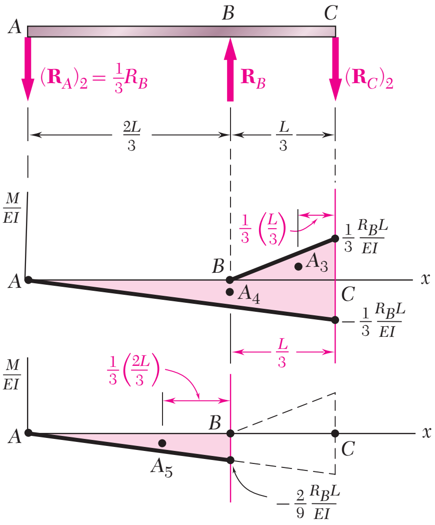
w
A
C
X
$(\mathbf{R}_A)_1 = \frac{wL}{2}$
$(\mathbf{R}_C)_1$
x
L
$\frac{M}{EI}$
$\frac{x}{3}$
$\frac{wLx}{2EI}$
A_1
A_2
$-\frac{wx^2}{2EI}$
$\frac{x}{4}$

Carga distribuida. Al considerar el diagrama (M/EI) desde A hasta un punto arbitrario X, se tiene

$$(t_{X/A})_w = A_1\frac{x}{3} + A_2\frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2}\frac{wLx}{2EI}x\right)\frac{x}{3} + \left(-\frac{1}{3}\frac{wx^2}{2EI}x\right)\frac{x}{4} = \frac{wx^3}{24EI}(2L - x)$$

Haciendo sucesivamente $x = L$, y también $x = \frac{2}{3}L$, queda

$$(t_{C/A})_w = \frac{wL^4}{24EI} \qquad (t_{B/A})_w = \frac{4}{243}\frac{wL^4}{EI}$$



A
B
C
$(\mathbf{R}_A)_2 = \frac{1}{3}R_B$
$\mathbf{R}_B$
$(\mathbf{R}_C)_2$
$\frac{2L}{3}$
$\frac{L}{3}$
$\frac{M}{EI}$
$\frac{1}{3}\left(\frac{L}{3}\right)$
$\frac{1}{3}\frac{R_BL}{EI}$
A_3
A_4
$-\frac{1}{3}\frac{R_BL}{EI}$
$\frac{L}{3}$
$\frac{1}{3}\left(\frac{2L}{3}\right)$
A_5
$-\frac{2}{9}\frac{R_BL}{EI}$
x

Carga de reacción redundante

$$(t_{C/A})_R = A_3\frac{L}{9} + A_4\frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}\frac{L}{3}\right)\frac{L}{9} + \left(-\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}L\right)\frac{L}{3} = -\frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}$$

$$(t_{B/A})_R = A_5\frac{2L}{9} = \left[-\frac{1}{2}\frac{2R_BL}{9EI}\left(\frac{2L}{3}\right)\right]\frac{2L}{9} = -\frac{4}{243}\frac{R_BL^3}{EI}$$

Carga combinada. Al sumar los resultados obtenidos se tiene

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI} \qquad t_{B/A} = \frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}$$

Reacción en B. Al sustituir $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$ en la ecuación (1), queda

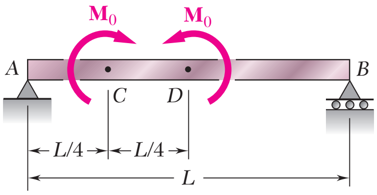
$$\left(\frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}\right]$$

$$R_B = 0.6875wL \qquad \mathbf{R}_B = 0.688wL\uparrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

Utilice el método del momento de área para resolver los siguientes problemas.

9.125 a *9.128* Para la viga prismática y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la deflexión en el punto *D*, *b*) la pendiente en el extremo *A*.



M0
M0
A
B
C
D
L/4
L/4
L

Figura P9.125

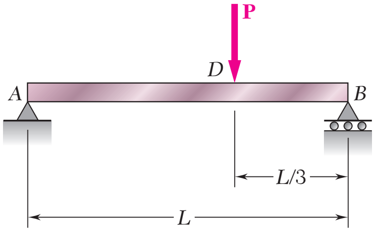


Figura P9.126

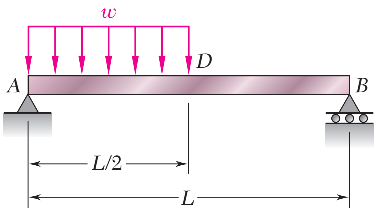


Figura P9.127

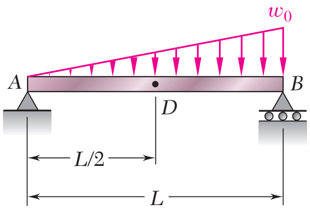
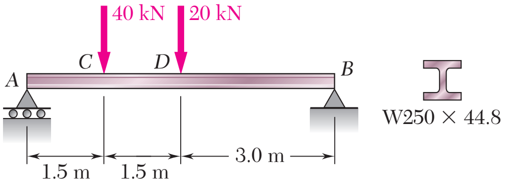


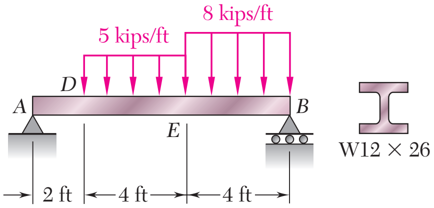
Figura *P9.128*

9.129 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.



40 kN
20 kN
A
C
D
B
W250 × 44.8
1.5 m
1.5 m
3.0 m

Figura P9.129

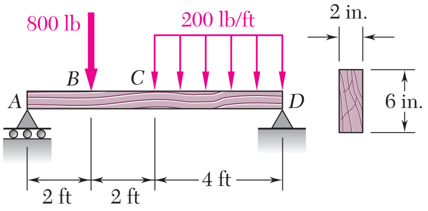


8 kips/ft
5 kips/ft
D
A
B
E
W12 × 26
2 ft
4 ft
4 ft

Figura P9.130

9.130 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *E*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.131 Para la viga de madera y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice $E = 1.7 \times 10^6$ psi.



800 lb
200 lb/ft
2 in.
B
C
A
D
6 in.
2 ft
2 ft
4 ft

Figura *P9.131*

9.132 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.

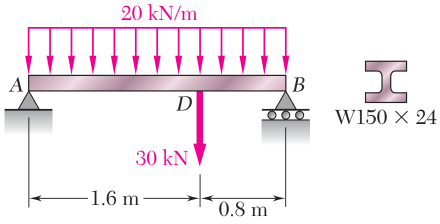

20 kN/m
A
B
D
30 kN
W150 × 24
1.6 m
0.8 m

Figura P9.132

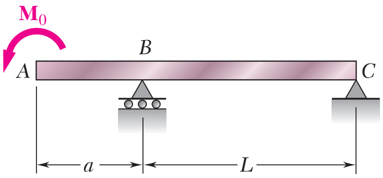


Figura *P9.133*

9.133 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *A*.

9.134 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *C*.

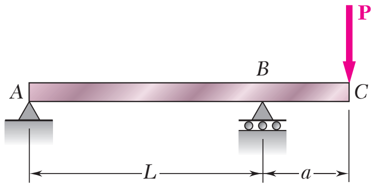


Figura P9.134

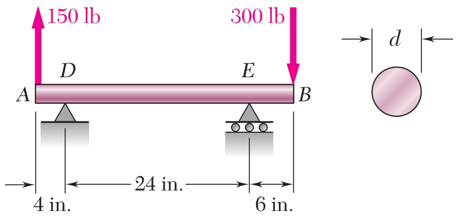

150 lb
300 lb
D
E
A
B
d
4 in.
24 in.
6 in.

Figura P9.135

9.135 Si se sabe que la viga *AB* está hecha de una barra de acero macizo con un diámetro $d = 0.75$ in., para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *D*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

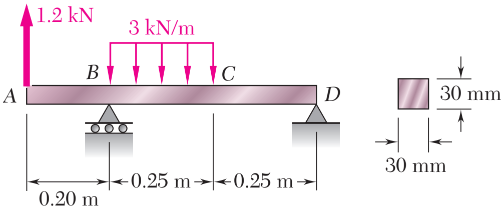

1.2 kN
3 kN/m
A
B
C
D
30 mm
30 mm
0.20 m
0.25 m
0.25 m

Figura P9.136

9.136 Si se sabe que la viga *AD* está hecha de una barra de acero macizo, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *A*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.137 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

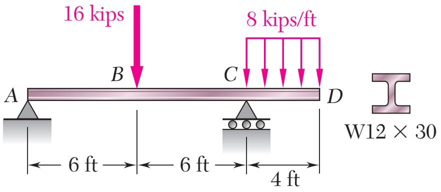

16 kips
8 kips/ft
A
B
C
D
W12 × 30
6 ft
6 ft
4 ft

Figura P9.137

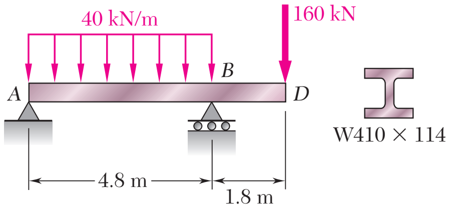

40 kN/m
160 kN
A
B
D
W410 × 114
4.8 m
1.8 m

Figura *P9.138*

9.138 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *B*, *b*) la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 200$ GPa.

9.139 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la pendiente en el extremo B, *c*) la deflexión en el punto medio C.

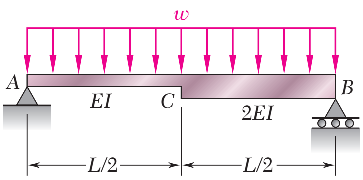


Figura P9.139

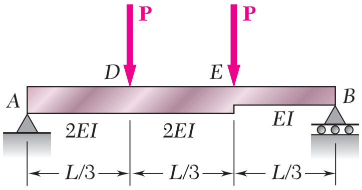


Figura P9.140

9.140 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión *a*) en el punto D, *b*) en el punto E.

9.141 a 9.144 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine la magnitud y ubicación de la máxima deflexión hacia abajo.

- **9.141** Viga y carga del problema 9.126.
- ***9.142*** Viga y carga del problema 9.128.
- ***9.143*** Viga y carga del problema 9.129.
- **9.144** Viga y carga del problema 9.130.

9.145 Para la viga y la carga del problema 9.135, determine la magnitud y localización de la máxima deflexión hacia arriba en el claro DE.

9.146 Para la viga y la carga del problema 9.138, determine la magnitud y localización de la máxima deflexión hacia arriba en el claro AB.

9.147 a 9.150 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la reacción en el apoyo deslizante.

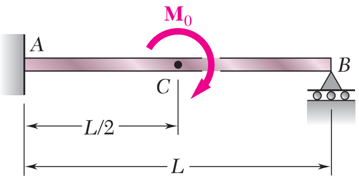


Figura P9.147

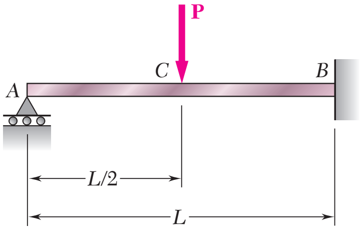


Figura P9.148

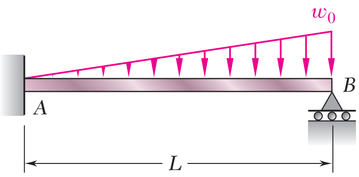


Figura *P9.149*

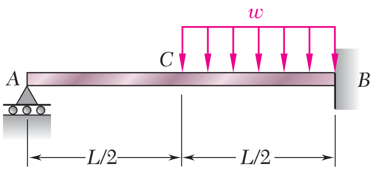


Figura P9.150

***9.151* y 9.152** Para la viga y la carga que se muestran, determine la reacción en cada apoyo.

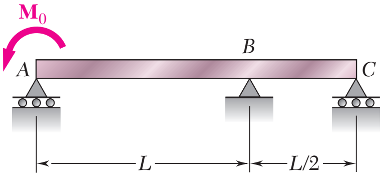


Figura *P9.151*

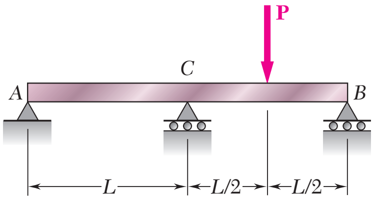


Figura P9.152

9.153 Se usa un gato hidráulico para elevar el punto B de la viga en voladizo ABC. Originalmente la viga era recta, horizontal y sin carga. Después se aplicó una carga de 20 kN en el punto C, lo que ocasionó que dicho punto se desplazara hacia abajo. Determine *a*) qué tanto debe elevarse el punto B para que el punto C regrese a su posición original, *b*) el valor final de la reacción en B. Utilice $E = 200$ GPa.

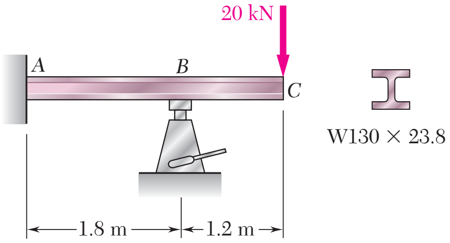


Figura P9.153

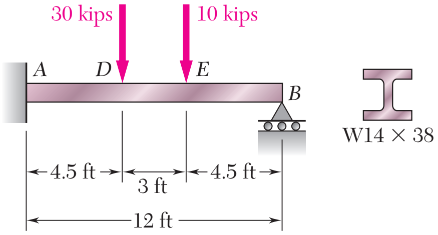


Figura P9.154

9.154 Determine la reacción en el apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

9.155 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la constante k del resorte para la cual la fuerza en éste es igual a un tercio de la carga total sobre la viga.

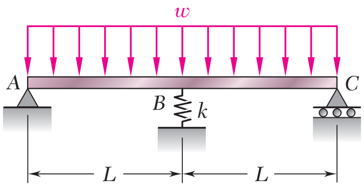


Figura P9.155 y P9.156

9.156 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la constante k del resorte para la cual el momento flector en B es $M_B = -wL^2/10$.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 9

Este capítulo se dedicó a determinar las pendientes y deflexiones de vigas sometidas a cargas transversales, para lo cual se emplearon dos enfoques. En primer lugar, se usó un método matemático basado en el método de integración de una ecuación diferencial para obtener las pendientes y deflexiones en cualquier punto de la viga. Luego se utilizó el *método del momento de área* para encontrar las pendientes y deflexiones en un punto dado de la viga. Se puso énfasis especial en el cálculo de la deflexión máxima de una viga sometida a una carga dada. También se aplicaron estos métodos para calcular las deflexiones en el análisis de *vigas indeterminadas*, que son aquellas en las que el número de reacciones en los apoyos excede al número de ecuaciones de equilibrio disponibles para despejar dichas incógnitas.

Deformación de una viga bajo carga transversal

En la sección 9.2 se hizo notar que la ecuación (4.21) de la sección 4.4, que relaciona la curvatura $1/\rho$ de la superficie neutra y el momento flector M en una viga prismática sometida a flexión pura, puede aplicarse a una viga bajo carga transversal pero que M y $1/\rho$ variarán de sección a sección. Llamando x la distancia desde el extremo izquierdo de la viga, se escribe

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

Esta ecuación permite determinar el radio de curvatura de la superficie neutra para cualquier valor de x y extraer algunas conclusiones generales en cuanto a la forma de la viga deformada.

En la sección 9.3 se estudió cómo obtener una relación entre la deflexión y de una viga, medida en un punto dado Q, y la distancia x de ese punto a algún origen fijo (figura 9.6*b*). Tal relación define la *curva elástica* de una viga. Expresando la curvatura $1/\rho$ en función de las derivadas de $y(x)$ y reemplazando en (9.91), se obtuvo la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

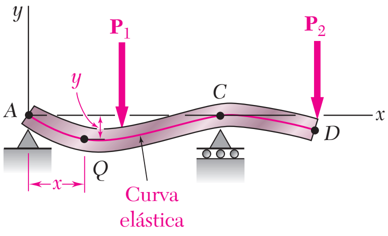


Figura 9.6*b*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

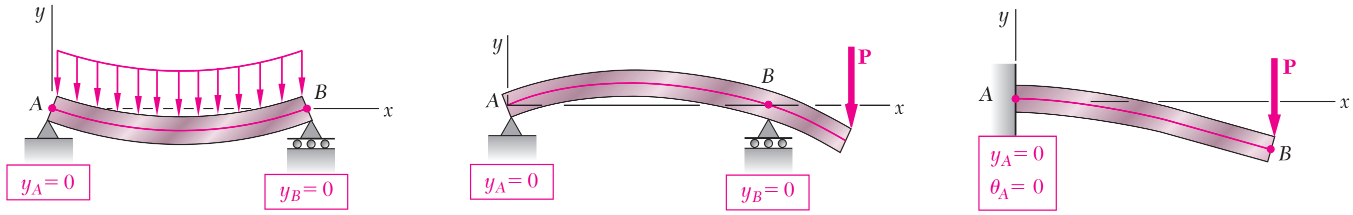
Integrando esta ecuación dos veces, se obtuvieron las siguientes expresiones para la pendiente $\theta(x) = dy/dx$ y la deflexión $y(x)$, respectivamente.

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$

Condiciones de frontera

El producto EI se conoce como la *rigidez a flexión* de la viga; C_1 y C_2 son dos constantes de integración, que pueden calcularse de las *condiciones de frontera* impuestas en la viga por sus apoyos [véase figura 9.8 y el ejemplo 9.01]. La deflexión máxima se obtiene determinando el valor de x que hace que la pendiente sea igual a cero y el correspondiente valor de y [véase ejemplo 9.02 y el problema modelo 9.1].



a) Viga simplemente soportada
b) Viga de un tramo en voladizo
c) Viga volada

Figura 9.8 Condiciones de frontera para vigas estáticamente determinadas.

Curva elástica definida con funciones diferentes

Cuando la carga es tal que se requieren diferentes funciones para representar el momento flector en diversas porciones de la viga, también se requieren varias ecuaciones diferenciales que conducirán a funciones diferentes para la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$ en las porciones de la viga. En el caso de la viga y cargas consideradas en el ejemplo 9.03 (figura 9.20) se necesitaron dos ecuaciones diferenciales, una para la porción *AD* de la viga y otra para la porción *BD*. La primera generó las funciones θ_1 y y_1, la segunda θ_2 y y_2. En total hubo que determinar cuatro constantes de integración; dos se obtuvieron anulando las deflexiones en *A* y *B* y las otras dos expresando que en *D*, la pendiente y la deflexión eran comunes para las porciones *AD* y *DB* de la viga.

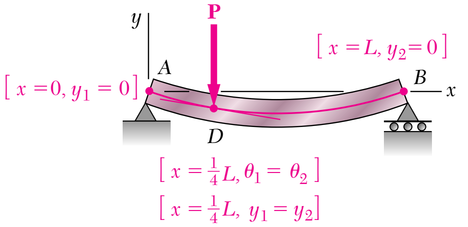
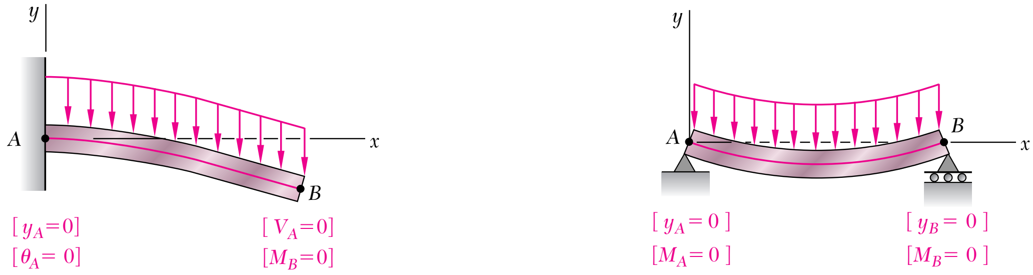


Figura 9.20

En la sección 9.4 se estudió que en el caso de una viga con carga distribuida $w(x)$, la curva elástica puede obtenerse directamente de $w(x)$ mediante cuatro integraciones sucesivas que dan *V, M,* θ y y, en ese orden. Para la viga en voladizo de la figura 9.21*a* y la viga simplemente apoyada de la figura 9.21*b*, las cuatro constantes de integración pueden obtenerse de las cuatro condiciones de frontera indicadas en la figura [véase el ejemplo 9.04 y el problema modelo 9.2].



a) Viga volada

b) Viga simplemente soportada

Figura 9.21 Condiciones de frontera para vigas que soportan cargas distribuidas.

Vigas estáticamente indeterminadas

En la sección 9.5 se analizaron *las vigas estáticamente indeterminadas*, es decir, vigas apoyadas de tal manera que las reacciones de los apoyos incluían cuatro o más incógnitas. Como sólo hay tres ecuaciones de equilibrio, era necesario complementarlas con ecuaciones obtenidas de las condiciones de frontera impuestas por los apoyos. Para la viga de la figura 9.24, se observó que las reacciones en los apoyos comprendían cuatro incógnitas, M_A, A_x, A_y y *B*. Una viga como ésta es *indeterminada de primer grado.* (Si se hubieran incluido cinco incógnitas, la viga sería inde-

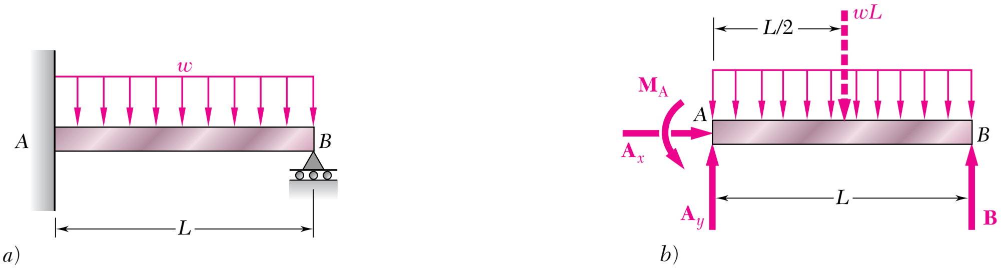


Figura 9.24

terminada de *segundo grado*.) Expresando el momento flector $M(x)$ en función de las cuatro incógnitas e integrando dos veces [véase el ejemplo 9.05], se determinaron la pendiente $\theta(x)$ y la deflexión $y(x)$ en función de tales incógnitas y de las constantes de integración C_1 y C_2. Las seis incógnitas incluidas en este cálculo se obtuvieron resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 9.24*b* y las tres ecuaciones que expresan $\theta = 0$, $y = 0$ para $x = 0$, y que expresan $y = 0$ para $x = L$ [véase figura 9.25 y problema modelo 9.3].

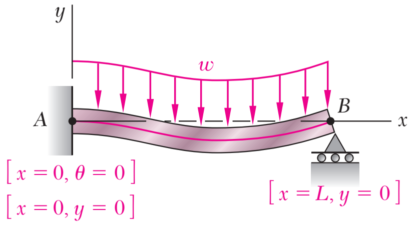


Figura 9.25

Uso de las funciones de singularidad

El método de integración proporciona un modo eficiente para determinar la pendiente y la deflexión de cualquier punto de una viga prismática, siempre que el momento flector M pueda representarse por medio de una función analítica única. Sin embargo, cuando se requieren varias funciones para representar a M sobre toda la longitud de la viga, dicho método resulta laborioso ya que requiere ajustar pendientes y deflexiones en todo punto de transición. En la sección 9.6 se estudió que el uso de *funciones de singularidad* (introducidas en la sección 5.5) simplifica apreciablemente el cálculo de θ y de y en cualquier punto de la viga. Considerando de nuevo el ejemplo 9.03 (figura 9.17), la fuerza cortante de cualquier punto de la viga se expresó como

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

en donde la función paso $\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^0$ es 0 cuando la cantidad entre paréntesis triangulares $\langle\ \ \rangle$ es negativa, e igual a uno de otra manera. Integrando tres veces, se obtiene sucesivamente

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \tag{9.44}$$

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{8}Px^2 - \tfrac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \tag{9.46}$$

$$EI\,y = \tfrac{1}{8}Px^3 - \tfrac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{9.47}$$

en donde los paréntesis triangulares $\langle\ \ \rangle$ deben reemplazarse por cero si la cantidad que está en el interior de ellos es negativa, y por paréntesis ordinarios en otro caso. Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de frontera de la figura 9.30 [véase ejemplo 9.06 y los problemas modelo 9.4, 9.5 y 9.6].

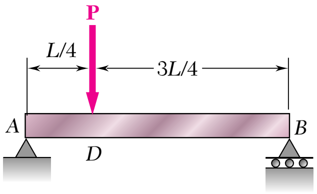


Figura 9.17

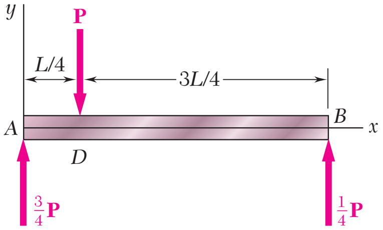


Figura 9.29

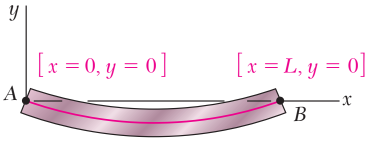


Figura 9.30

Método de superposición

La parte siguiente del capítulo se dedicó al *método de superposición,* que consiste en determinar separadamente, y luego sumar, la pendiente y la deflexión causadas por las diferentes cargas aplicadas a una viga [véase sección 9.7]. Este método se facilitó mediante el uso de la tabla del apéndice D, que trae pendientes y deflexiones de viga para varias cargas y tipos de apoyo [véase ejemplo 9.07 y problema modelo 9.7].

Vigas estáticamente indeterminadas por superposición

El método de superposición puede usarse efectivamente con *vigas estáticamente indeterminadas* [véase sección 9.8]. En el caso de la viga del ejemplo 9.08 (figura 9.36), que incluye cuatro reacciones desconocidas y es determinada de *primer grado*, la reacción en B se tomó como *redundante* y la viga se liberó de ese apoyo. Tratando a $\mathbf{R}_B$ como una carga desconocida y considerando, en forma separada, las deflexiones causadas en B por la carga distribuida dada y por $\mathbf{R}_B$ se dijo que la suma de estas deflexiones era cero (figura 9.37). Se despejó R_B de la ecuación obtenida (véase también el problema modelo 9.8). En el caso de una viga indeterminada de *segundo grado*, es decir, con reacciones en los apoyos que incluyen cinco incógnitas, deben designarse dos reacciones como redundantes y eliminarse o modificarse adecuadamente los correspondientes apoyos [véase problema modelo 9.9].

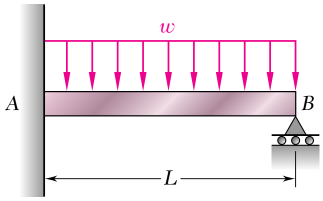
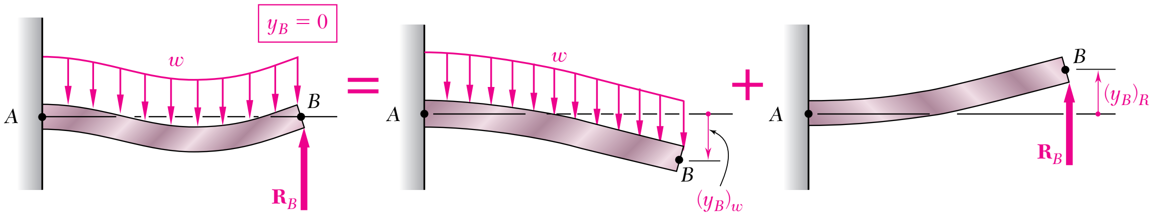


Figura 9.36



a) *b*) *c*)

Figura 9.37

Primer teorema del momento de área

A continuación se estudió la determinación de las deflexiones y pendientes de vigas por medio del *método del momento de área*. Con objeto de deducir los *teoremas de momento de superficie* [sección 9.9], primero se dibujó el diagrama que representa la variación de la cantidad M/EI a lo largo de la viga, obtenido dividiendo el momento flector M entre la rigidez a flexión EI (figura 9.41). Luego se obtuvo el *primer teorema de momento de área*, el cual establece lo siguiente: *el área bajo el diagrama (M/EI) entre dos puntos es igual al ángulo entre las tangentes a la curva elástica dibujada en dichos puntos.* Al considerar tangentes en C y D, queda

$$\theta_{D/C} = \text{área debajo del diagrama } (M/EI) \text{ entre } C \text{ y } D \tag{9.56}$$

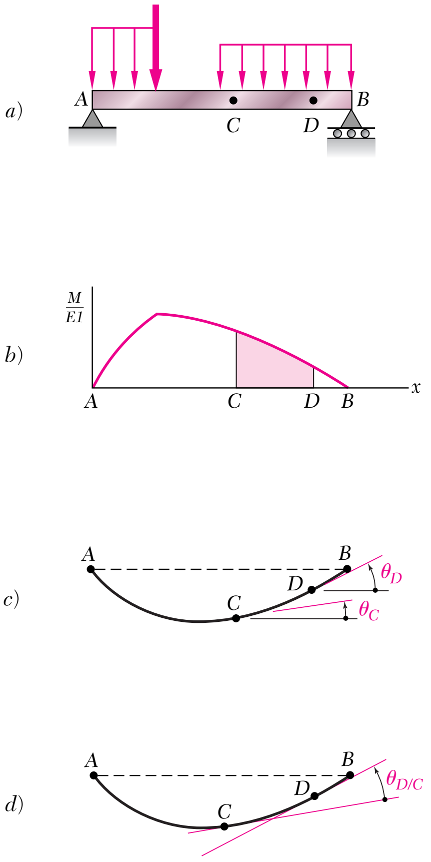

a)
A
B
C
D
b)
M
EI
x
A
C
D
B
c)
A
B
D
C
θ_D
θ_C
d)
A
B
D
C
$\theta_{D/C}$

Figura 9.41 Primer teorema de momento de superficie.

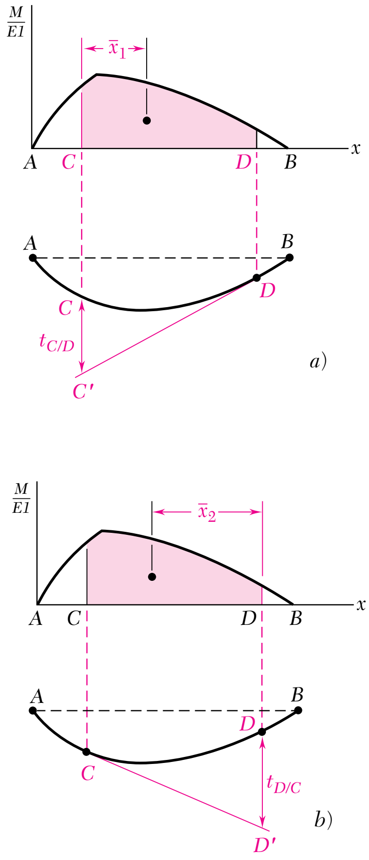

M
EI
$\bar{x}_1$
x
A
C
D
B
A
B
D
C
$t_{C/D}$
C'
a)
M
EI
$\bar{x}_2$
x
A
C
D
B
A
B
D
C
$t_{D/C}$
D'
b)

Figura 9.45 Segundo teorema de momento de superficie.

Segundo teorema del momento de área

Usando nuevamente el diagrama (M/EI) y un boceto de la viga deflectada (figura 9.45), se dibujó la tangente en el punto D y se consideró la distancia vertical $t_{C/D}$, que se llamó la desviación tangencial de C respecto a D. Luego se dedujo el segundo teorema del momento de área, que establece lo siguiente: la desviación tangencial $t_{C/D}$ de C con respecto a D es igual al primer momento, con respecto a un eje vertical que pasa por C, del área bajo el diagrama (M/EI) entre C y D. Se tuvo cuidado en distinguir entre la desviación tangencial de C con respecto a D (figura 9.45*a*)

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_1 \tag{9.59}$$

y la desviación tangencial de D con respecto a C (figura 9.45*b*):

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_2 \tag{9.60}$$

Vigas en voladizo
Vigas con cargas simétricas

En la sección 9.10 se aprendió a determinar la pendiente y la deflexión en puntos de vigas *en voladizo* y vigas con *cargas simétricas*. Para vigas voladas, la tangente en el apoyo fijo es horizontal (figura 9.46); y para vigas cargadas simétricamente, la tangente es horizontal en el punto medio *C* de la viga (figura 9.47). Al usar la tangente horizontal como *tangente de referencia*, fue posible determinar pendientes y deflexiones con el uso del primero y segundo teoremas de momento de área, respectivamente [ejemplo 9.09, problemas modelo 9.10 y 9.11]. Se observó que para encontrar una deflexión que no sea una desviación tangencial (figura 9.47*c*) es necesario determinar primero cuáles desviaciones tangenciales pueden combinarse para obtener la deflexión deseada.

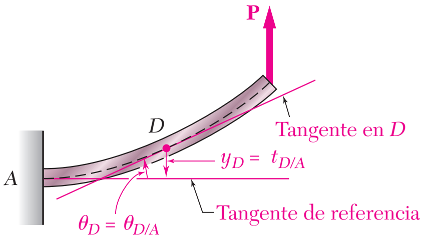

P
D
Tangente en D
A
$y_D = t_{D/A}$
$\theta_D = \theta_{D/A}$
Tangente de referencia

Figura 9.46

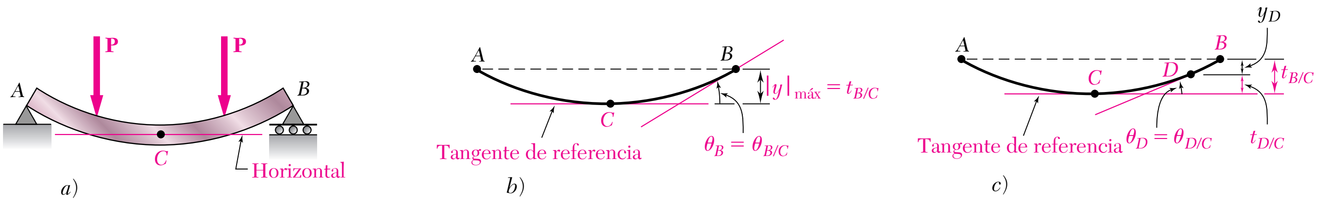

P
P
A
B
C
Horizontal
a)
A
B
$|y|_{\text{máx}} = t_{B/C}$
C
Tangente de referencia
$\theta_B = \theta_{B/C}$
b)
y_D
A
B
C
D
$t_{B/C}$
Tangente de referencia
$\theta_D = \theta_{D/C}$
$t_{D/C}$
c)

Figura 9.47

Diagrama de momento flexionante por partes

En muchos casos, la aplicación de los teoremas de momento de área se simplifica si se considera separadamente el efecto de cada carga [véase sección 9.11]. Para hacer esto se elaboró el *diagrama (M/EI) por partes* dibujando un diagrama (*M*/*EI*) distinto para cada carga. Las áreas y momentos de área bajo los diversos diagramas pueden sumarse para determinar pendientes y desviaciones tangenciales para la viga y carga originales [véase ejemplos 9.10 y 9.11].

Cargas asimétricas

En la sección 9.12 se extendió el uso del método del momento de área para incluir vigas con *cargas asimétricas.* Se observó que por lo general, no es posible localizar una tangente horizontal, por lo que se seleccionó una tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga, ya que la pendiente de dicha tangente puede determinarse con facilidad. Por ejemplo, para la viga y carga que se ven en la figura 9.59, la pendiente de la tangente en *A* se obtiene calculando la desviación tangencial $t_{B/A}$ y dividiendo la distancia *L* entre los apoyos *A* y *B*. Después, con el empleo de ambos

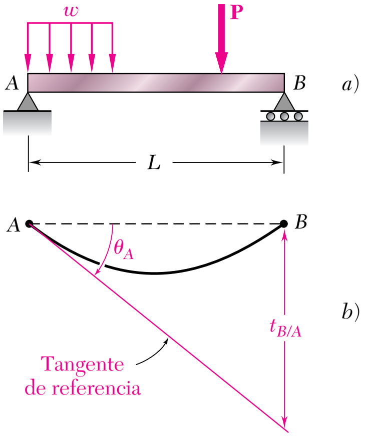

w
P
A
B
a)
L
A
B
θ_A
b)
$t_{B/A}$
Tangente
de referencia

Figura 9.59

teoremas de momentos de área y geometría elemental, se pudo determinar la pendiente y deflexión en cualquier punto de la viga [véase ejemplo 9.12 y problema modelo 9.12].

Deflexión máxima

La *deflexión máxima* de una viga cargada en forma asimétrica generalmente no ocurre a la mitad del claro. El enfoque descrito en el párrafo precedente se empleó para determinar el punto K en donde se da la deflexión máxima, así como la magnitud de ésta [véase sección 9.13]. Al observar que la pendiente en K es igual a cero (figura 9.68), se concluyó que $\theta_{K/A} = -\theta_A$. Al tener presente el primer teorema de momento de área, se determinó la localización de K con la medición bajo el diagrama (M/EI) de un área igual a $\theta_{K/A}$. Se obtuvo la deflexión máxima con el cálculo de la desviación tangencial $t_{A/K}$ [véase problemas modelo 9.12 y 9.13].

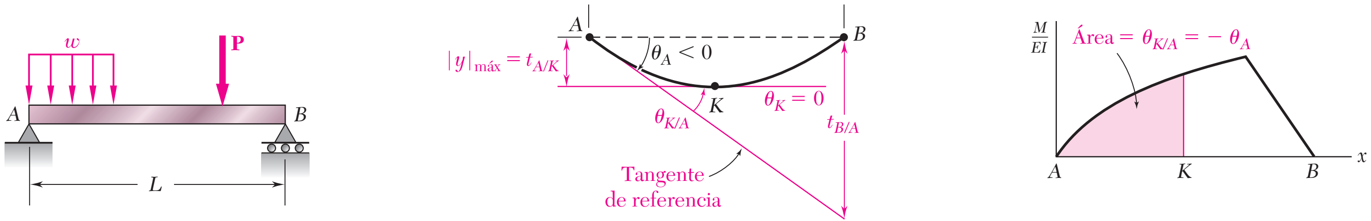


Figura 9.68

Vigas estáticamente indeterminadas

En la última parte del capítulo [sección 9.14] se aplicó el método de momento de área al análisis de *vigas estáticamente indeterminadas.* Como las reacciones para la viga y carga que se muestran en la figura 9.71 no pueden determinarse sólo con la estática, se designó redundante una de las reacciones en la viga ($\mathbf{M}_A$ en la figura 9.72*a*) y se consideró a dicha reacción redundante como una carga incógnita. La desviación tangencial de B con respecto a A se consideró en forma separada para la carga distribuida (figura 9.72*b*) y para la reacción redundante (figura 9.72*c*). Al expresar que bajo la acción combinada de la carga distribuida y del par $\mathbf{M}_A$ la desviación tangencial de B con respecto a A debía ser cero, se concluyó que

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

Y a partir de esta expresión se determinó la magnitud de la reacción redundante $\mathbf{M}_A$ [véase ejemplo 9.14 y problema modelo 9.14].

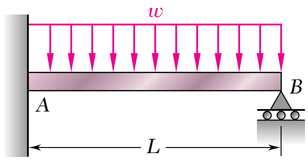
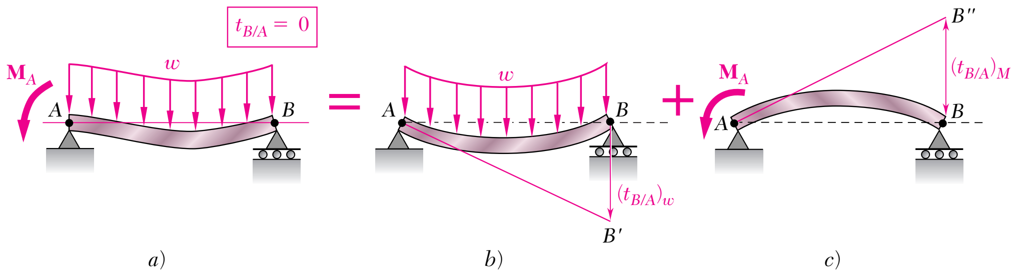


Figura 9.71



a) *b*) *c*)

Figura 9.72

PROBLEMAS DE REPASO

9.157 Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo AB, *b*) la deflexión en el extremo libre, *c*) la pendiente en el extremo libre.

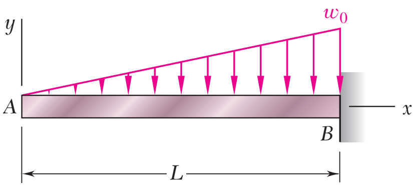
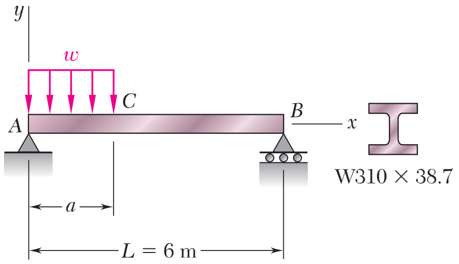


Figura P9.157

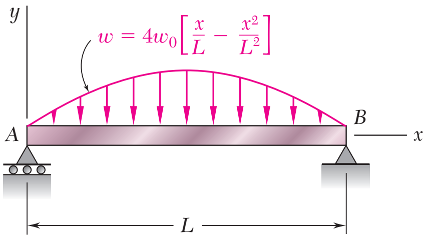


y
w
C
A
B
x
W310 × 38.7
a
L = 6 m

Figura *P9.158*

9.158 Para la viga y la carga que se muestran en la figura se sabe que $a = 2$ m, $w = 50$ kN/m y $E = 200$ GPa, determine *a*) la pendiente en el apoyo A, *b*) la deflexión en el punto C.

9.159 Para la viga y carga que se muestran en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo A, *c*) la deflexión en el punto medio del claro.



y
$w = 4w_0\left[\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right]$
A
B
x
L

Figura P9.159

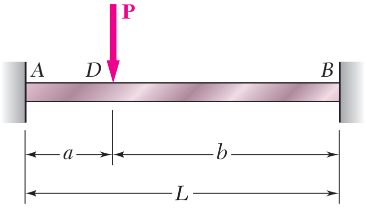
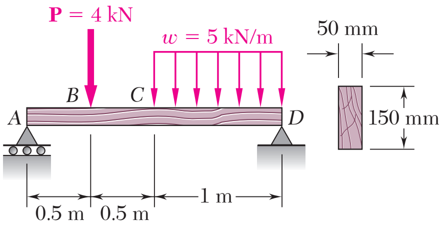


Figura P9.160

9.160 Determine la reacción en A y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

9.161 Para la viga de madera y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto medio C. Utilice $E = 12$ GPa.



P = 4 kN
w = 5 kN/m
50 mm
B
C
A
D
150 mm
0.5 m
0.5 m
1 m

Figura P9.161

9.162 La barra rígida *DEF* está soldada en el punto *D* a la viga de acero laminado *AB*. Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C* de la viga. Utilice $E = 200$ GPa.

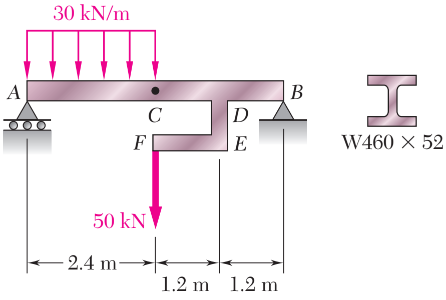

30 kN/m
A
C
B
D
F
E
W460 × 52
50 kN
2.4 m
1.2 m
1.2 m

Figura *P9.162*

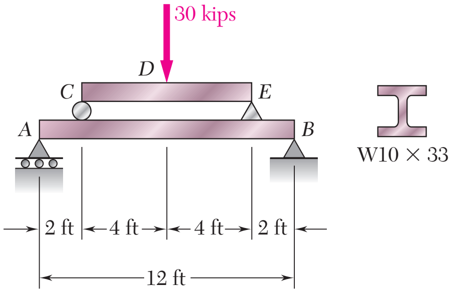

30 kips
D
C
E
A
B
W10 × 33
2 ft
4 ft
4 ft
2 ft
12 ft

Figura P9.163

9.163 La viga *CE* descansa sobre la viga *AB*, como se muestra en la figura. Si se sabe que para cada viga se usa acero laminado con perfil W10 × 33, determine para la carga que se indica, la deflexión en el punto *D*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

9.164 Si se sabe que las vigas *AC* y *BD* que se muestran en la figura tienen la misma rigidez a flexión, determine la reacción en *B* para la carga mostrada.

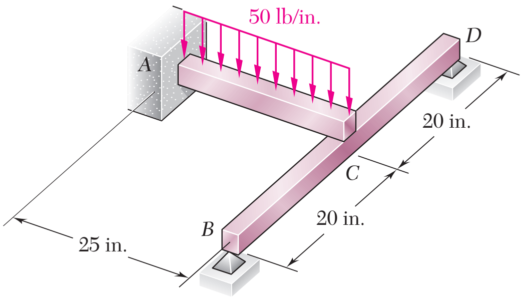

50 lb/in.
D
A
20 in.
C
20 in.
B
25 in.

Figura *P9.164*

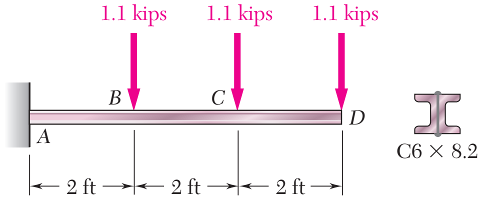

1.1 kips
1.1 kips
1.1 kips
B
C
D
A
C6 × 8.2
2 ft
2 ft
2 ft

Figura P9.165

9.165 Dos canales C6 × 8.2 están soldados por su parte posterior y sostienen la carga que se muestra en la figura. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la pendiente en el punto *D*, *b*) la deflexión en el punto *D*.

9.166 Para la viga prismática y la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el centro *C* de la viga.

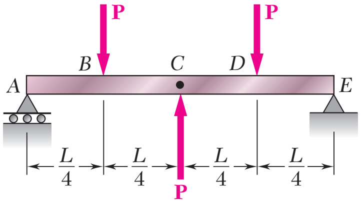

P
P
B
C
D
A
E
L/4
L/4
L/4
L/4
P

Figura *P9.166*

9.167 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la magnitud y ubicación de la máxima deflexión hacia abajo.

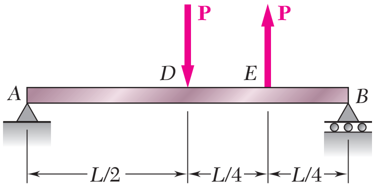

P
P
D
E
A
B
L/2
L/4
L/4

Figura P9.167

9.168 Determine la reacción en el apoyo móvil y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

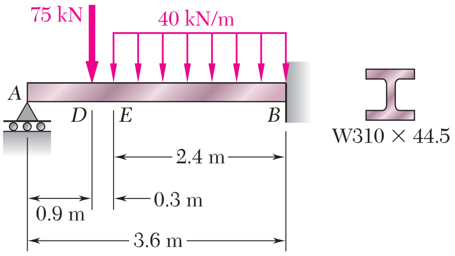

75 kN
40 kN/m
A
D
E
B
W310 × 44.5
2.4 m
0.3 m
0.9 m
3.6 m

Figura P9.168

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas fueron diseñados para resolverse con ayuda de una computadora.

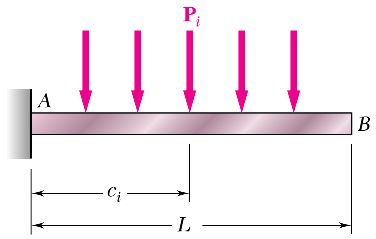


Figura P9.C1

9.C1 Varias cargas concentradas pueden aplicarse a la viga en voladizo *AB*. Escriba un programa de cómputo para calcular la pendiente y la deflexión de la viga *AB* desde $x = 0$ hasta $x = L$ utilizando incrementos de Δx. Aplique este programa con incrementos de $\Delta x = 50$ mm a la viga y la carga de los problemas 9.73 y 9.74.

9.C2 La viga *AB* de 22 ft consta de un perfil de acero laminado de W21 × 62 y soporta una carga distribuida de 3.5 kips/ft según se aprecia en la figura. Escriba un programa de cómputo para calcular con valores de *a* desde 0 hasta 22 ft con incrementos de 1 ft, *a*) la pendiente y la deflexión en *D*, *b*) la ubicación y magnitud de la deflexión máxima. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

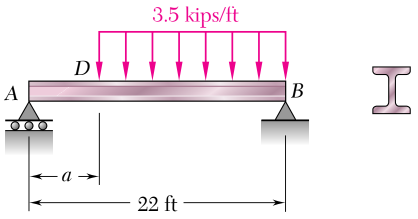


Figura P9.C2

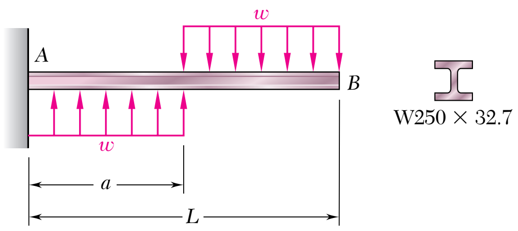


Figura P9.C3

9.C3 La viga en voladizo *AB* soporta las cargas distribuidas que se ilustran en la figura. Escriba un programa de cómputo para calcular la pendiente y la deflexión de la viga *AB* desde $x = 0$ hasta $x = L$ utilizando incrementos de Δx. Aplique el programa con incrementos de $\Delta x = 100$ mm, suponiendo que $L = 2.4$ m, $w = 36$ kN/m y *a*) $a = 0.6$ m, *b*) $a = 1.2$ m, *c*) $a = 1.8$ m. Utilice $E = 200$ GPa.

9.C4 La viga simplemente apoyada *AB* tiene una rigidez a flexión *EI* constante y soporta varias cargas concentradas, como se muestra en la figura. Usando el *método de integración*, escriba un programa para computadora que calcule la pendiente y la deflexión en varios puntos desde $x = 0$ hasta $x = L$ usando incrementos de Δx. Aplique este programa a la viga y la carga de *a*) el problema 9.13 con $\Delta x = 1$ ft, *b*) el problema 9.16 con $\Delta x = 0.05$ m, *c*) el problema 9.129 con $\Delta x = 0.25$ m.

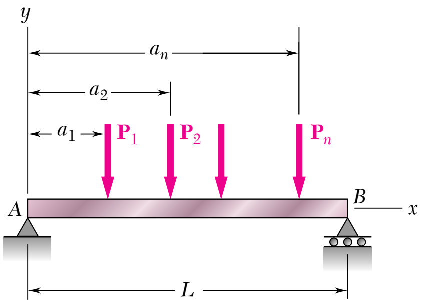


Figura P9.C4

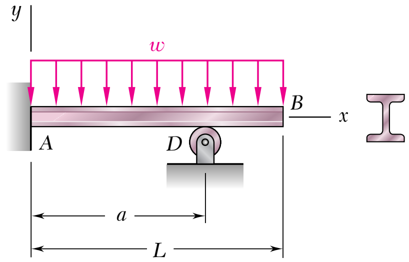


Figura P9.C5

9.C5 Los apoyos de la viga *AB* son: un apoyo fijo en *A* y un rodillo en *D*. Escriba un programa de computadora para calcular la pendiente y la deflexión en el extremo libre de la viga para valores de *a* desde 0 hasta *L* en incrementos de Δa. Emplee este programa para calcular la pendiente y la deflexión en el punto *B* en cada uno de los siguientes casos:

	L	ΔL	*w*	*E*	Perfil
a)	12 ft	0.5 ft	1.6 k/ft	29×10^6 psi	W16 × 57
b)	3 m	0.2 m	18 kN/m	200 GPa	W460 × 113

9.C6 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, emplee el *método de momento de área* para escribir un programa de computadora que calcule la pendiente y la deflexión en los puntos señalados a lo largo de la viga, desde $x = 0$ hasta $x = L$, utilizando incrementos de Δx. Aplique este programa para calcular la pendiente y la deflexión en cada carga concentrada para la viga de *a*) el problema 9.77 con $\Delta x = 0.5$ m, *b*) el problema 9.119 con $\Delta x = 0.5$ m.

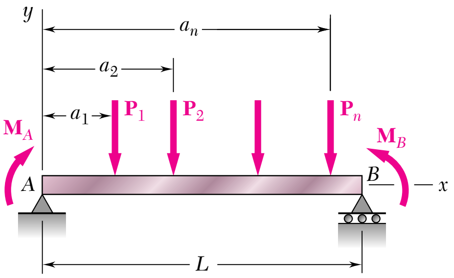


Figura P9.C6

9.C7 Dos cargas de 52 kN se mantienen con una separación de 2.5 m conforme se desplazan lentamente por la viga *AB*. Escriba un programa para computadora que calcule la deflexión en el punto medio *C* de la viga para valores de *x* desde 0 hasta 9 m, usando incrementos de 0.5 m. Utilice $E = 200$ GPa.

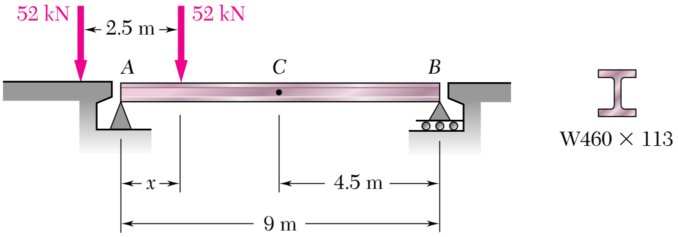


Figura P9.C7

9.C8 A la viga en voladizo *AB* se le pueden aplicar una carga *w* uniformemente distribuida y varias cargas concentradas P_i. Escriba un programa de computadora para determinar la reacción en el apoyo móvil y aplique ese programa a las vigas y cargas de *a*) el problema 9.53*a*, *b*) el problema 9.154.

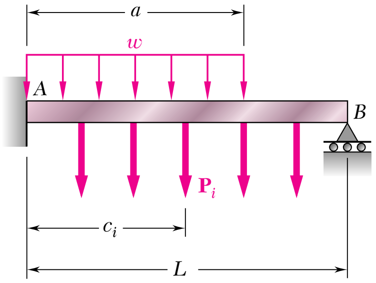
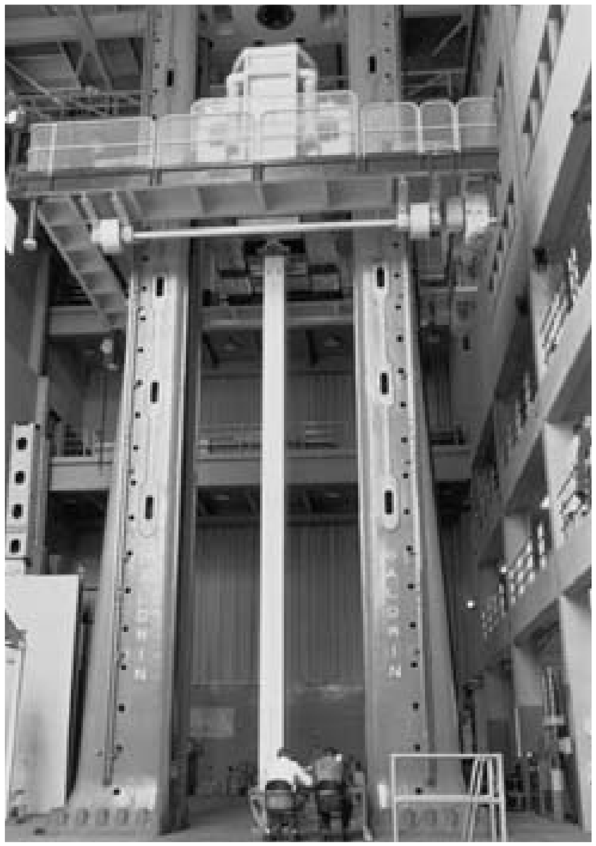


Figura P9.C8

CAPÍTULO

10

Columnas



Una columna de acero de ala ancha está siendo probada en la máquina universal de cinco millones de libras de la Lehigh University, en Bethlehem, Pennsylvania. En este capítulo se estudiarán el análisis y diseño de elementos estructurales que soportan cargas axiales compresivas.

10.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores existían dos preocupaciones primarias: 1) la resistencia de la estructura, es decir, su capacidad para sostener una carga especificada sin experimentar esfuerzos excesivos; 2) la capacidad de la estructura para sostener una carga especificada sin sufrir deformaciones inaceptables. En este capítulo se analizará la *estabilidad* de la estructura, esto es, su capacidad para soportar una carga dada sin experimentar un cambio súbito en su configuración. El análisis se referirá principalmente a las columnas, es decir, al estudio y diseño de elementos prismáticos verticales que soportan cargas axiales.

Primero, en la sección 10.2 se examinará la estabilidad de un modelo simplificado que consta de dos barras rígidas que soportan una carga **P** y están conectadas por un pasador y un resorte. Se observará que si se perturba su equilibrio, el sistema retornará a su posición original de equilibrio siempre que P no exceda un cierto valor P_{cr}, llamado *carga crítica*. Sin embargo, si $P > P_{\text{cr}}$, el sistema se alejará de su posición original y adquirirá una nueva posición de equilibrio. En el primer caso, se dice que el sistema es *estable* y en el segundo se dice que es *inestable*.

En la sección 10.3, el estudio de *estabilidad de columnas elásticas* comenzará analizando una columna de extremos articulados, sometida a una carga axial céntrica. Se obtendrá la *fórmula de Euler* para la carga crítica de la columna y mediante ella se determinará el esfuerzo normal crítico en la columna. Aplicando un factor de seguridad a la carga crítica, podrá calcularse la carga admisible que es posible aplicar a la columna de extremos articulados.

En la sección 10.4 se revisará la estabilidad de las columnas con diferentes condiciones de extremo. Este análisis se simplificará aprendiendo a determinar la *longitud efectiva* de una columna, es decir, la longitud de una columna articulada que tiene la misma carga crítica.

En la sección 10.5 se estudiarán las columnas con carga axial excéntrica; estas columnas tienen deflexiones transversales para todas las magnitudes de la carga. Se deducirá una expresión para la deflexión bajo una carga dada, la cual se usará para calcular el esfuerzo normal máximo en la columna. Por último, se desarrollará la *fórmula de la secante* que relaciona los esfuerzos medio y máximo en una columna.

En las primeras secciones del capítulo, cada columna se supone inicialmente como un prisma recto homogéneo. En la última parte del capítulo, se considerarán columnas reales que se diseñan y analizan usando ecuaciones empíricas dadas por organizaciones profesionales. En la sección 10.6 se presentarán ecuaciones para determinar el esfuerzo admisible en columnas hechas de acero, aluminio o madera y sometidas a una carga axial céntrica. En la sección 10.7, se considera el diseño de columnas con carga axial excéntrica.

10.2 ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS

Suponga que debe diseñarse una columna *AB* de longitud *L*, para soportar una carga **P** (figura 10.1). Imagine que **P** es una carga axial céntrica y que la columna tiene sus dos extremos articulados. Si el área transversal *A* de la columna es tal que el valor $\sigma = P/A$ del esfuerzo en la sección transversal es menor que el valor permisible σ_{perm} para el material utilizado y si la deformación $\delta = PL/AE$ cae dentro de las especificaciones dadas, podría concluirse que la columna se ha diseñado bien. Sin embargo, puede suceder que al aplicar la carga la columna se *pandee*, en lugar de permanecer recta, y se curve repentinamente (figura 10.2). La figura 10.3 muestra una columna, similar a la de la fotografía que da inicio a este capítulo, después de que se le ha cargado de modo tal que ya no es recta; la columna se pandeó. Obviamente, una columna que se pandea bajo la carga especificada está mal diseñada.

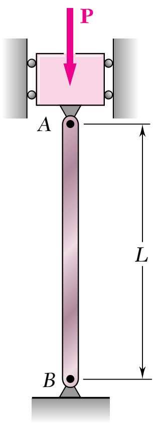


Figura 10.1

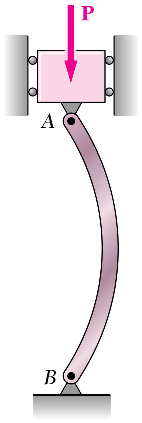


Figura 10.2

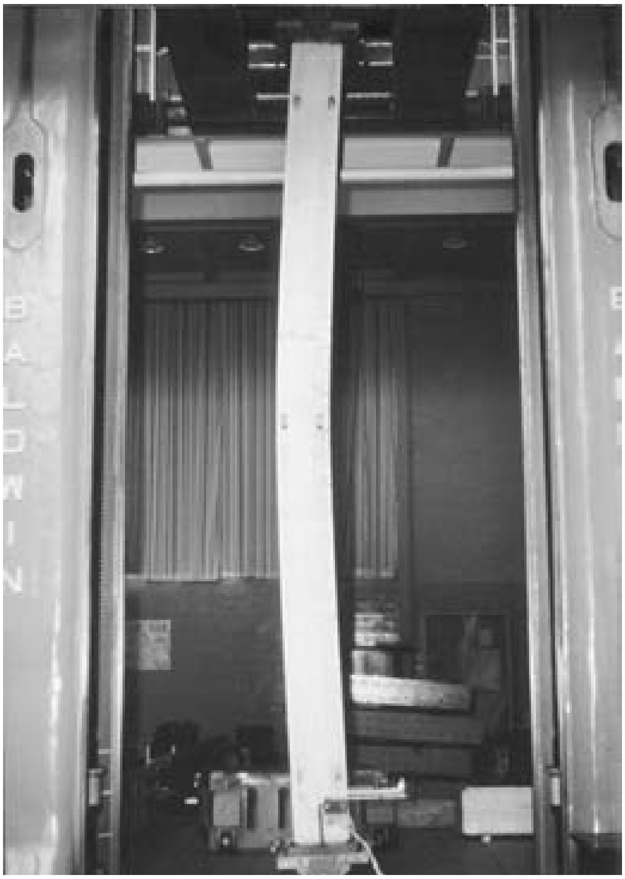


Figura 10.3 Columna pandeada.

Antes de estudiar la estabilidad de las columnas elásticas, será necesario familiarizarse con el problema considerando un modelo simplificado que consta de dos barras rígidas *AC* y *BC*, conectadas en *C* por un pasador y un resorte torsional de constante *K* (figura 10.4).

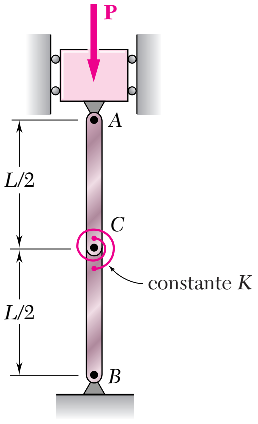
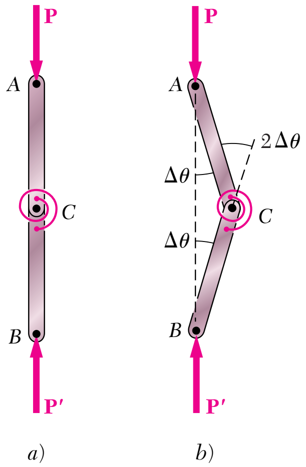


Figura 10.4



a) *b*)

Figura 10.5

Si las dos barras y las dos fuerzas **P** y **P′** están perfectamente alineadas, el sistema permanecerá en la posición de equilibrio que muestra la figura 10.5*a* siempre que no sea perturbado. Pero suponga que C se mueve ligeramente a la derecha, de modo que cada barra forma ahora un pequeño ángulo $\Delta\theta$ con la vertical (figura 10.5*b*). ¿Volverá el sistema a su posición de equilibrio original o se alejará aún más de dicha posición? En el primer caso se dice que el sistema es *estable* y en el segundo, que es *inestable*.

Para determinar si el sistema de dos barras es estable o inestable, se consideran las fuerzas que actúan sobre la barra AC (figura 10.6). Estas fuerzas constan de dos pares, el formado por **P** y **P′**, de momento $P(L/2)$ sen $\Delta\theta$, que tiende a alejar la barra de la vertical y el par **M**, ejercido por el resorte, que trata de regresar la barra a su posición inicial. Dado que el ángulo de deflexión del resorte es $2\,\Delta\theta$, el momento del par **M** es $M = K(2\,\Delta\theta)$. Si el momento del segundo par es mayor que el del primero, el sistema tiende a retornar a su posición original de equilibrio; el sistema es estable. Si el momento del primer par es mayor que el momento del segundo, el sistema tiende a alejarse de su posición original de equilibrio; el sistema es inestable. El valor de la carga para la cual los dos pares son iguales es la *carga crítica* P_{cr}. Se tiene:

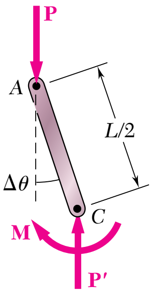


Figura 10.6

$$P_{cr}(L/2)\,\text{sen}\,\Delta\theta = K(2\,\Delta\theta) \tag{10.1}$$

y como sen $\Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$P_{cr} = 4K/L \tag{10.2}$$

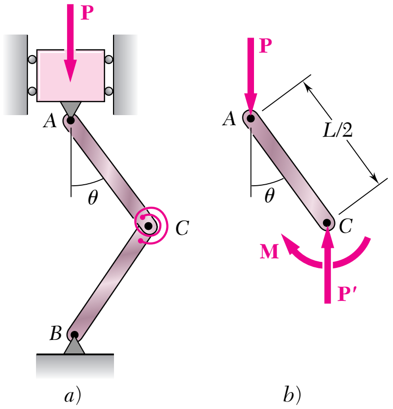
Claramente se ve que el sistema es estable para $P < P_{cr}$, es decir, para los valores de la carga menores que el valor crítico, y no estable para $P > P_{cr}$.

Suponga que una carga $P > P_{cr}$ se ha aplicado a las dos barras de la figura 10.4 y que el sistema ha sido perturbado. Como $P > P_{cr}$, el sistema se alejará de la vertical y, luego de algunas oscilaciones, se establecerá en una nueva posición de equilibrio (figura 10.7*a*). Considerando el equilibrio del cuerpo libre *AC* (figura 10.7*b*), se obtiene una ecuación similar a la ecuación (10.1), pero que incluye el ángulo finito θ.

$$P(L/2) \operatorname{sen} \theta = K(2\theta)$$

o

$$\frac{PL}{4K} = \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} \tag{10.3}$$



a) *b*)

Figura 10.7

El valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio de la figura 10.7 se obtiene resolviendo la ecuación (10.3) por prueba y error. Sin embargo, se observa que, para cualquier valor positivo de θ, se tiene que $\operatorname{sen} \theta < \theta$. Así, la ecuación (10.3) da un valor de θ diferente de cero sólo cuando el miembro izquierdo de la ecuación es mayor que uno. Recordando la ecuación (10.2), se observa que ése es el caso aquí, ya que se ha supuesto $P > P_{cr}$. Pero si se hubiera supuesto $P < P_{cr}$, la segunda posición de equilibrio mostrada en la figura 10.7 no existiría y la única posición de equilibrio posible sería la correspondiente a $\theta = 0$. Así se verifica que, para $P < P_{cr}$, la posición $\theta = 0$ debe ser estable.

Esta observación se aplica a estructuras y sistemas mecánicos en general y se usará en la próxima sección, donde se estudiará la estabilidad de las columnas elásticas.

10.3 FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS ARTICULADAS

Con base en la columna *AB* de la sección anterior (figura 10.1), se busca hallar el valor crítico de la carga **P**, es decir, el valor P_{cr} de la carga para el cual la posición de la figura 10.1 deja de ser estable. Si $P > P_{cr}$ la menor falta de alineación o perturbación provocará que la columna se doble, es decir, que adopte una forma curva como en la figura 10.2.

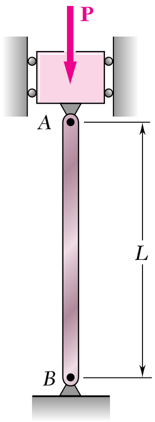


Figura 10.1
(repetida)

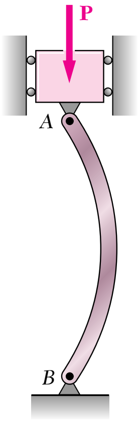


Figura 10.2
(repetida)

El propósito será determinar las condiciones para que la configuración de la figura 10.2 sea posible. Como una columna puede considerarse como una viga en posición vertical y bajo carga axial, se procederá como en el capítulo 9 y se denotará por *x* la distancia desde el extremo *A* de la columna hasta un punto dado Q de la curva elástica, y por y la deflexión de dicho punto (figura 10.8*a*). El eje x será vertical y dirigido hacia abajo, y el eje y horizontal y dirigido a la derecha. Considerando el equilibrio del cuerpo libre de AQ (figura 10.8*b*), se halla que el momento en Q es $M = -Py$. Sustituyendo este valor de M en la ecuación (9.4) de la sección 9.3,

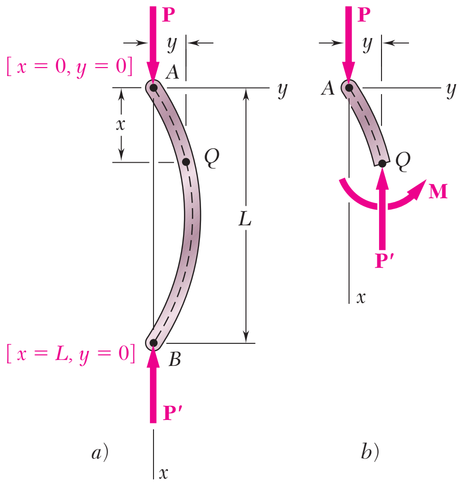


Figura 10.8

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

o, trasponiendo el último término:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{10.5}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes. Haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

la ecuación (10.5) se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \tag{10.7}$$

que es la misma ecuación diferencial que la del movimiento armónico simple, excepto, por supuesto, en que la variable independiente es ahora x en lugar de t. La solución general es:

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px \tag{10.8}$$

como puede verificarse, con facilidad, calculando d^2y/dx^2 y sustituyendo y y d^2y/dx^2 en la ecuación (10.7).

Recordando las condiciones de frontera que deben satisfacerse en los extremos A y B de la columna (figura 10.8*a*), primero se hace $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.8) y se tiene que $B = 0$. Sustituyendo en seguida $x = L$, $y = 0$, se obtiene

$$A \operatorname{sen} pL = 0 \tag{10.9}$$

Esta ecuación se satisface para $A = 0$ o si $\operatorname{sen} pL = 0$. Si ocurre lo primero, la ecuación (10.8) se reduce a $y = 0$ y la columna es recta (figura 10.1). Si se satisface la segunda, $pL = n\pi$ o, sustituyendo p en (10.6) y despejando P:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \tag{10.10}$$

El menor de los valores de P definido por la ecuación (10.10) es el que corresponde a $n = 1$. Entonces

$$\boxed{P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2EI}{L^2}} \tag{10.11}$$

Ésta es la *fórmula de Euler*, llamada así en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Sustituyendo esta expresión para P en la ecuación (10.6) y el valor obtenido para p en la ecuación (10.8), y recordando que $B = 0$, se tiene

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \tag{10.12}$$

que es la ecuación de la curva elástica después de haberse doblado la columna (figura 10.2). Note que el valor de la deflexión máxima, $y_m = A$, es indeterminado. Esto se debe a que la ecuación diferencial (10.5) es una aproximación linealizada de la ecuación diferencial real para la curva elástica.†

Si $P < P_{\text{cr}}$ la condición sen $pL = 0$ no puede satisfacerse, por lo que la solución dada por la ecuación (10.12) no existe. Debe tenerse entonces $A = 0$ y la única configuración posible para la columna es una línea recta. Así, para $P < P_{\text{cr}}$ la forma recta de la figura 10.1 es estable.

En el caso de una columna con sección circular o cuadrada, el momento de inercia I de la sección transversal es el mismo con respecto a cualquier eje centroidal y la columna se curvará en un plano u otro, excepto bajo las restricciones que se impongan en los extremos. Para otras secciones, la carga crítica debe calcularse haciendo $I = I_{\text{mín}}$ en la ecuación (10.11); si ocurre la curvatura, tendrá lugar en un plano perpendicular al correspondiente eje de inercia principal.

El valor del esfuerzo correspondiente a la carga crítica es el *esfuerzo crítico* y se le designa por σ_{cr}. Retomando la ecuación (10.11) y haciendo $I = Ar^2$, donde A es el área de la sección transversal y r el radio de giro, se tiene

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 E A r^2}{A L^2}$$

o

$$\boxed{\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}} \tag{10.13}$$

La cantidad L/r es la *relación de esbeltez* de la columna. Es claro, dado la anotación del párrafo precedente, que el mínimo valor del radio de giro r debe usarse al calcular la relación de esfuerzo y el esfuerzo crítico de la columna.

La ecuación (10.13) muestra que el esfuerzo crítico es proporcional al módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional al cuadrado de la relación de esbeltez de la columna. La gráfica de σ_{cr} contra L/r se muestra en la figura 10.9 para el acero estructural, suponiendo $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Debe recordarse que al elaborar la gráfica σ_{cr} no se ha usado el factor de seguridad. También se observa que, si el valor obtenido para σ_{cr} de la ecuación (10.13) o de la curva de la figura 10.9 es mayor que el límite de fluencia σ_Y, este valor no es de interés, pues la columna fluirá a compresión y dejará de ser elástica antes de curvarse.

---

† Recuerde que la ecuación $d^2y/dx^2 = M/EI$ se obtuvo en la sección 9.3 suponiendo que la pendiente dy/dx de la viga podía despreciarse y que la expresión exacta dada en la ecuación (9.3) para la curvatura de una viga, podía remplazarse por $1/\rho = d^2y/dx^2$.

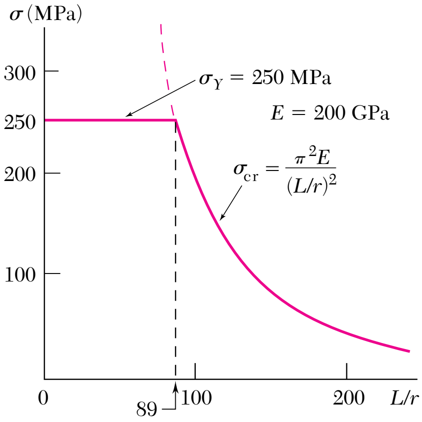


Figura 10.9

El análisis del comportamiento de una columna se ha basado hasta aquí en la hipótesis de una carga céntrica perfectamente alineada. En la práctica, este caso es raro por lo que en la sección 10.5 se tendrá en cuenta el efecto de la excentricidad de la carga. Este método nos conducirá a una transición más suave de la falla por curvatura de columnas largas y delgadas a la falla por compresión de columnas cortas. También dará una visión más realista entre la relación de esbeltez de una columna y la carga que la hace fallar.

EJEMPLO 10.01

Una columna articulada de 2 m de longitud y sección cuadrada debe hacerse de madera. Suponiendo $E = 13$ GPa y $\sigma_{perm} = 12$ MPa y usando un factor de seguridad de 2.5, para calcular la carga crítica de pandeo de Euler, determine el tamaño de la sección transversal si la columna debe soportar: *a*) una carga de 100 kN, *b*) una carga de 200 kN.

a) Carga de 100 kN. Usando el factor de seguridad especificado.

$$P_{cr} = 2.5(100 \text{ kN}) = 250 \text{ kN} \qquad L = 2 \text{ m} \qquad E = 13 \text{ GPa}$$

según la fórmula de Euler (10.11) y resolviendo para I,

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^2}{\pi^2(13 \times 10^9 \text{ Pa})} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Pero $I = a^4/12$, por tratarse de un cuadrado de lado a; entonces

$$\frac{a^4}{12} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \qquad a = 98.3 \text{ mm} \approx 100 \text{ mm}$$

Se verifica el valor del esfuerzo normal de la columna:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \text{ kN}}{(0.100 \text{ m})^2} = 10 \text{ MPa}$$

Ya que σ es menor que el esfuerzo permisible, una sección transversal de 100 × 100 mm es aceptable.

b) Carga de 200 kN. Resolviendo de nuevo la ecuación (10.11) para I, pero haciendo $P_{cr} = 2.5(200) = 500$ kN, se tiene

$$I = 15.588 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\frac{a^4}{12} = 15.588 \times 10^{-6} \qquad a = 116.95 \text{ mm}$$

El valor del esfuerzo normal es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200 \text{ kN}}{(0.11695 \text{ m})^2} = 14.62 \text{ MPa}$$

Dado que este valor es mayor que el esfuerzo permisible, las dimensiones obtenidas no son aceptables y debe elegirse una sección con base en su resistencia a compresión. Se escribe

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}} = \frac{200 \text{ kN}}{12 \text{ MPa}} = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$a^2 = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \qquad a = 129.1 \text{ mm}$$

Una sección transversal de 130 × 130 mm es aceptable.

10.4 EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS CON OTRAS CONDICIONES DE EXTREMO

La fórmula de Euler (10.11) se dedujo en la sección precedente para una columna con extremos articulados. Ahora se estudiará cómo obtener P_{cr} para columnas con diferentes condiciones de extremo.

En el caso de una columna con un extremo libre en A y empotrada en B, con la carga **P** (figura 10.10*a*), se observa que la columna se comportará como la mitad superior de una columna articulada (figura 10.10*b*). La carga crítica para la columna de la figura 10.10*a* es la misma que para la columna articulada de la figura 10.10*b* y puede obtenerse mediante la fórmula de Euler (10.11) usando una longitud igual al doble de longitud real L de la columna dada. Se dice que la *longitud efectiva* L_e de la columna de la figura 10.10 es igual a $2L$ y se reemplaza $L_e = 2L$ en la fórmula de Euler:

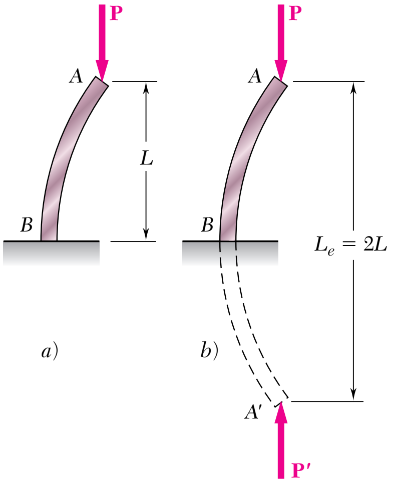


Figura 10.10

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \tag{10.11′}$$

En forma similar se encuentra el esfuerzo crítico mediante la ecuación

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \tag{10.13′}$$

La cantidad L_e/r es la *relación efectiva de esbeltez* de la columna y en el caso considerado aquí, es igual a $2L/r$.

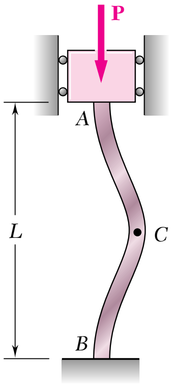


Figura 10.11

Sea una columna con dos extremos empotrados A y B que soporta una carga **P** (figura 10.11). La simetría de los apoyos y de la carga con respecto a un eje horizontal a través del punto medio C requiere que la fuerza cortante en C y los componentes horizontales de las reacciones en A y B sean cero (figura 10.12). Se sigue que las restricciones impuestas sobre la mitad superior AC de la columna por el soporte en A y por la mitad inferior CB son idénticos (figura 10.13). La porción AC debe ser simétrica con respecto a su punto medio D y éste debe ser un punto de inflexión, con momento flector cero. Un razonamiento similar muestra que el momento flector en el punto medio E de la mitad inferior de la columna también debe ser cero (figura 10.14*a*). Puesto que el momento en los extremos de una columna articulada es cero, se tiene que la porción DE de la columna de la figura 10.14*a* debe conducirse como una columna articulada (figura 10.14*b*). Así se concluye que la longitud efectiva de una columna con dos extremos fijos es $L_e = L/2$.

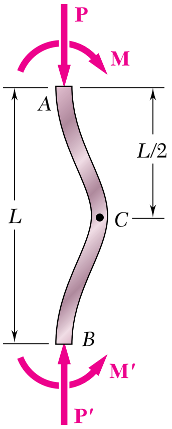


Figura 10.12

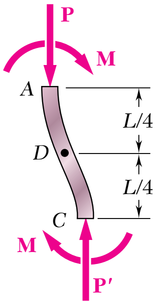
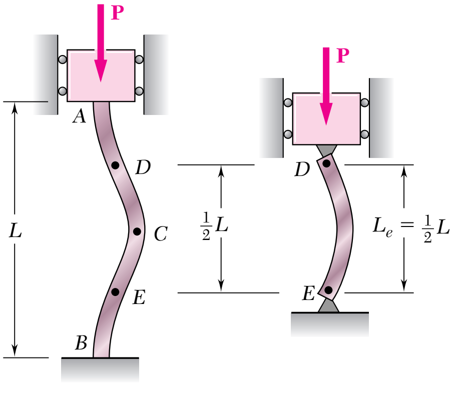


Figura 10.13



a) *b*)

Figura 10.14

En el caso de una columna con un extremo fijo B y un extremo articulado A que sostiene una carga **P** (figura 10.15), deberá escribirse y resolverse la ecuación diferencial de la curva elástica para determinar la longitud efectiva de la columna. En el diagrama de cuerpo libre de la columna entera (figura 10.16), se observa primero que se ejerce una fuerza transversal **V** en el extremo A, además de la fuerza axial **P**, y que **V** es estáticamente indeterminada. Considerando ahora el diagrama de cuerpo libre de una porción AQ de la columna (figura 10.17), se halla que el momento flector en Q es

$$M = -Py - Vx$$

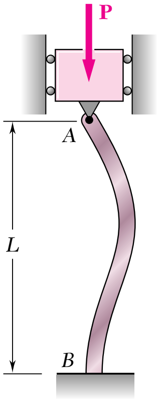


Figura 10.15

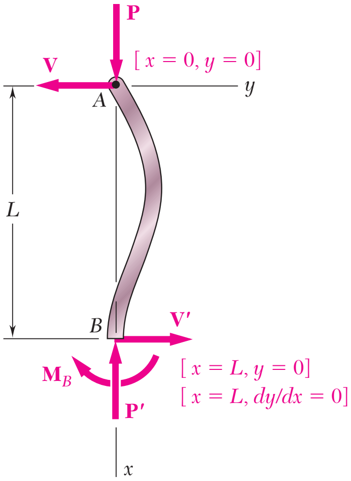


Figura 10.16

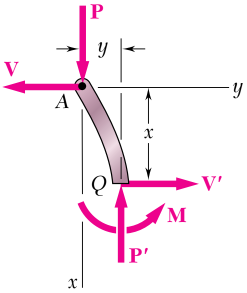


Figura 10.17

Sustituyendo este valor en la ecuación (9.4) de la sección 9.3, se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x$$

Trasponiendo el término que contiene a y y haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

como se hizo en la sección 10.3, se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -\frac{V}{EI}x \tag{10.14}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, no homogénea y de segundo orden con coeficientes constantes. Al observar que los miembros izquierdos de las ecuaciones (10.7) y (10.14) son idénticos, se concluye que es posible obtener la solución general de ecuación (10.14) añadiendo una solución particular de la ecuación (10.14) a la solución (10.8) obtenida para la ecuación (10.7). Es fácil ver que tal solución es:

$$y = -\frac{V}{p^2EI}x$$

o, recordando (10.6),

$$y = -\frac{V}{P}x \tag{10.15}$$

Añadiendo las soluciones (10.8) y (10.15), la solución general de la ecuación (10.14) se expresa como:

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - \frac{V}{P}x \tag{10.16}$$

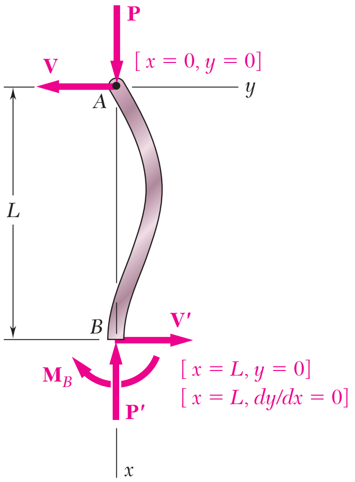


Figura 10.16 (repetida)

Las constantes A y B y la magnitud V de la fuerza transversal **V** no conocida se obtienen de las condiciones de frontera indicadas en la figura 10.16. Haciendo primero $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.16), se halla que $B = 0$. Haciendo $x = L$, $y = 0$, se obtiene

$$A \operatorname{sen} pL = \frac{V}{P}L \tag{10.17}$$

Finalmente, calculando

$$\frac{dy}{dx} = Ap \cos px - \frac{V}{P}$$

y haciendo, $x = L$, $dy/dx = 0$, resulta

$$Ap \cos pL = \frac{V}{P} \tag{10.18}$$

Dividiendo miembro a miembro (10.17) entre (10.18), se concluye que una solución de la forma (10.16) puede existir sólo si

$$\tan pL = pL \tag{10.19}$$

Resolviendo esta ecuación por prueba y error, se encuentra que el menor valor de pL que satisface (10.19) es

$$pL = 4.4934 \tag{10.20}$$

Llevando el valor de p definido por la ecuación (10.20) a la ecuación (10.6) y despejando P, se obtiene la carga crítica de la columna de la figura 10.15:

$$P_{\text{cr}} = \frac{20.19EI}{L^2} \tag{10.21}$$

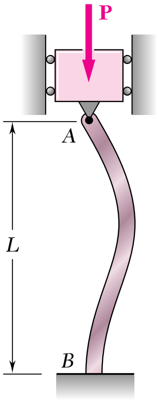


Figura 10.15 (repetida)

La longitud efectiva de la columna se encuentra igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (10.11′) y (10.21):

$$\frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{20.19EI}{L^2}$$

Despejando L_e se obtiene que la longitud efectiva de una columna con un extremo fijo y el otro articulado es $L_e = 0.699L \approx 0.7L$.

En la figura 10.18 se muestran las longitudes efectivas correspondientes a las diferentes condiciones de extremo consideradas en esta sección.

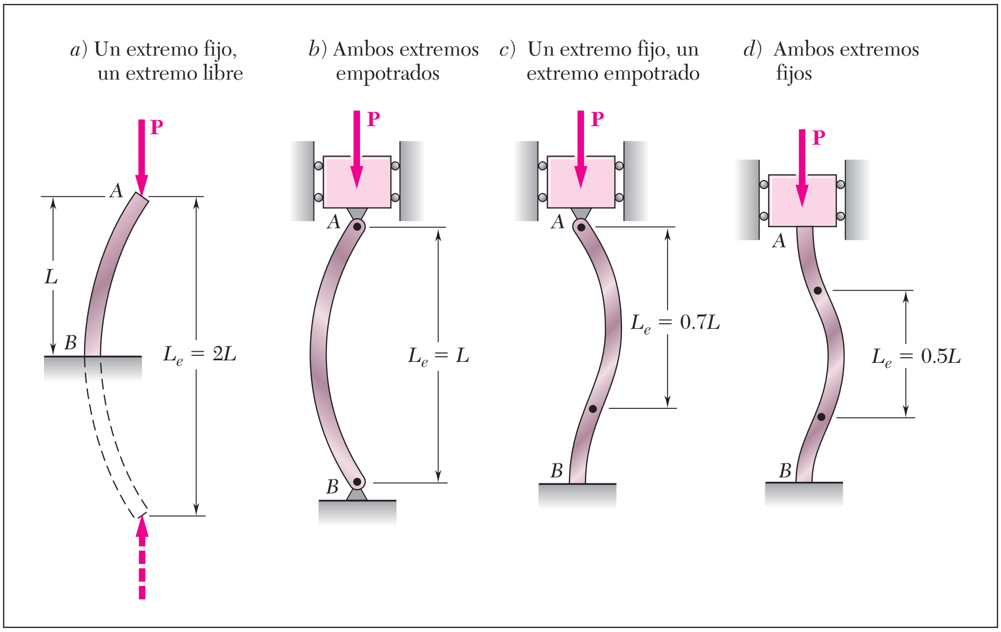
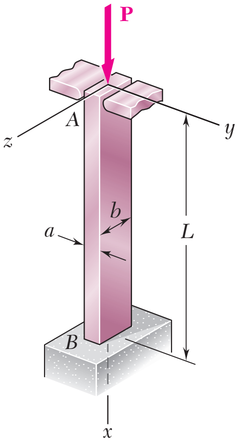

a) Un extremo fijo, un extremo libre
b) Ambos extremos empotrados
c) Un extremo fijo, un extremo empotrado
d) Ambos extremos fijos
P
A
L
B
$L_e = 2L$
P
A
B
$L_e = L$
P
A
B
$L_e = 0.7L$
P
A
B
$L_e = 0.5L$

Figura 10.18 Longitudes efectivas de columnas para varias condiciones de extremo.



PROBLEMA MODELO 10.1

Una columna de aluminio, de longitud L y sección transversal rectangular, tiene un extremo fijo B y soporta una carga céntrica en A. Dos placas lisas y redondeadas restringen el movimiento del extremo A en uno de los planos verticales de simetría de la columna, pero le permiten moverse en el otro plano. *a*) Determine la relación a/b de los lados de la sección correspondiente al diseño más eficiente contra pandeo. *b*) Diseñe la sección transversal más eficiente para la columna, si $L = 20$ in., $E = 10.1 \times 10^6$ psi, $P = 5$ kips, y el factor de seguridad es 2.5.

SOLUCIÓN

Pandeo en el plano *xy*. En la figura 10.18 se observa que la longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 0.7L$. El radio de giro r_z de la sección transversal se obtiene escribiendo

$$I_x = \tfrac{1}{12}ba^3 \qquad A = ab$$

y, como $I_z = Ar_z^2$, $\qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \qquad r_z = a/\sqrt{12}$

La relación efectiva de esbeltez de la columna con respecto al pandeo en el plano *xy* es

$$\frac{L_e}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} \tag{1}$$

Pandeo en el plano *xz*. La longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 2L$, y el correspondiente radio de giro es $r_y = b/\sqrt{12}$. Así

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} \tag{2}$$

***a*) Diseño más eficiente.** El diseño más eficiente es aquel para el cual los esfuerzos críticos correspondientes a los dos posibles modos de pandeo son iguales. Refiriéndose a la ecuación (10.13′), se tiene que éste será el caso si los dos valores obtenidos arriba para la relación efectiva de la esbeltez son iguales. Se escribe

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

y, despejando a/b, $\qquad \frac{a}{b} = \frac{0.7}{2} \qquad\qquad \frac{a}{b} = 0.35$ ◀

***b*) Diseño para los datos dados.** Como $F.S. = 2.5$,

$$P_{\text{cr}} = (F.S.)P = (2.5)(5 \text{ kips}) = 12.5 \text{ kips}$$

Usando $a = 0.35b$, se tiene $A = ab = 0.35b^2$ y

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{12\,500 \text{ lb}}{0.35b^2}$$

Haciendo $L = 20$ in. en la ecuación (2), se tiene $L_e/r_y = 138.6/b$. Sustituyendo E, L_e/r y σ_{cr} en la ecuación (10.13′), se escribe

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \qquad\qquad \frac{12\,500 \text{ lb}}{0.35b^2} = \frac{\pi^2(10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

$b = 1.620$ in. $\qquad a = 0.35b = 0.567$ in. ◀

PROBLEMAS

10.1 Si se sabe que el resorte de torsión en B es de constante K y que la barra AB es rígida, determine la carga crítica P_{cr}.

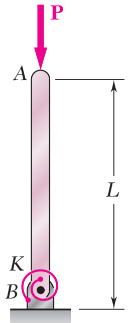


Figura P10.1

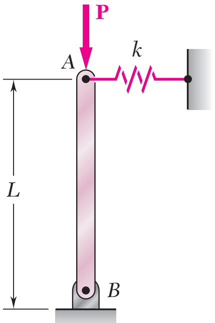


Figura P10.2

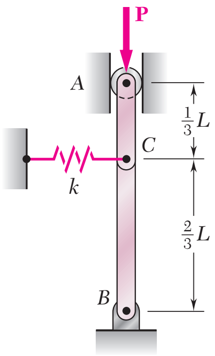


Figura P10.3

10.2 Si se sabe que el resorte en A es de constante k y que la barra AB es rígida, determine la carga crítica P_{cr}.

10.3 Dos barras rígidas AC y BC están conectadas a un resorte de constante k como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte puede actuar a tensión o a compresión, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.

10.4 Dos barras rígidas AC y BC están conectadas por un pasador en C, como se muestra en la figura. Si el resorte de torsión en B es de constante K, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.j

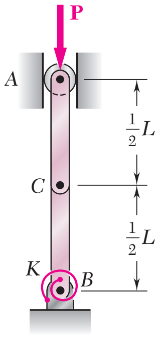


Figura P10.4

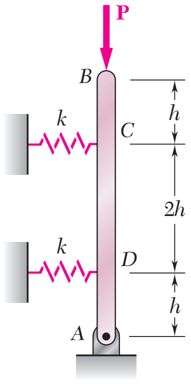


Figura *P10.5*

10.5 La barra rígida AB está unida a una bisagra en A y a dos resortes, cada uno de constante $k = 2$ kips/in., que pueden actuar a tensión o a compresión. Si se sabe que $h = 2$ ft, determine la carga crítica.

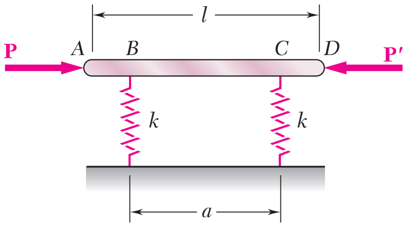


Figura *P10.6*

10.6 La barra rígida *AD* está unida a dos resortes de constante k y está en equilibrio en la posición mostrada en la figura. Si se sabe que las fuerzas iguales y opuestas **P** y **P**′ *permanecen horizontales*, determine la magnitud P_{cr} de la carga crítica para el sistema.

10.7 La barra rígida *AB* está unida a la bisagra en *A* y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 450$ mm, $d = 300$ mm y $m = 200$ kg, determine el rango de valores de k para el cual el equilibrio de la barra rígida *AB* es estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

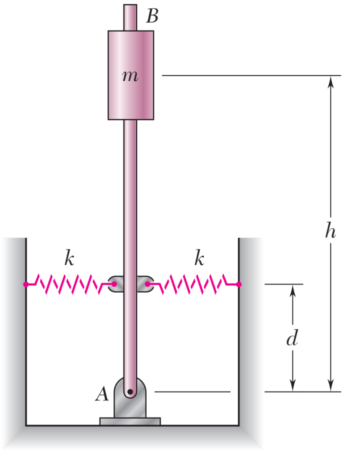


Figura P10.7

10.8 Un marco se compone de cuatro elementos en L conectados por cuatro resortes de torsión, cada uno de los cuales tiene una constante K. Si se aplican cargas de igual magnitud **P** en los puntos *A* y *D*, como se muestra en la figura, calcule el valor crítico P_{cr} de las cargas que se aplican al marco.

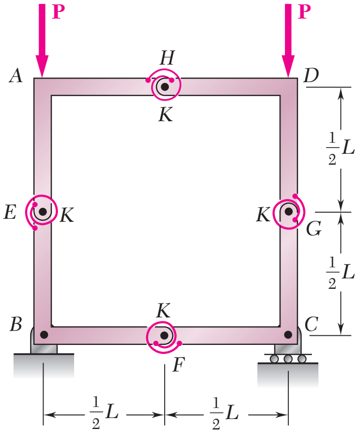


Figura P10.8

10.9 Determine la carga crítica de una tabla de madera con 1 m de largo, la cual tiene una sección transversal rectangular de 7 × 24 mm. Utilice $E = 12$ GPa.

10.10 Determine la carga crítica de una pieza redonda de madera con longitud de 0.9 m y diámetro de *a*) 10 mm, *b*) 15 mm. Utilice $E = 12$ GPa.

10.11 Determine la dimensión *d* tal que las barras de aluminio y acero tengan el mismo peso, y calcule la carga crítica para cada barra.

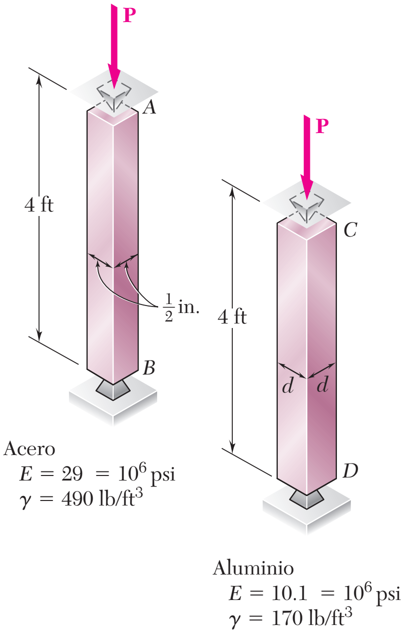

P
A
4 ft
$\frac{1}{2}$ in.
B
Acero
$E = 29 \;=\; 10^6$ psi
$\gamma = 490$ lb/ft^3
P
C
4 ft
d
d
D
Aluminio
$E = 10.1 \;=\; 10^6$ psi
$\gamma = 170$ lb/ft^3

Figura P10.11 y P10.12

10.12 Determine *a*) la carga crítica para la barra de acero, *b*) la dimensión *d* tal que la barra de aluminio tenga la misma carga crítica, *c*) exprese el peso de la pieza de aluminio como un porcentaje del peso de la barra de acero.

10.13 Un elemento a compresión de 1.5 m de longitud efectiva consta de una barra de latón de 30 mm de diámetro. Para reducir el peso 25%, se reemplaza por una barra hueca con la sección transversal mostrada en la figura. Determine *a*) la reducción porcentual en la carga crítica, *b*) el valor de la carga crítica para la barra hueca. Considere $E = 105$ GPa.

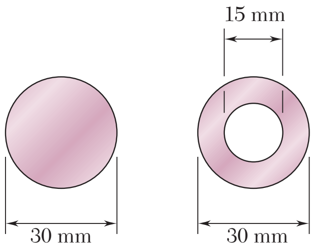

15 mm
30 mm
30 mm

Figura P10.13

10.14 Una columna de longitud efectiva *L* puede construirse pegando tablas idénticas en cada uno de los arreglos que se muestran en la figura. Determine la relación entre la carga crítica que se obtiene con el arreglo *a*) y la carga crítica que se logra con el arreglo *b*).

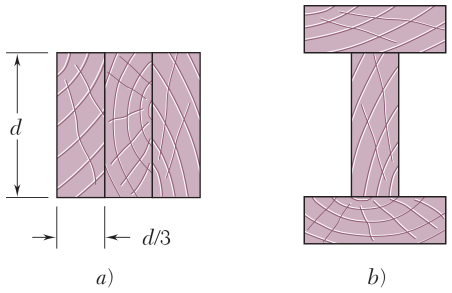


Figura *P10.14*

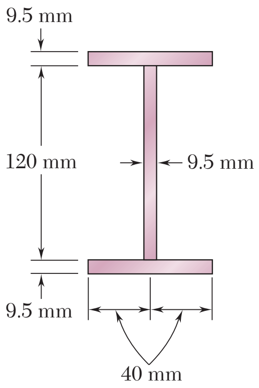

9.5 mm
120 mm
9.5 mm
9.5 mm
40 mm

Figura P10.15

10.15 Se desea construir una columna de 6 m de longitud efectiva, para ello se usarán tres placas como se muestra en la figura. Utilice $E = 200$ GPa para determinar el factor de seguridad respecto del pandeo para una carga céntrica de 16 kN.

10.16 y 10.17 Un elemento a compresión de 12 ft de longitud efectiva se construyó soldando dos ángulos de acero de $4 \times 3 \times \frac{1}{4}$ in., como se muestra en la figura. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la carga céntrica permisible para el elemento si el factor de seguridad requerido es de 2.5.

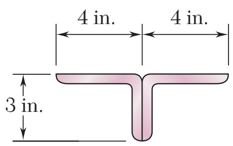


Figura P10.16

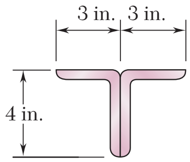


Figura P10.17

10.18 Un elemento a compresión sencilla de 8.2 m de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C200 × 17.1 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Si se sabe que el factor de seguridad es de 1.85, determine la carga céntrica permisible para el elemento. Utilice $E = 200$ GPa y $d = 100$ mm.

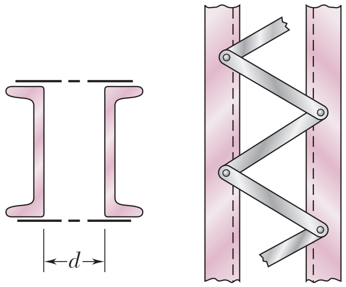


Figura *P10.18*

10.19 Los elementos *AB* y *CD* son barras de acero de 30 mm de diámetro y los elementos *BC* y *AD* son barras de acero de 22 mm de diámetro. Al apretar el torniquete, se tensa el elemento diagonal *AC*. Si se requiere un factor de seguridad respecto del pandeo de 2.75, determine la máxima tensión permisible en *AC*. Utilice $E = 200$ GPa y considere pandeo sólo en el plano de la estructura.

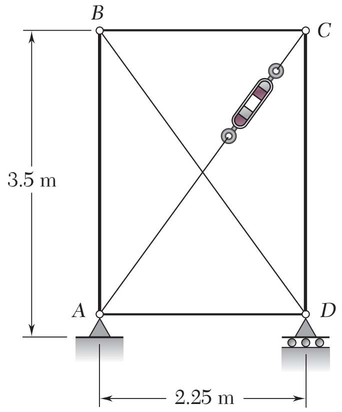


Figura *P10.19*

10.20 Si se necesita un factor de seguridad de 2.6, determine la carga **P** máxima que puede aplicarse a la estructura que se muestra en la figura. Utilice $E = 200$ GPa y considere sólo el pandeo en el plano de la estructura.

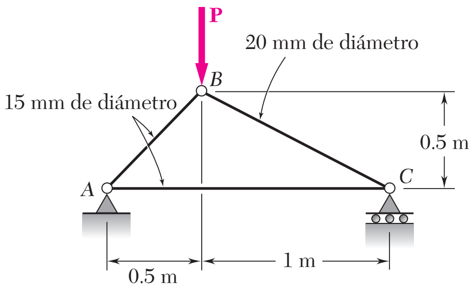


Figura P10.20

10.21 La barra uniforme de aluminio *AB* tiene una sección transversal rectangular de 20 × 36 mm y está apoyada mediante pasadores y ménsulas, como se muestra en la figura. Cada extremo de la barra puede rotar libremente alrededor de un eje horizontal a través del pasador, pero la rotación respecto del eje vertical se evita por medio de las ménsulas. Si se utiliza $E = 70$ GPa, determine la carga céntrica permisible **P** si se requiere un factor de seguridad de 2.5.

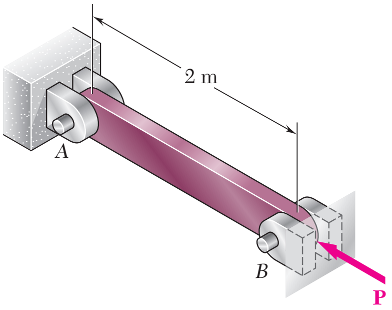


Figura P10.21

10.22 La columna *AB* soporta una carga céntrica **P** con magnitud de 15 kips. Los cables *BC* y *BD* están tensos y evitan el movimiento del punto *B* en el plano *xz*. Con la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2.2 y despreciando la tensión en los cables, determine la máxima longitud permisible *L*. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

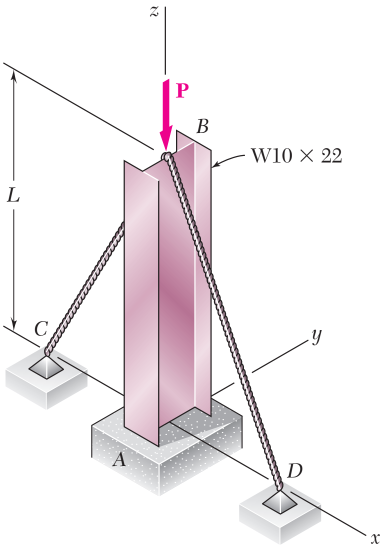


Figura *P10.22*

10.23 Un perfil de acero laminado W8 × 21 se utiliza con el arreglo de apoyo y cable que se muestra en el problema 10.22. Si se sabe que $L = 24$ ft, determine la carga céntrica permisible **P** cuando se desea un factor de seguridad de 2.2. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.24 Un puntal cuadrado de aluminio de 1 in. se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un anclaje en el punto *A* y por un conjunto de apoyos móviles en *B* y *C*, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L_{AB} = 3$ ft, determine *a*) los valores máximos de L_{BC} y L_{CD} que pueden usarse si la carga permisible **P** debe ser lo más grande posible, *b*) la magnitud de la carga permisible correspondiente. Considere sólo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

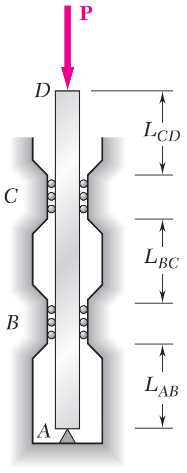


Figura P10.24

10.25 La columna *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme con $b = 12$ mm y $d = 22$ mm. La columna se sostiene en el plano *xz* en su punto medio *C* y recibe una fuerza céntrica **P** con magnitud de 3.8 kN. Si se sabe que el factor de seguridad requerido es de 3.2, determine la máxima longitud permisible *L*. Utilice $E = 200$ GPa.

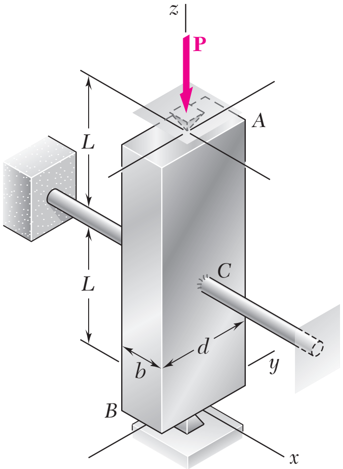


Figura P10.25 y P10.26

10.26 La columna *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme y se encuentra apoyada en el plano *xz* en su punto medio *C*. *a*) Determine la relación *b*/*d* para la cual el factor de seguridad es el mismo respecto del pandeo en los planos *xz* y *yz*. *b*) Con la relación encontrada en el inciso *a*), diseñe la sección transversal de la columna para la cual el factor de seguridad será 3.0, cuando $P = 4.4$ kN, $L = 1$ m y $E = 200$ GPa.

10.27 Cada uno de los cinco puntales consisten en un tubo de aluminio de 32 mm de diámetro exterior y 4 mm de espesor de pared. Con $E = 70$ GPa y un factor de seguridad de 2.3, determine la carga permisible $\mathbf{P}_0$ para cada una de las condiciones de apoyo que se muestran en la figura.

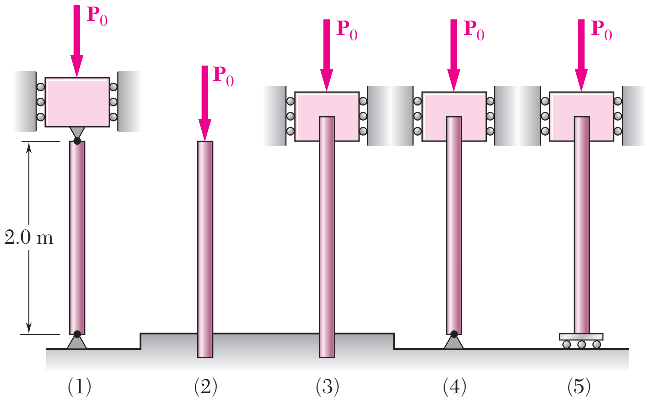


Figura P10.27

10.28 Se emplean dos columnas para sostener un bloque que pesa 3.25 kips, en cada uno de los modos que se muestran en la figura. *a*) Si se sabe que la columna de la figura (1) es de acero con un diámetro de 1.25 in., determine el factor de seguridad respecto del pandeo para la carga que se ilustra. *b*) Determine el diámetro de cada una de las columnas restantes para las cuales el factor de seguridad es el mismo que el que se obtuvo en el inciso anterior. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

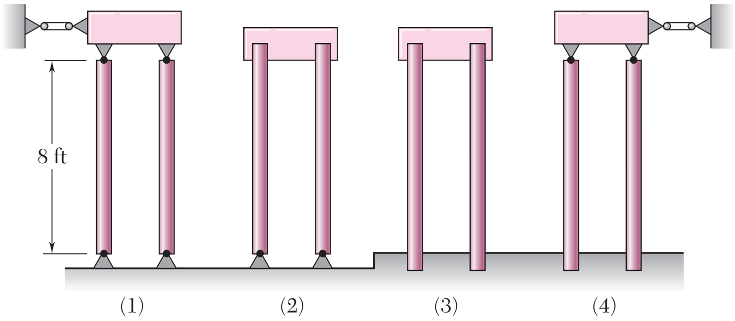
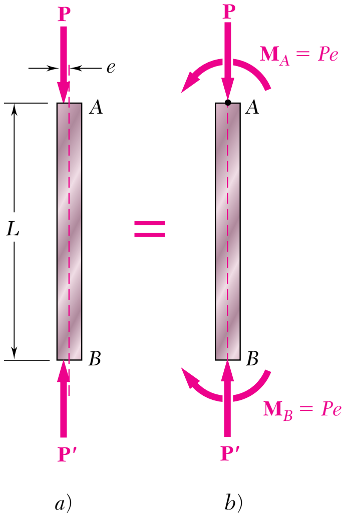


Figura P10.28

*10.5 CARGA EXCÉNTRICA. FÓRMULA DE LA SECANTE

En esta sección se estudiará el problema del pandeo de las columnas en una forma diferente, esto es, observando que la carga **P** aplicada a una columna nunca es perfectamente céntrica. Llamando *e* a la excentricidad de la carga, es decir, a la distancia que hay entre la línea de acción de **P** y el eje de la columna (figura 10.19*a*), la carga excéntrica dada se reemplaza por una fuerza céntrica **P** y un par $\mathbf{M}_A$ de momento $M_A = Pe$ (figura 10.19*b*). Es claro que, sin importar lo pequeñas que sean la carga **P** y la excentricidad *e*, el par $\mathbf{M}_A$ causará alguna flexión en la columna (figura 10.20). A medida que la carga excéntrica



a) *b*)

Figura 10.19

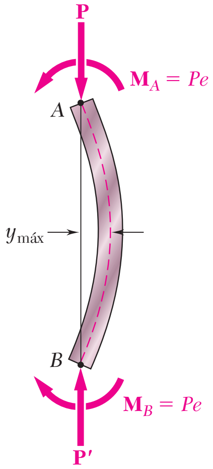


Figura 10.20

se incrementa, tanto el par $\mathbf{M}_A$ como la fuerza axial $\mathbf{P}$ aumentan y ambos provocan que la columna se flexione más. Visto así, el problema del pandeo no es cuestión de determinar cuánto tiempo la columna va a permanecer recta y estable bajo una carga creciente, sino cuánto puede flexionarse la columna bajo carga creciente, sin que el esfuerzo permisible sea excedido y sin que la deflexión máxima $y_{\text{máx}}$ sea excesiva.

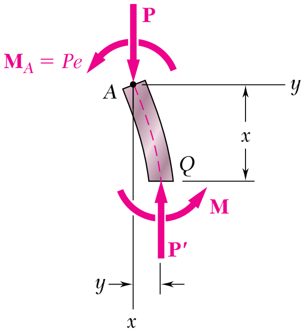


Figura 10.21

Primero se escribirá y resolverá la ecuación diferencial de la curva elástica, procediendo como en las secciones 10.3 y 10.4. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de una porción AQ de la columna y escogiendo los ejes, como se muestra (figura 10.21), se halla que el momento flector en Q es

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe \tag{10.22}$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación (9.4), de la sección 9.3

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI}$$

Trasponiendo el término que contiene a y y haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

como se hizo antes, se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e \tag{10.23}$$

Como el lado izquierdo de esta ecuación es el mismo de la ecuación (10.7) que se resolvió en la sección 10.3, la solución general de la ecuación (10.23) será

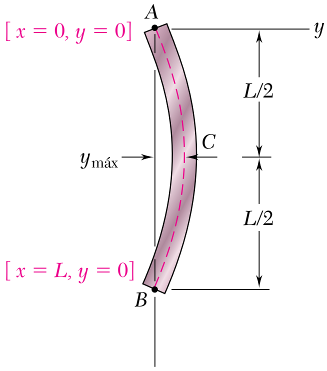


Figura 10.22

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - e \tag{10.24}$$

donde el último término es una solución particular de la ecuación (10.23).

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones de frontera de la figura 10.22. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.24), se tiene

$$B = e$$

Haciendo luego $x = L$, $y = 0$, se escribe

$$A \operatorname{sen} pL = e(1 - \cos pL) \tag{10.25}$$

Recordando que

$$\operatorname{sen} pL = 2 \operatorname{sen} \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$$

y

$$1 - \cos pL = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{pL}{2}$$

y sustituyendo en la ecuación (10.25), se obtiene, luego de las simplificaciones

$$A = e \tan \frac{pL}{2}$$

Sustituyendo A y B en la ecuación (10.24), se obtiene la ecuación de la curva elástica:

$$y = e\left(\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen} px + \cos px - 1\right) \tag{10.26}$$

El valor de la deflexión máxima se halla haciendo $x = L/2$ en la ecuación (10.26). Se tiene

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= e\left(\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen}\frac{pL}{2} + \cos\frac{pL}{2} - 1\right) \\ &= e\left(\frac{\operatorname{sen}^2\dfrac{pL}{2} + \cos^2\dfrac{pL}{2}}{\cos\dfrac{pL}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec\frac{pL}{2} - 1\right) \tag{10.27}$$

Recordando la ecuación (10.6), se escribe

$$y_{\text{máx}} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \tag{10.28}$$

Nótese en la expresión obtenida que $y_{\text{máx}}$ se vuelve infinita cuando

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{10.29}$$

Aunque la deflexión no se hace infinita realmente, sin embargo, se vuelve inaceptablemente grande y P no debe llegar al valor crítico que satisface la ecuación (10.29). Resolviendo (10.29) para P se tiene que es el valor

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.30}$$

que se halló en la sección 10.3 para una columna con carga céntrica. Resolviendo (10.30) para EI y reemplazando en (10.28), la deflexión máxima puede expresarse en la forma alternativa

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1\right) \tag{10.31}$$

El esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ ocurre en la sección de la columna en donde el momento flector es máximo, es decir, en la sección transversal a través del punto medio C y se obtiene sumando los esfuerzos normales debidos, respectivamente, a la fuerza axial y al momento flector ejercido en esa sección (véase sección 4.12). Se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}}c}{I} \tag{10.32}$$

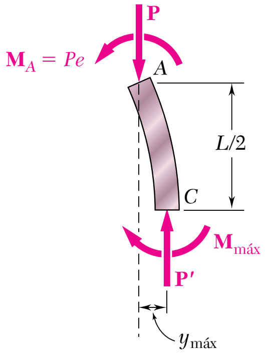


Figura 10.23

Del diagrama de cuerpo libre de la porción AC de la columna (figura 10.23), se halla que:

$$M_{máx} = Py_{máx} + M_A = P(y_{máx} + e)$$

Sustituyendo este valor en (10.32) y recordando que $I = Ar^2$, se escribe

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{máx} + e)c}{r^2}\right] \tag{10.33}$$

Sustituyendo por $y_{máx}$ el valor obtenido en (10.28),

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\right] \tag{10.34}$$

Una forma alternativa para $\sigma_{máx}$ se obtiene sustituyendo $y_{máx}$ de (10.31) en (10.33). Así

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \tag{10.35}$$

La ecuación obtenida puede usarse con cualquier condición de extremo, siempre que se use el valor apropiado de la carga crítica (véase sección 10.4).

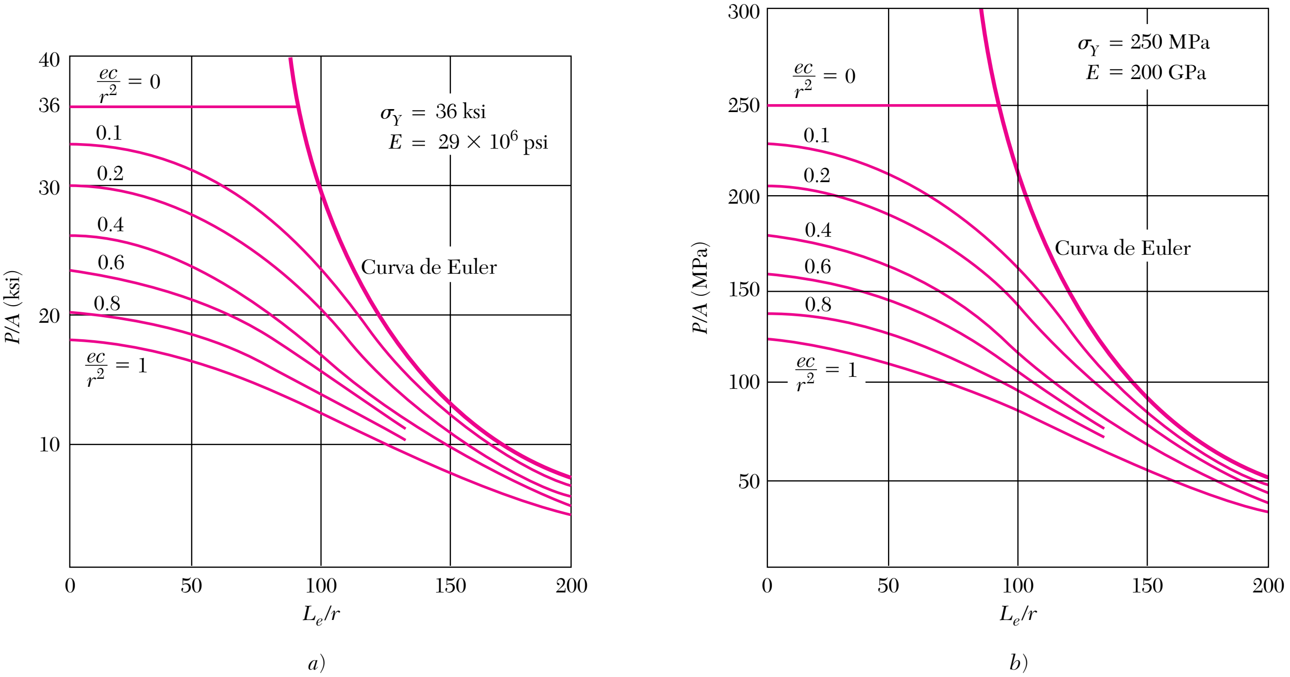
Note que, como $\sigma_{máx}$ no varía linealmente con la carga P, el principio de superposición no se emplea en la determinación del esfuerzo debido a la aplicación simultánea de varias cargas; debe calcularse primero la carga resultante y luego puede usarse la ecuación (10.34) o la (10.35) para determinar el esfuerzo correspondiente. Por la misma razón, cualquier factor de seguridad debe aplicarse a la carga y no al esfuerzo.

Haciendo $I = Ar^2$ en la ecuación (10.34) y resolviendo para la relación P/A al frente del paréntesis, se escribe

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\dfrac{L_e}{r}\right)} \tag{10.36}$$

en donde la longitud efectiva se utiliza para lograr que la fórmula sea aplicable a varias condiciones de extremo. Ésta es *la fórmula de la secante*, la cual define la fuerza por unidad de área, P/A, que causa un esfuerzo máximo especificado $\sigma_{\text{máx}}$ en una columna con relación efectiva de esbeltez, L_e/r, para un valor dado de la relación ec/r^2, donde e es la excentricidad de la carga aplicada. Note que como P/A aparece en ambos miembros, es necesario recurrir a un método de prueba y error para resolver la ecuación trascendental y obtener el valor de P/A correspondiente a una columna y condiciones de carga dadas.

La ecuación (10.36) se utilizó para dibujar las curvas de la figura 10.24*a* y *b* para una columna de acero, suponiendo que los valores de E y σ_Y son los mostrados en la figura. Estas curvas permiten calcular la carga por unidad de área P/A, que hace fluir a la columna para valores dados de las relaciones L_e/r y ec/r^2.



a)

b)

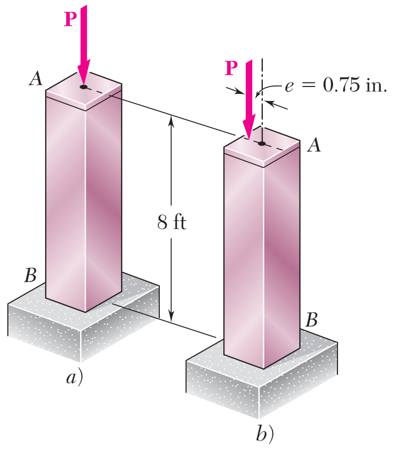
Figura 10.24 Carga por unidad de área *P*/*A* que produce fluencia.

Note que para pequeños valores de L_e/r, la secante es casi 1 en la ecuación (10.36) y P/A puede suponerse igual a

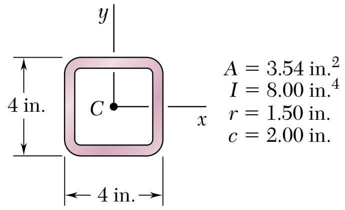
$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}} \tag{10.37}$$

un valor que pudo obtenerse despreciando el efecto de la deflexión lateral de la columna y usando el método de la sección 4.12. Por otra parte, en la figura 10.24 se observa que para valores grandes de L_e/r, las curvas correspondientes a los diferentes valores de ec/r^2 se acercan mucho a la curva de Euler definida por la ecuación (10.13′) y así, el efecto de la excentricidad de la carga en el valor de P/A es despreciable. La fórmula de la secante es útil, sobre todo, para valores intermedios de L_e/r. Sin embargo, para usarla con eficiencia, debe conocerse el valor e de la excentricidad de la carga y esta cantidad, desafortunadamente, rara vez se conoce con algún grado de precisión.

PROBLEMA MODELO 10.2



La columna uniforme *AB* consta de una sección de 8 ft de tubo estructural cuya sección se muestra. *a*) Usando la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2, halle la carga céntrica admisible para la columna y el correspondiente esfuerzo normal. *b*) Si la carga permisible, hallada en la parte *a*, se aplica como se muestra en un punto a 0.75 in. del eje geométrico de la columna, determine la deflexión horizontal del tope de la columna y el esfuerzo normal máximo en la columna. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.



SOLUCIÓN

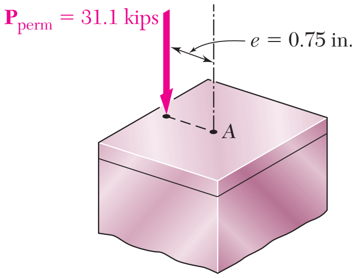
Longitud efectiva. Como la columna tiene un extremo fijo y uno libre, su longitud efectiva es:

$$L_e = 2(8 \text{ ft}) = 16 \text{ ft} = 192 \text{ in.}$$

Carga crítica. Usando la fórmula de Euler, se escribe

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^6 \text{ psi})(8.00 \text{ in.}^4)}{(192 \text{ in.})^2} \qquad P_{\text{cr}} = 62.1 \text{ kips}$$

***a*) Carga admisible y esfuerzo.** Para un factor de seguridad de 2, se tiene



$$P_{\text{perm}} = \frac{P_{\text{cr}}}{F.S.} = \frac{62.1 \text{ kips}}{2} \qquad P_{\text{perm}} = 31.1 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

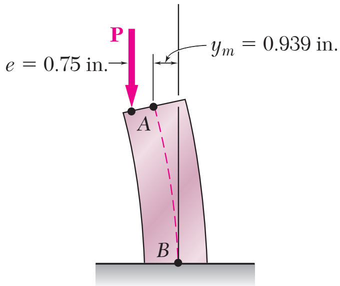
y

$$\sigma = \frac{P_{\text{perm}}}{A} = \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in.}^2} \qquad \sigma = 8.79 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b*) Carga excéntrica.** Observe que la columna *AB* y su carga son idénticas a la mitad superior de la columna de la figura 10.19 que se utilizó en la deducción de las fórmulas de la secante; se concluye que las fórmulas de la sección 10.5 se aplican directamente al presente caso. Recordando que $P_{\text{perm}}/P_{\text{cr}} = \frac{1}{2}$ y usando la ecuación (10.31), se calcula la deflexión horizontal del punto *A*:

$$y_m = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}}\right) - 1\right] = (0.75 \text{ in.})\left[\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) - 1\right]$$

$$= (0.75 \text{ in.})(2.252 - 1) \qquad y_m = 0.939 \text{ in.} \blacktriangleleft$$



El máximo esfuerzo normal se obtiene de la ecuación (10.35):

$$\sigma_m = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}}\right)\right]$$

$$= \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in.}^2}\left[1 + \frac{(0.75 \text{ in.})(2 \text{ in.})}{(1.50 \text{ in.})^2}\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= (8.79 \text{ ksi})[1 + 0.667(2.252)] \qquad \sigma_m = 22.0 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

10.29 La línea de acción de una carga axial de 75 kip es paralela al eje geométrico de la columna AB e interseca el eje x en $x = 0.6$ in. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la deflexión horizontal del punto medio C de la columna, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

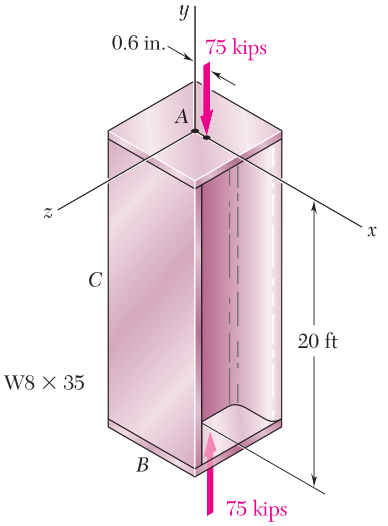


Figura P10.29

10.30 Se aplica una carga axial **P** con magnitud de 560 kN en un punto sobre el eje x, dicho punto se encuentra a una distancia $e = 6$ mm del eje geométrico de la columna BC fabricada con acero laminado W200 × 46.1. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la deflexión horizontal del extremo C, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

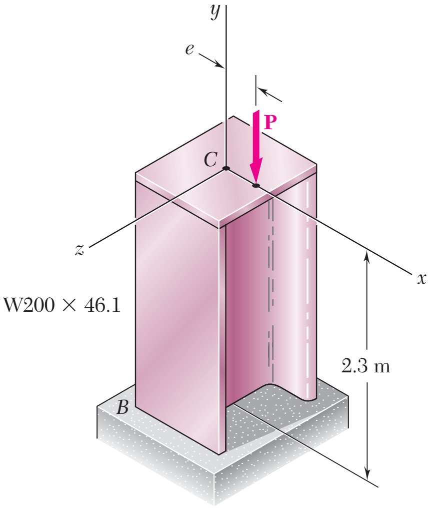


Figura P10.30

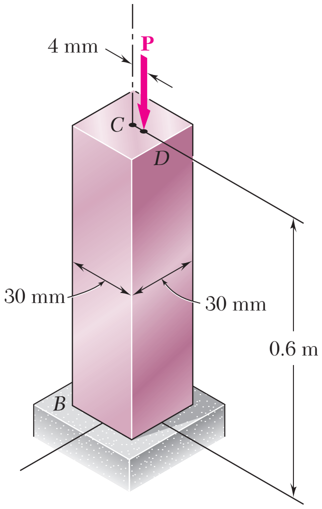


Figura *P10.31*

10.31 Se aplica una carga axial $\mathbf{P} = 15$ kN sobre el punto D que está a 4 mm del eje geométrico de la barra cuadrada de aluminio BC. Si $E = 70$ GPa, determine *a*) la deflexión horizontal del extremo C, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

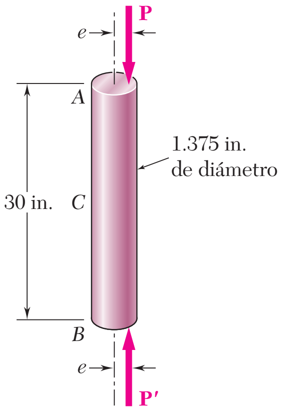


Figura P10.32

10.32 Se aplica una carga axial **P** a la varilla de acero AB con un diámetro de 1.375 in. que se muestra en la figura. Para $P = 21$ kips se observa que la deflexión horizontal del punto medio C es 0.03 in. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla.

10.33 Se aplica una carga axial **P** a la barra cuadrada de aluminio *BC* con 32 mm de lado, como se indica en la figura. Cuando $P = 24$ kN, la deflexión horizontal en el extremo *C* es de 4 mm. Con $E = 70$ GPa, determine *a*) la excentricidad *e* de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la barra.

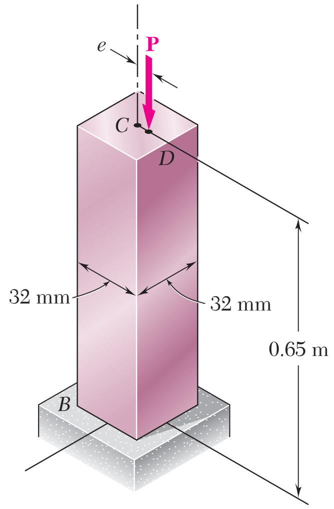


Figura P10.33

10.34 Se aplica la carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje *x* a una distancia *e* del eje geométrico de la columna *BC* de acero laminado. Cuando $P = 350$ kN, la deflexión horizontal de la parte superior de la columna es de 5 mm. Con $E = 200$ GPa, determine *a*) la excentricidad *e* de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

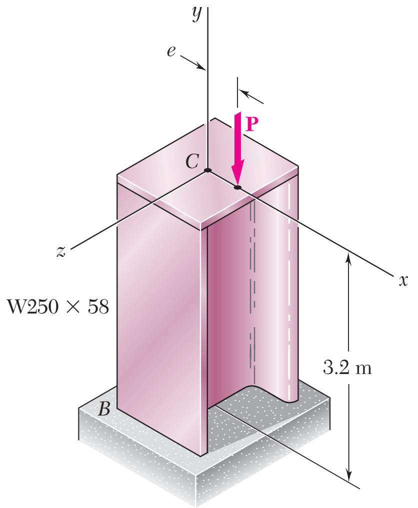


Figura *P10.34*

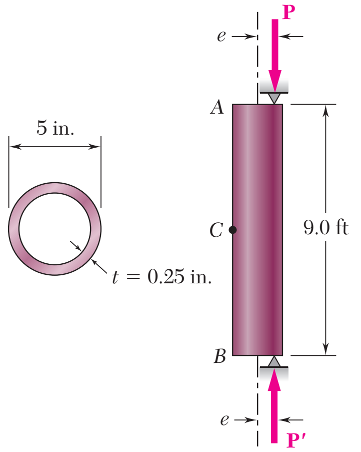


Figura P10.35

10.35 Un tubo de latón que tiene la sección transversal que se ilustra en la figura recibe una carga axial **P** que se aplica a 0.15 in. de su eje geométrico. Con $E = 17 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal en el punto medio *C* es de 0.20 in., *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.36 Retome el problema 10.35, y ahora suponga que la carga axial **P** se aplica a 0.3 in. del eje geométrico de la columna.

10.37 Se aplica una carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje x a una distancia $e = 0.5$ in. del eje geométrico de la columna BC de acero laminado con perfil W10 × 39. Considerando $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal de la parte superior de la columna es de 0.6 in., *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

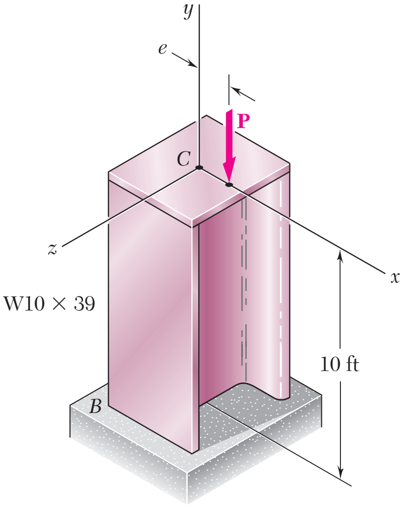


Figura *P10.37*

10.38 La línea de acción de una carga axial **P** es paralela al eje geométrico de la columna AB e interseca al eje x en $x = 0.8$ in. Con $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal del punto medio C de la columna es de 0.5 in., *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

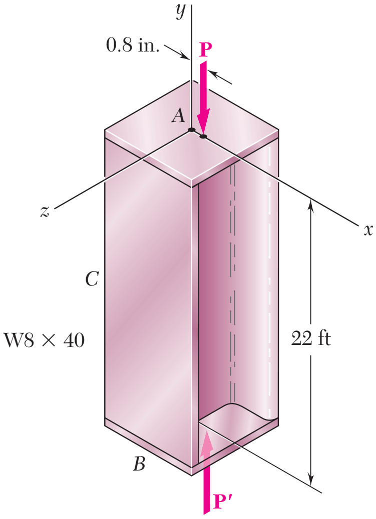


Figura *P10.38*

10.39 Se aplica una carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje x a una distancia $e = 12$ mm del eje geométrico de la columna BC de acero laminado con perfil W310 × 60. Suponga que $L = 3.5$ m y con $E = 200$ GPa, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal en el extremo C es de 15 mm, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

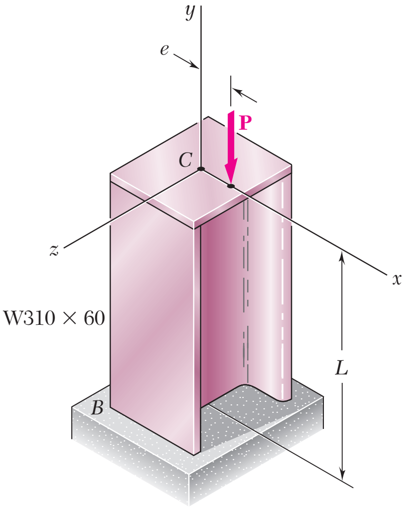


Figura P10.39

10.40 Retome el problema 10.39, y ahora suponga que el valor de L es 4.5 m.

10.41 La barra de acero AB tiene una sección transversal cuadrada de 10×10 mm y la sostienen anclajes fijos con la misma separación entre sí y ubicados a una distancia $e = 0.9$ mm del eje geométrico de la barra. Si se sabe que a la temperatura T_0 los anclajes están en contacto con la barra y que la fuerza en ésta es de cero, determine el incremento de temperatura para el cual la barra entrará en contacto con el punto C si $d = 0.3$ mm. Utilice $E = 200$ GPa y un coeficiente de expansión térmica $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°\text{C}$.

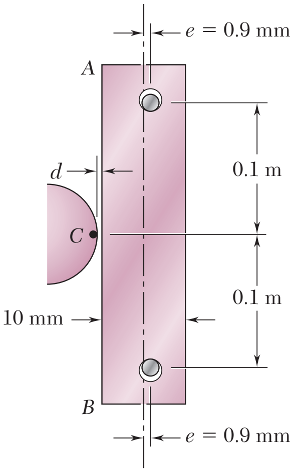


Figura P10.41

10.42 Para la barra del problema 10.41 determine la distancia d que se requiere para que la barra entre en contacto con el punto C cuando la temperatura se incrementa en 60°C.

10.43 Un tubo que tiene la sección transversal mostrada en la figura, se utiliza como una columna de 10 ft. Para el grado de acero usado $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se requiere un factor de seguridad de 2.8 respecto de la deformación permanente, calcule la carga **P** permisible cuando la excentricidad e es *a*) 0.6 in., *b*) 0.3 in. (*Sugerencia:* Como el factor de seguridad debe aplicarse a la carga **P**, no al esfuerzo, utilice la figura 10.24 para determinar P_Y.)

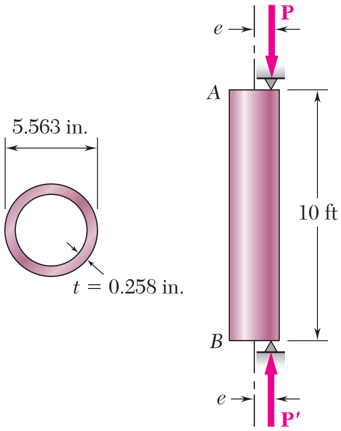


Figura P10.43

10.44 Retome el problema 10.43, y ahora suponga que la longitud de la columna se incrementa a 14 ft.

10.45 Se aplica una carga axial **P** a la columna BC de acero laminado con perfil W250 × 44.8 la cual está libre en su parte superior C y fija en su base B. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 12$ mm, y que para el grado de acero usado $\sigma_Y = 250$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine *a*) la magnitud P de la carga permisible si se necesita un factor de seguridad de 2.4 respecto de la deformación permanente, *b*) la relación de la carga encontrada en el inciso *a*) con la magnitud de la carga céntrica permisible para la columna. (Vea la sugerencia del problema 10.43.)

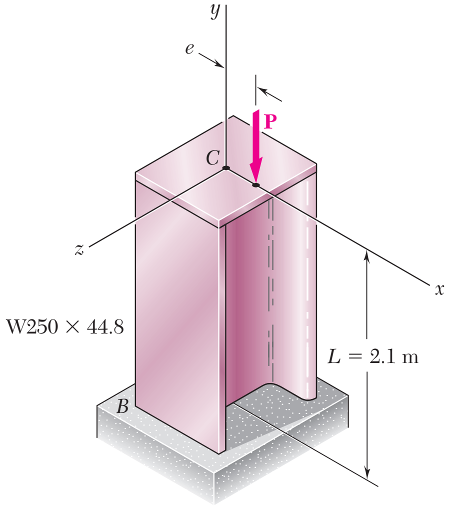


Figura P10.45

10.46 Retome el problema 10.45, y ahora suponga que la longitud de la columna se reduce a 1.6 m.

10.47 Se aplica una carga axial **P** de 100 kN a una columna *BC* de acero laminado con perfil W150 × 18 con su extremo superior *C* libre y su base *B* fija. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 6$ mm, determine la longitud *L* máxima permisible si el esfuerzo admisible en la columna es de 80 MPa. Utilice $E = 200$ GPa.

10.48 Se aplica una carga axial **P** de 55 kip a una columna *BC* de acero laminado con perfil W8 × 24 libre en su extremo superior *C* y fija en su base *B*. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 0.25$ in., determine la longitud *L* máxima permisible si el esfuerzo permitido en la columna es de 14 ksi. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

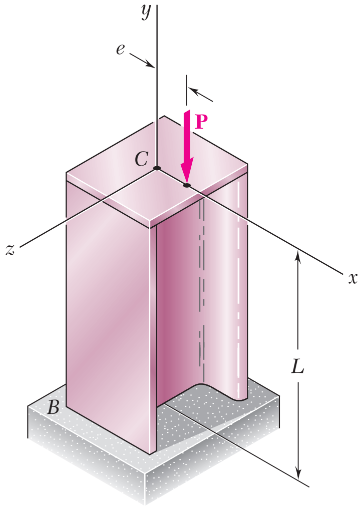


Figura P10.47 y P10.48

10.49 Se aplican cargas axiales de magnitud $P = 135$ kip paralelas al eje geométrico de una columna *AB* de acero laminado con perfil W10 × 54 y que intersecan al eje *x* a una distancia *e* de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 12$ ksi y que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la máxima longitud permisible *L* cuando *a*) $e = 0.25$ in., *b*) $e = 0.5$ in.

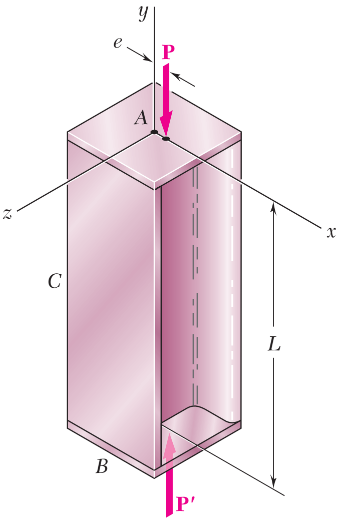


Figura *P10.49* y P10.50

10.50 Se aplican cargas axiales de magnitud $P = 580$ kN paralelas al eje geométrico de una columna *AB* de acero laminado con perfil W250 × 80 y que intersecan al eje *x* a una distancia *e* de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_{\text{perm}} = 75$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine la máxima longitud permisible *L* cuando *a*) $e = 5$ mm, *b*) $e = 10$ mm.

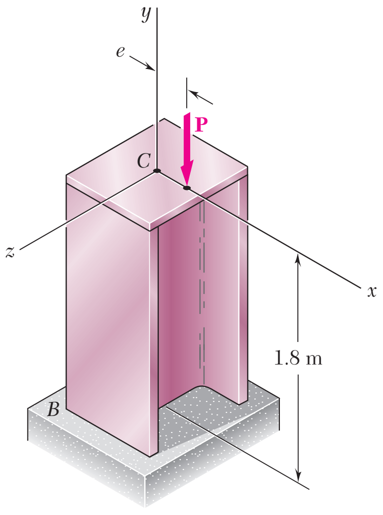


Figura P10.51

10.51 Se aplica una carga axial de magnitud $P = 220$ kN en un punto ubicado sobre el eje *x* a una distancia $e = 6$ mm del eje geométrico de la columna *BC* de patín ancho. Si se sabe que $E = 200$ GPa, elija el perfil W200 más ligero que puede usarse si $\sigma_{\text{perm}} = 120$ MPa.

10.52 Retome el problema 10.51, y ahora suponga que la magnitud de la carga axial es $P = 345$ kN.

10.53 Se aplica una carga axial de 12 kip con una excentricidad $e = 0.375$ in. a la barra circular de acero *BC* que tiene libre su extremo *C* y está fija en su base *B*. Si se sabe que las barras del lote disponible para usarse tienen diámetros en incrementos de $\frac{1}{8}$ in. desde 1.5 in. hasta 3.0 in., determine la barra más ligera que podría emplearse si $\sigma_{\text{perm}} = 15$ ksi. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

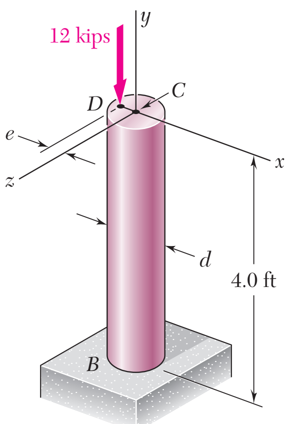


Figura P10.53

10.54 Retome el problema 10.53, y ahora suponga que la carga axial de 12 kip se aplicará a la barra con una excentricidad $e = \frac{1}{2}\,d$.

10.55 Se aplican cargas de magnitud $P = 175$ kN paralelas al eje geométrico de una columna AB de acero laminado con perfil W250 × 44.8 y que intersecan al eje x a una distancia $e = 12$ mm de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine el factor de seguridad que debe aplicarse respecto de la cedencia. (*Sugerencia*: Como el factor de seguridad debe aplicarse a la carga **P**, no al esfuerzo, utilice la figura 10.24 para determinar P_Y.)

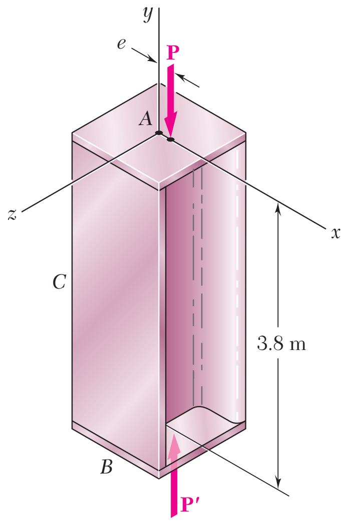


Figura *P10.55*

10.56 Retome el problema 10.55, y ahora suponga que $e = 16$ mm y $P = 155$ kN.

10.6 DISEÑO DE COLUMNAS BAJO UNA CARGA CÉNTRICA

En las secciones anteriores, la carga crítica de una columna se determinó mediante la fórmula de Euler, y se investigaron las deformaciones y los esfuerzos en las columnas cargadas excéntricamente usando la fórmula de la secante. En cada caso, se supuso que todos los esfuerzos permanecían debajo del límite de proporcionalidad y que la columna era inicialmente un prisma recto homogéneo. Las columnas reales no se ajustan a esa idealización, por lo que, en la práctica, el diseño de columnas se basa en ecuaciones empíricas que reflejan los resultados de numerosas pruebas de laboratorio.

Durante el último siglo, muchas columnas de acero han sido probadas aplicándoles una carga axial céntrica e incrementando la carga hasta producir la falla. Los resultados de tales pruebas se presentan en la figura 10.25 donde, para cada una de muchas pruebas, se ha marcado un punto con la ordenada igual al esfuerzo normal σ_{cr} de falla y su abscisa igual al valor correspondiente de la relación efectiva de esbeltez L_e/r. Aunque hay considerable dispersión en los resultados, se observan regiones correspondientes a tres tipos de falla. Para columnas largas, donde L_e/r es grande, la falla se puede predecir con exactitud mediante la fórmula de Euler, y el valor de σ_{cr} depende del módulo de elasticidad E del acero utilizado, pero no del límite de cedencia σ_Y. Para columnas muy cortas y bloques a compresión, la falla ocurre

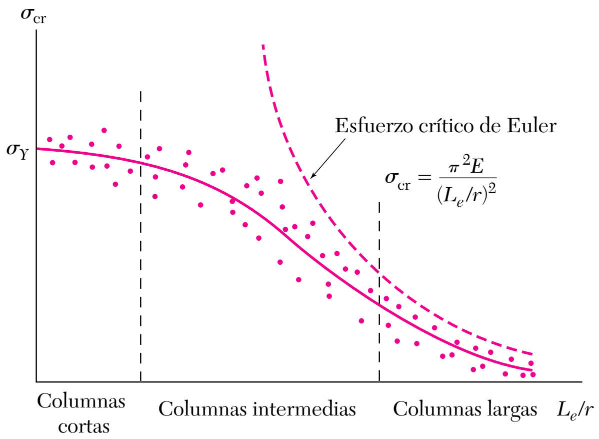


Figura 10.25

esencialmente como un resultado de la cedencia, y tenemos $\sigma_{cr} \approx \sigma_Y$. Las columnas de longitud intermedia comprenden los casos en donde la falla depende de σ_Y y E. En este rango, la falla de la columna es un fenómeno complejo y se han usado datos de laboratorio para guiar el desarrollo de ecuaciones de diseño y especificaciones.

Las ecuaciones empíricas que expresan esfuerzos permisibles o esfuerzos críticos en función de la relación efectiva de esbeltez se introdujeron hace más de un siglo y han experimentado un proceso continuo de refinamiento y mejora. Algunas ecuaciones empíricas típicas, utilizadas para aproximar datos de laboratorio, se muestran en la figura 10.26. Como una sola ecuación no es adecuada para todos los valores de L_e/r, se han desarrollado ecuaciones diferentes, cada una con un rango de aplicabilidad, para los diversos materiales. En cada caso debe verificarse que la ecuación que va a usarse es aplicable para el valor de L_e/r de la columna seleccionada. Además, debe determinarse si la ecuación proporciona el valor del esfuerzo crítico para la columna, en cuyo caso este valor debe dividirse entre el factor de seguridad apropiado, o si da directamente el esfuerzo permisible.

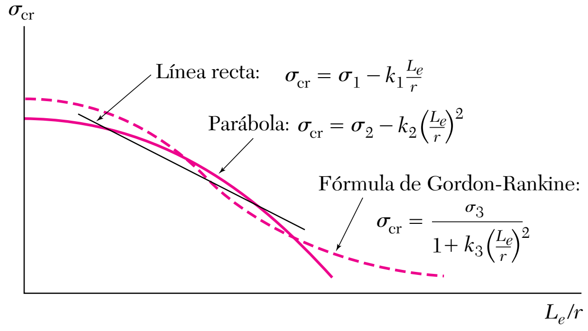


Figura 10.26

A continuación se estudiarán fórmulas específicas para diseñar columnas de acero, aluminio y madera sometidas a cargas céntricas. La figura 10.27 ilustra algunos ejemplos de columnas que seguramente se diseñaron con el uso de dichas fórmulas. Primero se presenta el diseño para los tres distintos materiales con el uso del *diseño del esfuerzo permisible*. Después se presentan las fórmulas necesarias para el diseño de columnas de acero, basadas en el *factor de diseño de carga y resistencia*.†

a) *b*)

Figura 10.27 El tanque de agua *a*) se apoya en columnas de acero, y el edificio en construcción *b*) se estructura con columnas de madera.

Acero estructural. Diseño del esfuerzo permitido. Las ecuaciones más usadas para el diseño de columnas de acero bajo carga céntrica se encuentran en las especificaciones para las construcciones con acero estructural del American Institute of Steel Construction.‡ Como se verá, una expresión exponencial se usa para predecir σ_{perm} en las columnas de longitudes cortas e intermedias, y una relación de tipo Euler se utiliza para columnas largas. Estas relaciones se desarrollan en dos pasos:

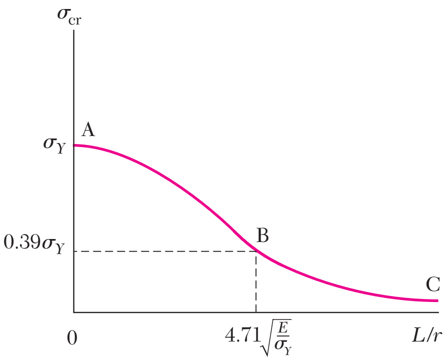


Figura 10.28

1. Primero se obtiene una curva que representa la variación de σ_{cr} frente a L/r (figura 10.28). Es importante observar que esta curva no incorpora ningún factor de seguridad.§ La porción AB de esta curva se define mediante la ecuación

$$\sigma_{\text{cr}} = \left[0.658^{(\sigma_Y/\sigma_e)}\right]\sigma_Y \tag{10.38}$$

donde

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.39}$$

---

† En fórmulas de diseño específicas, la letra L siempre se refiere a la longitud efectiva de la columna

‡ *Manual of Steel Construction*, 13a. ed., American of Steel Construction, Chicago, 2005.

§ En la especificación para construcciones con acero estructural, el símbolo F se utiliza para los esfuerzos.

La porción *BC* se define mediante la ecuación

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e \tag{10.40}$$

Se observa que cuando $L/r = 0$, $\sigma_{cr} = \sigma_Y$ en la ecuación (10.38). En el punto *B* la ecuación (10.38) se une a la ecuación (10.40). El valor de la esbeltez L/r en la unión entre las dos ecuaciones es

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \tag{10.41}$$

Si L/r es menor que el valor en la ecuación (10.41), σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.38), y si L/r es mayor, σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.40). Con el valor de esbeltez L/r especificado en la ecuación (10.41), el esfuerzo $\sigma_e = 0.44\ \sigma_Y$. Si se utiliza la ecuación (10.40), $\sigma_{cr} = 0.877\ (0.44\ \sigma_Y) = 0.39\ \sigma_Y$.

2. Se debe introducir un factor de seguridad para obtener las ecuaciones finales de diseño de la AISC. El factor de seguridad indicado por la especificación es 1.67. Por lo tanto

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} \tag{10.42}$$

Las fórmulas obtenidas pueden emplearse con unidades SI o con unidades de uso común en Estados Unidos.

Observe que, mediante las ecuaciones (10.38), (10.40), (10.41) y (10.42), pueden calcularse los esfuerzos axiales permisibles para un grado dado de acero y cualquier valor dado permisible de L/r. El procedimiento consiste en calcular primero L/r en la intersección entre las dos ecuaciones a partir de la ecuación (10.41). Para valores dados de L/r menores que el de la ecuación (10.41), se usan las ecuaciones (10.38) y (10.42) para calcular σ_{perm}, y para valores mayores que el de la ecuación (10.41), se utilizan las ecuaciones (10.40) y (10.42) para calcular σ_{perm}. En la figura 10.29 se proporciona una ilustración general de cómo varía σ_e en función de L/r para diferentes grados de acero estructural.

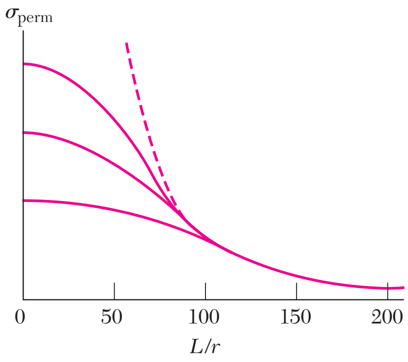


Figura 10.29

EJEMPLO 10.02

Determine la mayor longitud L no apoyada para la cual un elemento AB a compresión S100 × 11.5 puede soportar en forma segura la carga céntrica mostrada (figura 10.30). Considere $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

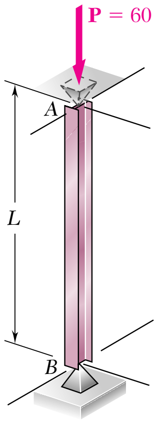


Figura 10.30

Del apéndice C se encuentra que para S100 × 11.5:

$$A = 1\,460 \text{ mm}^2 \qquad r_x = 41.6 \text{ mm} \qquad r_y = 14.8 \text{ mm}$$

Si la carga de 60 kN ha de ser soportada en forma segura, debe tenerse

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{1\,460 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 41.1 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Se debe calcular el esfuerzo crítico σ_{cr}. Si se supone que L/r es mayor que la esbeltez especificada por la ecuación (10.41), se utiliza la ecuación (10.40) con la ecuación (10.39) y se escribe

$$\sigma_{\text{cr}} = 0.877\,\sigma_e = 0.877\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$
$$= 0.877\frac{\pi^2(200 \times 10^9 \text{ Pa})}{(L/r)^2} = \frac{1.731 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Si se utiliza la expresión de la ecuación (10.42) para σ_{perm}, es posible escribir

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{1.67} = \frac{1.037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Al igualar esta expresión con el valor requerido de σ_{perm}, se tiene

$$\frac{1.037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2} = 41.1 \times 10^6 \text{ Pa} \qquad L/r = 158.8$$

La relación de esbeltez a partir de la ecuación (10.41) es

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{200 \times 10^9}{250 \times 10^6}} = 133.2$$

El supuesto de que L/r es mayor que esta relación de esbeltez era correcto. Así, al elegir el menor de los dos radios de giro se tiene

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14.8 \times 10^{-3} \text{ m}} = 158.8 \qquad L = 2.35 \text{ m}$$

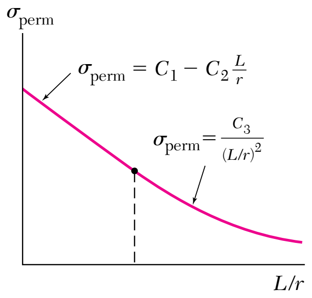


Figura 10.31

Aluminio. Hay muchas aleaciones de aluminio disponibles para usarse en la construcción estructural y de máquinas. Para la mayoría de columnas las especificaciones de la Aluminum Association† proporcionan tres ecuaciones para el esfuerzo permisible en las columnas bajo carga céntrica. En la figura 10.31 se muestra la variación de σ_{perm} con L/r definida por estas ecuaciones. Para las columnas cortas se usa una relación lineal entre σ_{perm} y L/r, y para columnas largas se utiliza una ecuación del tipo de Euler. Abajo se dan las ecuaciones específicas para el uso en edificios y estructuras similares en unidades SI y americanas para las aleaciones comúnmente utilizadas.

Aleación 6061-T6:

$$L/r < 66: \qquad \sigma_{\text{perm}} = [20.2 - 0.126(L/r)] \text{ ksi} \tag{10.43}$$
$$= [139 - 0.868(L/r)] \text{ MPa} \tag{10.43$'$}$$
$$L/r \geq 66: \qquad \sigma_{\text{perm}} = \frac{51\,000 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{351 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2} \tag{10.44}$$

Aleación 2014-T6:

$$L/r < 55: \qquad \sigma_{\text{perm}} = [30.7 - 0.23(L/r)] \text{ ksi} \tag{10.45}$$
$$= [212 - 1.585(L/r)] \text{ MPa} \tag{10.45$'$}$$
$$L/r \geq 55: \qquad \sigma_{\text{perm}} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2} \tag{10.46}$$

---

† *Specifications and Guidelines for Aluminum Structures*, Aluminum Association, Inc., Washington D.C., 2005.

Madera. Para el diseño de columnas de madera, las especificaciones de la American Forest and Paper Association† proporcionan una sola ecuación para obtener el esfuerzo permisible en columnas cortas, intermedias y largas bajo carga céntrica. Para una columna con sección transversal *rectangular* de lados b y d, donde $d < b$, la variación de σ_{perm} con L/d se muestra en la figura 10.32.

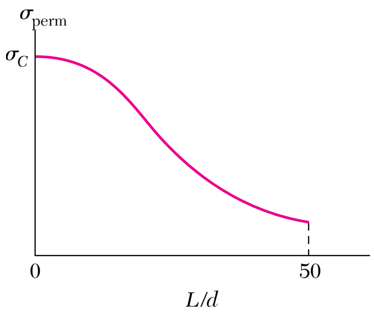


Figura 10.32

Para columnas sólidas fabricadas con una sola pieza de madera o con láminas aglutinadas, el esfuerzo permisible σ_{perm} es

$$\sigma_{\text{perm}} = \sigma_C C_P \tag{10.47}$$

en donde σ_C es el esfuerzo ajustado admisible para la compresión paralela a la fibra.‡ Los ajustes realizados para obtener σ_C se incluyen en las especificaciones para dar cuenta de las diferentes variaciones, tales como la duración de la carga. El factor de estabilidad de la columna C_P interviene en la longitud de ésta y queda definido por la siguiente ecuación:

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}} \tag{10.48}$$

El parámetro c tiene que ver con el tipo de columna, y es igual a 0.8 para postes de madera y 0.90 para columnas de láminas de madera aglutinada. El valor de σ_{CE} se define por

$$\sigma_{CE} = \frac{0.822E}{(L/d)^2} \tag{10.49}$$

Donde E es un módulo de elasticidad ajustado para el pandeo de columnas. Las columnas en las que L/d excede 50 no las permite el *National Design for Wood Construction*.

---

† *National Design Specification for Wood Construction*, American Forest and Paper Association, American Wood Council, Washington, D.C., 2005.

‡ En el *National Design Specification for Wood Construction*, el símbolo F se utiliza para denotar los esfuerzos.

EJEMPLO 10.03

Si la longitud efectiva de la columna *AB* (figura 10.33) es 14 ft y debe soportar en forma segura una carga de 32 kips, diséñela usando una sección cuadrada laminada pegada. El módulo de elasticidad ajustado de la madera es $E = 800 \times 10^3$ psi y el esfuerzo permisible ajustado y para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,060$ psi.

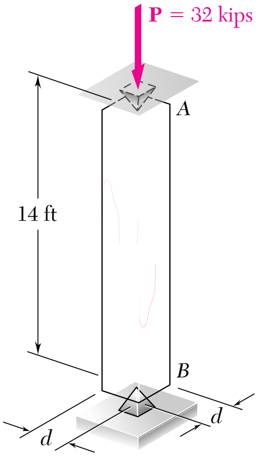


Figura 10.33

Se observa que $c = 0.90$ para columnas de madera laminar aglutinada. Se debe calcular el valor de σ_{CE}. Con la ecuación (10.49) queda

$$\sigma_{CE} = \frac{0.822E}{(L/d)^2} = \frac{0.822(800 \times 10^3 \text{ psi})}{(168 \text{ in.}/d)^2} = 23.299d^2 \text{ psi}$$

Luego se emplea la ecuación (10.48) para expresar el factor de estabilidad de la columna en términos de d, con $(\sigma_{CE}/\sigma_C) = (23.299d^2/1.060 \times 10^3) = 21.98 \times 10^{-3}\, d^2$,

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}}$$

$$= \frac{1 + 21.98 \times 10^{-3}\, d^2}{2(0.90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 21.98 \times 10^{-3}\, d^2}{2(0.90)}\right]^2 - \frac{21.98 \times 10^{-3}\, d^2}{0.90}}$$

Como la columna debe cargar 32 kips, lo que es igual a $\sigma_C d^2$, se usa la ecuación (10.47) y resulta

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{32 \text{ kips}}{d^2} = \sigma_C C_P = 1.060C_P$$

Al resolver esta ecuación para C_P y sustituir el valor que se obtiene en la ecuación previa, queda

$$\frac{30.19}{d^2} = \frac{1 + 21.98 \times 10^{-3}\, d^2}{2(0.90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 21.98 \times 10^{-3}\, d^2}{2(0.90)}\right]^2 - \frac{21.98 \times 10^{-3}\, d^2}{0.90}}$$

Resolviendo para d por ensayo y error queda $d = 6.45$ in.

***Acero estructural: Factor de diseño de carga y resistencia.** Como se vio en la sección 1.13, un método alternativo de diseño se basa en la determinación de la carga en la que la estructura deja de ser útil. El diseño se basa en la desigualdad dada por la ecuación (1.26):

$$\gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_U \tag{1.26}$$

El enfoque usado para el diseño de columnas de acero sometidas a una carga céntrica, tal como se presenta en el documento *Load and Resistance Factor Design* con la especificación AISC es similar al que se describe en Allowable Stress Design. Si se utiliza el esfuerzo crítico σ_{cr}, la carga última P_U se define como

$$P_U = \sigma_{\text{cr}} A \tag{10.50}$$

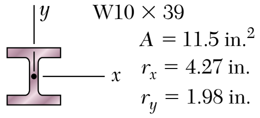
La determinación del esfuerzo crítico σ_{cr} sigue el mismo enfoque usado para el diseño del esfuerzo permisible. Esto requiere utilizar la ecuación (10.41) para determinar la esbeltez en la unión entre las ecuaciones (10.38) y (10.40). Si la esbeltez L/r especificada es menor que el valor de la ecuación (10.41), se utiliza la ecuación (1.38), y si es mayor, se emplea la ecuación (10.40). las ecuaciones se pueden utilizar con unidades SI o con las de uso común en Estados Unidos.

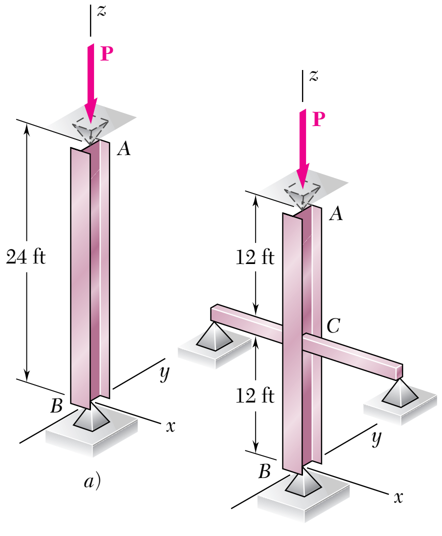
Se observa que mediante la ecuación (10.50) con la ecuación (1.26), es posible determinar si el diseño es aceptable. El procedimiento consiste, primero, en determinar la relación de esbeltez a partir de la ecuación (10.41). Para valores de L/r menores que esta esbeltez, la *carga última* P_U para usar en la ecuación (1.26) se obtiene de la ecuación (10.50), usando σ_{cr} determinado a partir de la ecuación (10.38). Para valores de L/r mayores que esta esbeltez, la *carga última* P_U se obtiene de la ecuación (10.50) con la ecuación (10.40). Las especificaciones de los factores de diseño para carga y resistencia del American Institute of Steel Construction especifican que el *factor de resistencia* ϕ es 0.90.

Nota: Las fórmulas de diseño que se presentaron en esta sección se pensaron para proporcionar ejemplos de diferentes enfoques de diseño. Estas fórmulas no ofrecen todos los requerimientos que se necesitan para muchos diseños, y el estudiante debe remitirse a las especificaciones apropiadas de diseño antes de intentar hacer diseños reales.

PROBLEMA MODELO 10.3

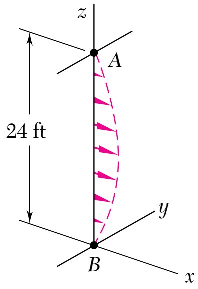
La columna *AB* es un perfil W10 × 39 de acero laminado con $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Determine la carga céntrica permisible **P**: *a*) si la longitud efectiva de la columna en cualquier dirección es 24 ft, *b*) si se proporciona apoyo lateral para evitar el movimiento del punto medio *C* en el plano medio *xz*. (Suponga que el movimiento de *C* en el plano *yz* no se afecta por el apoyo lateral.)

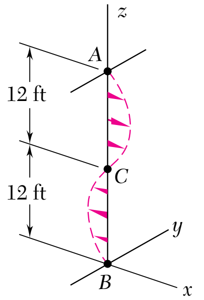




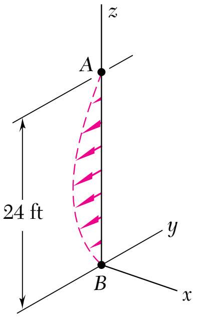
a)

b)





Pandeo en el plano *xz*



Pandeo en el plano *yz*

SOLUCIÓN

Se calcula primero el valor de C_c correspondiente al límite de fluencia $\sigma_Y = 36$ ksi.

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{29 \times 10^6}{36 \times 10^3}} = 133.7$$

***a*) Longitud efectiva = 24 ft.** Como $r_y < r_x$, el pandeo tendrá lugar en el plano *xz*. Para $L = 24$ ft y $r = r_y = 1.98$ in., la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r_y} = \frac{(24 \times 12)\text{ in.}}{1.98\text{ in.}} = \frac{288\text{ in.}}{1.98\text{ in.}} = 145.5$$

Como $L/r > 133.7$, se utiliza la ecuación (10.39) en la ecuación (10.40) para determinar σ_{cr}

$$\sigma_{\text{cr}} = 0.877\,\sigma_e = 0.877\,\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = 0.877\,\frac{\pi^2(29 \times 10^3\text{ ksi})}{(145.5)^2} = 11.86\text{ ksi}$$

El esfuerzo permisible, calculado a partir de la ecuación (10.42) y P_{perm} es

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{1.67} = \frac{11.86\text{ ksi}}{1.67} = 7.10\text{ ksi}$$

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}}A = (7.10\text{ ksi})(11.5\text{ in}^2) = 81.7\text{ kips}$$ ◀

***b*) Refuerzo lateral en el punto medio *C*.** Como el apoyo lateral evita el movimiento de *C* en el plano *xz*, pero no en el plano *yz*, debe calcularse la relación de esbeltez correspondiente al pandeo en cada plano y determinarse cuál es la mayor.

Plano xz: Longitud efectiva = 12 ft = 144 in., $r = r_y = 1.98$ in.

$$L/r = (144\text{ in.})/(1.98\text{ in.}) = 72.7$$

Plano yz: Longitud efectiva = 24 ft = 288 in., $r = r_x = 4.27$ in.

$$L/r = (288\text{ in.})/(4.27\text{ in.}) = 67.4$$

Como la mayor relación de esbeltez corresponde a una carga permisible menor, se elige $L/r = 72.7$. Puesto que es menor que $L/r = 145.5$, se utilizan las ecuaciones (10.39) y (10.38) para determinar σ_{cr}

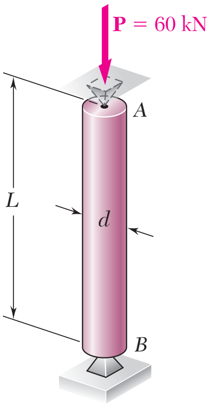
$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^3\text{ ksi})}{(72.7)^2} = 54.1\text{ ksi}$$

$$\sigma_{\text{cr}} = \left[0.658^{(\sigma_Y/\sigma_e)}\right]F_Y = \left[0.658^{(36\text{ ksi}/54.1\text{ ksi})}\right]36\text{ ksi} = 27.3\text{ ksi}$$

Ahora se calcula el esfuerzo permisible mediante la ecuación (10.42) y la carga permisible

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{1.67} = \frac{27.3\text{ ksi}}{1.67} = 16.32\text{ ksi}$$

$$P_{\text{perm}} = \sigma_{\text{perm}}\,A = (16.32\text{ ksi})(11.5\text{ in}^2) \qquad P_{\text{perm}} = 187.7\text{ ksi}$$ ◀



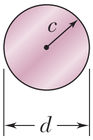
PROBLEMA MODELO 10.4

Usando la aleación de aluminio 2014-T6, determine la barra de menor diámetro que puede usarse para soportar la carga céntrica $P = 60$ kN si *a*) $L = 750$ mm, *b*) $L = 300$ mm.

SOLUCIÓN

Para la sección transversal de una barra circular, se tiene

$$I = \frac{\pi}{4}c^4 \qquad A = \pi c^2 \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$



***a*) Longitud de 750 mm.** Puesto que no se conoce el diámetro de la barra, debe suponerse un valor de L/r; se *supondrá* $L/r > 55$ y se usará la ecuación (10.46). Para la carga céntrica **P**, $\sigma = P/A$ y se escribe

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{perm}} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{372 \times 10^9 \text{ Pa}}{\left(\dfrac{0.750 \text{ m}}{c/2}\right)^2}$$

$$c^4 = 115.5 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \qquad c = 18.44 \text{ mm}$$

Para $c = 18.44$ mm la relación de esbeltez es:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750 \text{ mm}}{(18.44 \text{ mm})/2} = 81.3 > 55$$

La hipótesis es correcta y para $L = 750$ mm el diámetro requerido es

$$d = 2c = 2(18.44 \text{ mm}) \qquad d = 36.9 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*) Longitud de 300 mm.** De nuevo se *supone* $L/r > 55$. Usando la ecuación (10.46) y siguiendo el procedimiento de la parte *a*) se encuentra que, $c = 11.66$ mm y $L/r = 51.5$. Como $L/r < 55$ la suposición es incorrecta; debe suponerse ahora que $L/r < 55$ y utilizarse la ecuación (10.45′) para el diseño de esta barra.

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{perm}} = \left[212 - 1.585\left(\frac{L}{r}\right)\right] \text{MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \left[212 - 1.585\left(\frac{0.3 \text{ m}}{c/2}\right)\right] 10^6 \text{ Pa}$$

$$c = 12.00 \text{ mm}$$

Para $c = 12.00$ mm la relación de esbeltez es:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{300 \text{ mm}}{(12.00 \text{ mm})/2} = 50$$

La segunda hipótesis, que $L/r < 55$, es correcta. Para $L = 300$ mm, el diámetro requerido es

$$d = 2c = 2(12.00 \text{ mm}) \qquad d = 24.0 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

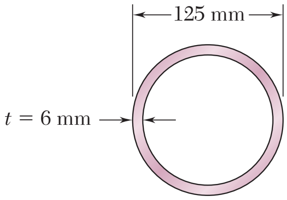


Figura P10.57

10.57 Una tubería de acero que tiene la sección transversal que se muestra en la figura, se usa como columna. Utilice las fórmulas para el diseño del esfuerzo permisible de AISC para encontrar la carga céntrica permisible si la longitud efectiva de la columna es *a*) 6 m, *b*) 4 m. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.58 Una columna con la sección transversal que se muestra en la figura tiene una longitud efectiva de 13.5 ft. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para calcular la máxima carga céntrica que puede aplicarse a la columna. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

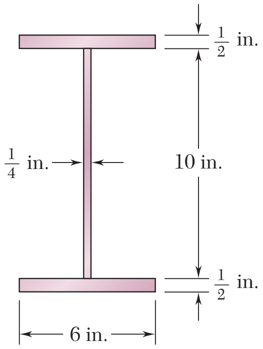


Figura P10.58

10.59 Con el uso del diseño del esfuerzo admisible, determine la carga céntrica permisible para una columna de 6 m de longitud efectiva que está hecha de los siguientes perfiles de acero laminado: *a*) W200 × 35.9, *b*) W200 × 86. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.60 Se usa un perfil de acero laminado W8 × 31 para formar una columna de 21 ft de longitud efectiva. Con el empleo del diseño del esfuerzo permisible, determine la carga céntrica permisible si la resistencia a la fluencia del tipo de acero utilizado es *a*) $\sigma_Y = 36$ ksi, *b*) $\sigma_Y = 50$ ksi. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.61 Una columna con una longitud efectiva de 3.5 m está hecha de madera con sección transversal de 114 × 140 mm. Si se sabe que para el grado de madera utilizada el esfuerzo ajustado permisible para la compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 7.6$ MPa y que el módulo ajustado $E = 2.8$ GPa, determine la carga céntrica máxima permisible para la columna.

10.62 Una columna de madera con sección transversal de 7.5 × 5.5 in. tiene una longitud efectiva de 18 ft. Si se sabe que para el tipo de madera usada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,200$ psi y que el módulo ajustado $E = 470 \times 10^3$ psi, determine la carga céntrica máxima permisible para la columna.

10.63 La barra AB está libre en su extremo A y fija en su base B. Determine la carga céntrica **P** permisible si la aleación de aluminio empleada es una *a*) 6061-T6, *b*) 2014-T6.

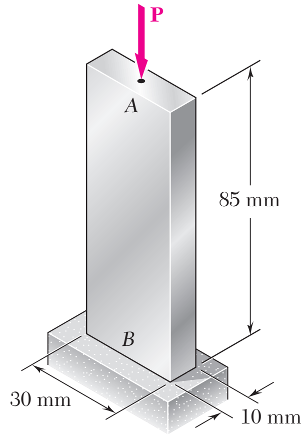


Figura P10.63

10.64 Un elemento a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura y una longitud efectiva de 5 ft. Si se sabe que la aleación de aluminio usada es 6061-T6, determine la carga céntrica permisible.

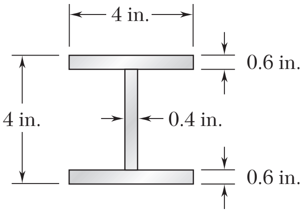


Figura P10.64

10.65 y *10.66* Un elemento a compresión de 9 m de longitud efectiva se obtiene al soldar dos placas de acero de 10 mm de grosor a un perfil de acero laminado W250 × 80, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para el elemento a compresión.

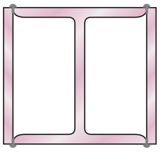


Figura P10.65

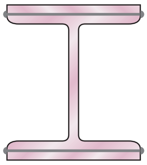


Figura *P10.66*

10.67 Al unir con pernos dos ángulos de acero de 127 × 76 × 12.7 mm se obtiene un elemento a compresión de 2.3 m de longitud efectiva como lo muestra la figura. Use el diseño de esfuerzo permisible y determine la carga céntrica permisible para la columna. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

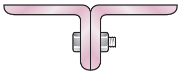


Figura *P10.67*

10.68 Una columna de 21 ft de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C10 × 20 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Utilice el diseño de esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para la columna. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

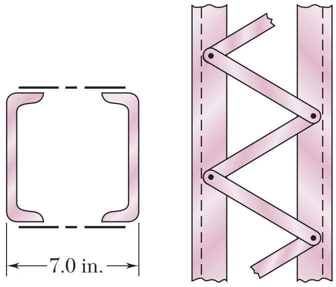


Figura P10.68

10.69 Una columna rectangular con longitud efectiva de 4.4 m está hecha con madera laminar aglomerada. Si se sabe que para el tipo de madera empleada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 8.3$ MPa y que el módulo ajustado $E = 4.6$ GPa, determine la máxima carga céntrica permisible para la columna.

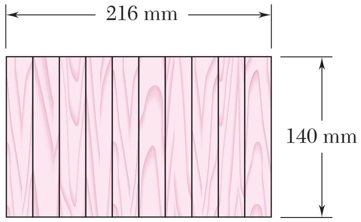


Figura P10.69

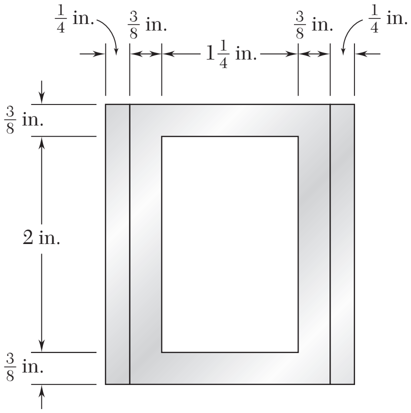


Figura P10.70

10.70 Un tubo estructural de aluminio se refuerza al remachar dos placas a su costado, como se observa en la figura, para usarlo como una columna de 5.6 ft de longitud efectiva. Si se sabe que todo el material es aluminio 2014-T6, determine la carga céntrica máxima permisible.

10.71 Se aplica una carga céntrica de 18 kips a una columna rectangular de madera con 22 ft de longitud efectiva. Si se usa una madera para la cual el esfuerzo permisible a compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,050$ psi y se sabe que el módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi, determine la sección transversal cuadrada más pequeña que pueda utilizarse. Emplee $b = 2d$.

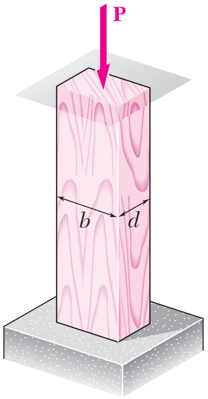


Figura P10.71

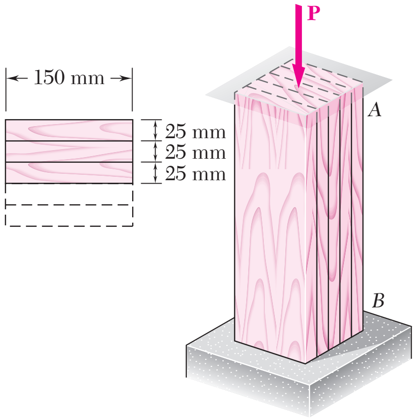


Figura *P10.72*

10.72 Se construye una columna de 2.1 m de longitud efectiva, pegando tablones de 25 × 150 mm de sección transversal. Si se sabe que el esfuerzo ajustado permisible a compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 7.7$ MPa y el módulo ajustado $E = 5.4$ GPa, determine el número de tablones que deben usarse para soportar la carga céntrica mostrada en la figura cuando *a*) $P = 52$ kN, *b*) $P = 108$ kN.

10.73 La columna laminar pegada que se muestra en la figura está libre en el extremo A y fija en su base B. Si se usa una madera con un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra de $\sigma_C = 9.2$ MPa y un módulo de elasticidad ajustado $E = 5.7$ GPa, determine la sección transversal mínima que puede soportar una carga céntrica de 62 kN.

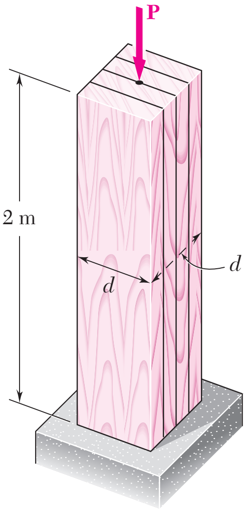


Figura P10.73

10.74 Una carga céntrica de 16 kip debe ser sostenida por una columna de aluminio, como se muestra en la figura. Si se utiliza la aleación de aluminio 6061-T6, determine la mínima dimensión b que puede utilizarse.

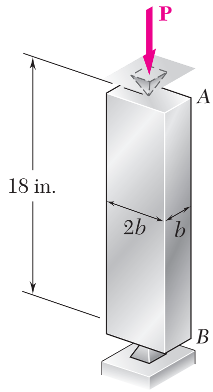


Figura P10.74

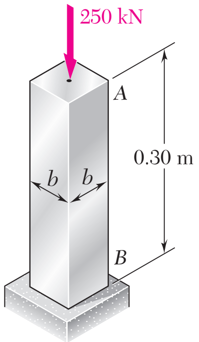


Figura P10.75

10.75 Se aplica una carga céntrica de 280 kN a la columna que se muestra en la figura, la cual está libre en su extremo A y fija en su base B. Si se usa aluminio 2014-T6, seleccione la sección transversal cuadrada más pequeña que puede emplearse.

10.76 Un tubo de aluminio de 90 mm de diámetro exterior debe sostener una carga céntrica de 120 kN. Si se sabe que los tubos del lote disponible están hechos de una aleación 2014-T6 y su espesor de pared aumenta en incrementos de 3 mm, desde 6 mm hasta 15 mm, determine el tubo más ligero que se puede emplear.

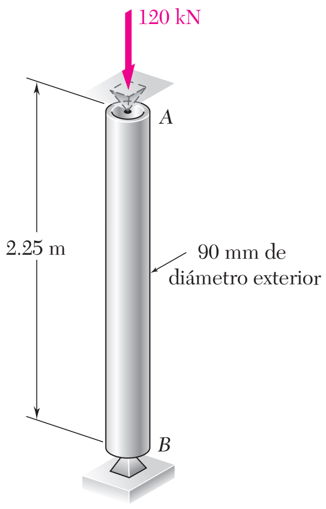


Figura *P10.76*

10.77 Una carga céntrica **P** debe ser sostenida por una barra de acero *AB*. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la mínima dimensión d de la sección transversal que puede utilizarse cuando *a*) $P = 24$ kips, *b*) $P = 36$ kips. Utilice $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

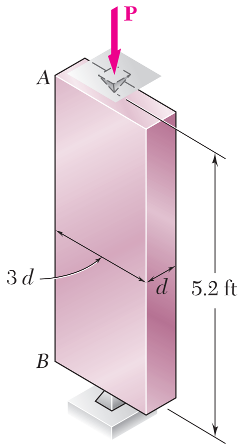


Figura *P10.77*

10.78 Una columna con longitud efectiva de 4.5 m debe sostener una carga céntrica de 900 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 250 mm que debe usarse.

10.79 Una columna con longitud efectiva de 22.5 ft debe sostener una carga céntrica de 288 kips. Utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 14 in. que debe usarse. Considere que $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.80 Una columna con longitud efectiva de 4.6 m debe sostener una carga céntrica de 525 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 200 mm que debe usarse.

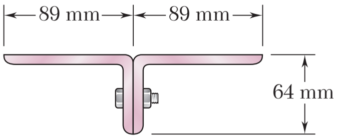


Figura P10.81

10.81 Se remachan dos ángulos de 89 × 64 mm como se muestra en la figura para usarse como una columna de 2.4 m de longitud efectiva para sostener una carga céntrica de 180 kN. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de 6.4 mm, 9.5 mm y 12.7 mm, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Emplee $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.82 Se remachan dos ángulos de 89 × 64 mm como se muestra en la figura para usarse como una columna de 2.4 m de longitud efectiva para sostener una carga céntrica de 325 kN. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de 6.4 mm, 9.5 mm y 12.7 mm, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Emplee $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

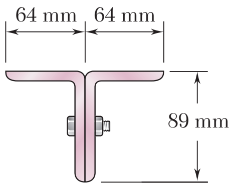


Figura P10.82

10.83 Un tubo estructural cuadrado que tiene la sección transversal que se muestra en la figura se utiliza como una columna de longitud efectiva de 26 ft para sostener una carga céntrica de 65 kips. Si los tubos disponibles tienen espesores de pared de $\frac{1}{4}$ in. hasta $\frac{3}{4}$ in. en incrementos de $\frac{1}{16}$ in., utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar el tubo más ligero que puede utilizarse. Considere $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

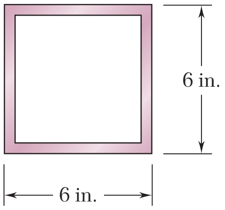


Figura *P10.83*

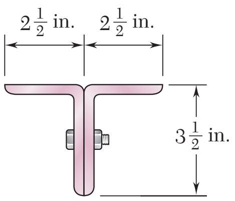


Figura P10.84

10.84 Se remachan dos ángulos de $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$ in., como se muestra en la figura, para usar como una columna de 6 ft de longitud efectiva para sostener una carga céntrica de 54 kips. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{2}$ in., utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

***10.85** Un tubo rectangular que tiene la sección transversal que se muestra en la figura, se utiliza como una columna de 14.5 ft de longitud efectiva. Si se sabe que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, utilice el diseño por el factor de carga y resistencia para determinar la mayor carga viva céntrica que puede aplicarse si la carga muerta céntrica es de 54 kips. Considere que el factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

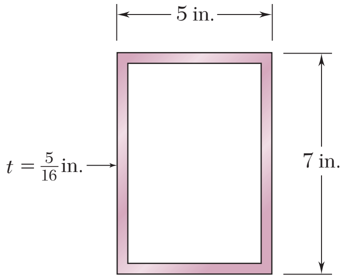


Figura P10.85

***10.86** Una columna con longitud efectiva de 5.8 m sostiene una carga céntrica, con una relación de cargas muertas y vivas igual a 1.35. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$, y el factor de resistencia $\phi = 0.90$. Use el diseño por factor de carga y resistencia para determinar las cargas vivas y muertas céntricas permisibles si la columna está elaborada de los siguientes perfiles de acero laminado *a*) W250 × 67, *b*) W360 × 101. Considere $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

***10.87** El tubo estructural con la sección transversal que se muestra en la figura se emplea como una columna de 15 ft de longitud efectiva para sostener una carga muerta céntrica de 51 kips y una carga viva céntrica de 58 kips. Si se sabe que los tubos disponibles están fabricados con espesores de pared que se incrementan en $\frac{1}{16}$ in. desde $\frac{3}{16}$ in. hasta $\frac{3}{8}$ in., utilice el diseño por factor de carga y resistencia para determinar el tubo más ligero que puede emplearse. Utilice $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva $\gamma_L = 1.6$, y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

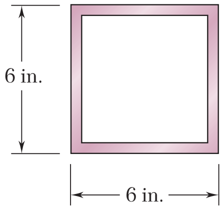


Figura P10.87

***10.88** Una columna de acero de 5.5 m de longitud efectiva debe sostener una carga muerta céntrica de 310 kN y una carga viva céntrica de 375 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño por factor de carga y resistencia para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 310 mm que debe emplearse. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

10.7 DISEÑO DE COLUMNAS BAJO UNA CARGA EXCÉNTRICA

En esta sección se estudiará el diseño de columnas sometidas a cargas excéntricas. Se examinará cómo las ecuaciones empíricas de la sección previa pueden modificarse y usarse cuando la carga **P** aplicada a la columna tiene una excentricidad *e* conocida.

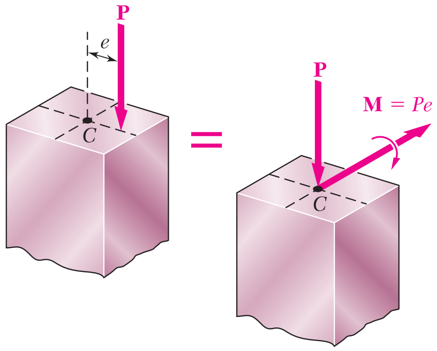


Figura 10.34

Primero recuerde, de la sección 4.12, que una carga excéntrica **P** aplicada en un plano de simetría de la columna puede reemplazarse por un sistema equivalente que consta de una carga céntrica **P** y un par **M** de momento $M = Pe$, donde e es la distancia de la línea de acción de la carga al eje longitudinal de la columna (figura 10.34). Los esfuerzos normales ejercidos en una sección transversal de la columna se obtienen superponiendo los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** y al par **M**, respectivamente (figura 10.35), siempre que la sección considerada no esté muy próxima a ninguno de los extremos de la columna y siempre que los esfuerzos incorporados no excedan el límite de proporcionalidad del material. Los esfuerzos normales debidos a la carga excéntrica **P** se expresan como:

$$\sigma = \sigma_{\text{céntrico}} + \sigma_{\text{flexión}} \tag{10.51}$$

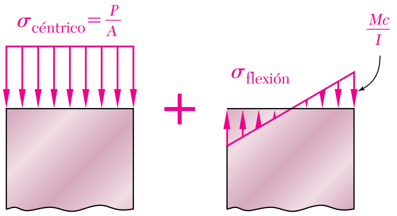

$\sigma_{\text{céntrico}} = \frac{P}{A}$
+
$\sigma_{\text{flexión}}$
$\frac{Mc}{I}$

Figura 10.35

Recordando los resultados de la sección 4.12, se halla que el esfuerzo máximo de compresión en la columna es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{10.52}$$

En una columna bien diseñada, el esfuerzo máximo definido por la ecuación (10.52) no debe exceder el esfuerzo permisible para la columna. Con el fin de satisfacer este requisito pueden utilizarse dos métodos alternos: el *método del esfuerzo permisible* y el *método de interacción*.

***a.* Método del esfuerzo permisible.** Este método se basa en la hipótesis de que los esfuerzos permisibles para una columna con carga excéntrica son iguales para la misma con carga céntrica. Debe tenerse, por tanto, $\sigma_{\text{máx}} \leqslant \sigma_{\text{perm}}$, donde σ_{perm} es el esfuerzo permisible bajo carga céntrica, o sustituyendo por $\sigma_{\text{máx}}$ de la ecuación (10.52)

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{perm}} \tag{10.53}$$

El esfuerzo permisible se obtiene mediante las ecuaciones de la sección 10.6 que, para un material dado, expresan a σ_{perm} como función de la relación de esbeltez de la columna. Los principales códigos de ingeniería requieren que se use la mayor relación de esbeltez para determinar el esfuerzo permisible, sin que interese que este valor corresponda o no al plano real de flexión. Este requisito a veces da como resultado un diseño en extremo conservador.

EJEMPLO 10.04

Una columna de sección transversal cuadrada de 2 in. y 28 in. de longitud efectiva está elaborada de aluminio 2014-T6. Usando el método del esfuerzo permisible, halle la máxima carga P que pueda soportar en forma segura con excentricidad de 0.8 in.

Primero se calcula el radio de giro r con los datos dados

$$A = (2 \text{ in.})^2 = 4 \text{ in.}^2 \qquad I = \tfrac{1}{12}(2 \text{ in.})^4 = 1.333 \text{ in.}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1.333 \text{ in.}^4}{4 \text{ in.}^2}} = 0.5773 \text{ in.}$$

Luego se calcula $L/r = (28 \text{ in.})/(0.5773 \text{ in.}) = 48.50$.

Como $L/r < 55$, se utiliza la ecuación (10.48) para encontrar el esfuerzo permisible en una columna de aluminio sometida a carga céntrica. Se tiene

$$\sigma_{\text{perm}} = [30.7 - 0.23(48.50)] = 19.55 \text{ ksi}$$

Ahora se recurre a la ecuación (10.53) con $M = Pe$ y $c = \frac{1}{2}(2 \text{ in.}) = 1$ in. para determinar la carga permisible:

$$\frac{P}{4 \text{ in.}^2} + \frac{P(0.8 \text{ in.})(1 \text{ in.})}{1.333 \text{ in.}^4} \leq 19.55 \text{ ksi}$$

$$P \leq 22.3 \text{ kips}$$

La carga máxima que puede aplicarse en forma segura es $P = 22.3$ kips.

***b.* Método de interacción.** Recuerde que el esfuerzo permisible en una columna sometida a carga céntrica (figura 10.36*a*) es generalmente menor que el esfuerzo permisible en una columna sometida a flexión pura (figura 10.36*b*), ya que la primera toma en cuenta la posibilidad del pandeo. Por tanto, cuando se utiliza el método del esfuerzo permisible para diseñar una columna bajo carga excéntrica y se escribe que la suma de los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** y al par flector **M** (figura 10.36*c*) no debe exceder el esfuerzo permisible para una columna con carga céntrica, el diseño resultante con frecuencia es muy conservador. Es posible un método mejor reescribiendo la ecuación (10.53) como:

$$\frac{P/A}{\sigma_{\text{perm}}} + \frac{Mc/I}{\sigma_{\text{perm}}} \leq 1 \qquad (10.54)$$

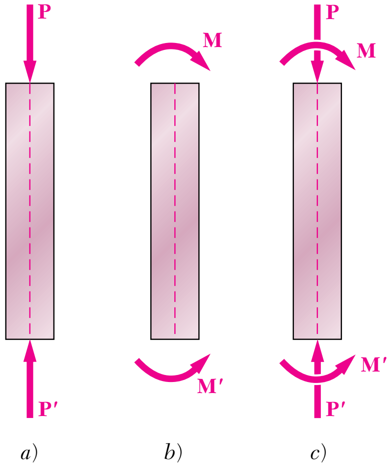


Figura 10.36

y sustituyendo por σ_{perm} los valores que corresponden, respectivamente, a la carga céntrica de la figura 10.36*a* y a la de la deflexión pura de la figura 10.36*b*, se tiene

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1 \qquad (10.55)$$

El tipo de ecuación obtenida se llama *fórmula de interacción.*

Se observa que, si $M = 0$, el uso de esta ecuación conduce al diseño de una columna céntricamente cargada por el método de la sección 10.6. Por otra parte, cuando $P = 0$, el uso de la ecuación da como resultado el diseño de una viga sometida a flexión pura por el método del capítulo 4. Cuando P y M son ambos diferentes de cero, la ecuación de interacción produce un diseño que toma en cuenta la capacidad del elemento para resistir la flexión y la fuerza axial. En todos los casos $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}$ se determinará usando la mayor relación de esbeltez de la columna sin importar el plano de flexión.†

---

† Este procedimiento es requerido por todos los códigos principales para el diseño de elementos de acero, aluminio y madera a compresión. Además, muchas especificaciones piden el uso de un factor adicional en el segundo término de la ecuación (10.55); este factor tiene en cuenta los esfuerzos adicionales resultantes de la deflexión de la columna por flexión.

Cuando la carga excéntrica **P** no se aplica en un plano de simetría, causa flexión en los dos ejes principales de la sección transversal. Recuerde, de la sección 4.14, que la carga **P** puede reemplazarse por una fuerza céntrica **P** y dos pares representados por los pares vectoriales $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ mostrados en la figura 10.37. La fórmula de interacción en tal caso es:

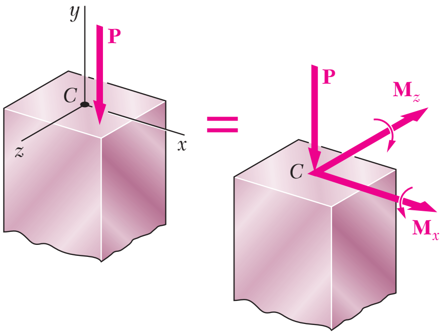


Figura 10.37

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{|M_x|z_{\text{máx}}/I_x}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} + \frac{|M_z|x_{\text{máx}}/I_z}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1 \tag{10.56}$$

EJEMPLO 10.05

Utilice el método de interacción para determinar la máxima carga P que puede soportar en forma segura la columna del ejemplo 10.04 con una excentricidad de 0.8 in. El esfuerzo permisible a la flexión es 24 ksi.

El valor de $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}$ se determinó en el ejemplo 10.04. Se tiene

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 19.55 \text{ ksi} \qquad (\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 24 \text{ ksi}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (10.55), se escribe

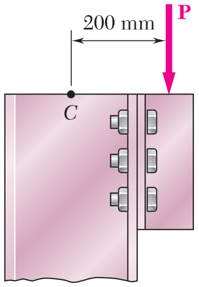
$$\frac{P/A}{19.55 \text{ ksi}} + \frac{Mc/I}{24 \text{ ksi}} \leq 1.0$$

Usando los datos numéricos del ejemplo 10.04, se escribe

$$\frac{P/4}{19.55 \text{ ksi}} + \frac{P(0.8)(1.0)/1.333}{24 \text{ ksi}} \leq 1.0$$

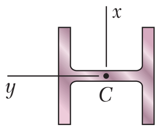
$$P \leq 26.5 \text{ kips}$$

Entonces la carga máxima que es posible aplicar con seguridad es $P = 26.5$ kips.

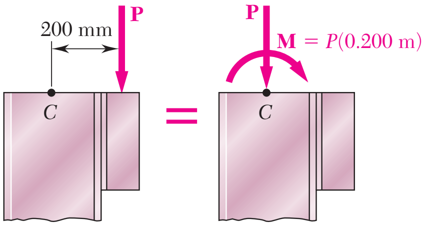


PROBLEMA MODELO 10.5

Usando el método del esfuerzo permisible, halle la máxima carga **P** para una columna de acero W310 × 74 de 4.5 m de longitud efectiva. Considere $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.



W310 × 74
$A = 9\,480 \text{ mm}^2$
$r_x = 132$ mm
$r_y = 49.7$ mm
$S_x = 1\,060 \times 10^3 \text{ mm}^3$



SOLUCIÓN

La mayor relación de esbeltez es $L/r_y = (4.5 \text{ m})/(0.0497 \text{ m}) = 90.5$. Utilizando la ecuación (10.41) con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, se tiene la relación de esbeltez en la unión entre las dos ecuaciones para σ_{cr} es $L/r = 133.2$. Por tanto, se utilizan las ecuaciones (10.38) y (10.39) y se encuentra que $\sigma_{\text{cr}} = 161.9$ MPa. Si se utiliza la ecuación (10.42), el esfuerzo permisible es

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrica}} = 161.9/1.67 = 96.9 \text{ MPa}$$

Para la columna y carga dadas, se tiene:

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{9.48 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} = \frac{P(0.200 \text{ m})}{1.060 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.58), se escribe

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{perm}}$$

$$\frac{P}{9.48 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P(0.200 \text{ m})}{1.060 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \leq 96.9 \text{ MPa} \qquad P \leq 330 \text{ kN}$$

La máxima carga permitida **P** es entonces **P** = 330 kN ↓ ◀

PROBLEMA MODELO 10.6

Usando el método de interacción, resuelva el problema modelo 10.5. Suponga $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 150$ MPa.

SOLUCIÓN

Usando la ecuación (10.55), se escribe:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1$$

Sustituyendo el esfuerzo de flexión permisible dado y el esfuerzo céntrico permisible encontrado en el problema modelo 10.5, lo mismo que los otros datos dados, se tiene

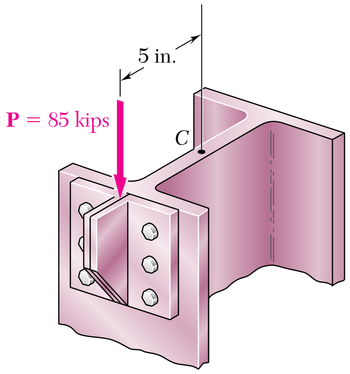
$$\frac{P/(9.48 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{96.9 \times 10^6 \text{ Pa}} + \frac{P(0.200 \text{ m})/(1.060 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{150 \times 10^6 \text{ Pa}} \leq 1$$

$$P \leq 426 \text{ kN}$$

La fuerza máxima admisible **P** es entonces **P** = 426 kN ↓ ◀

PROBLEMA MODELO 10.7

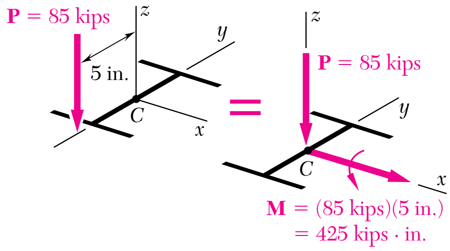
Una columna de acero tiene una longitud efectiva de 16 ft y está cargada excéntricamente, como se indica en la figura. Usando el método de interacción, elija el perfil W apropiado con altura nominal de 8 in. Suponga $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, y use un esfuerzo permisible a flexión de 22 ksi.



SOLUCIÓN

Para ayudar a seleccionar una sección de ensayo, se utiliza el método del esfuerzo permisible con $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi, y se escribe

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_x} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{Ar_x^2} \tag{1}$$



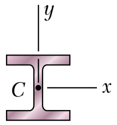
En el apéndice C se observa que para perfiles de 8 in., $c \approx 4$ in. y $r_x \approx 3.5$ in. Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene

$$22 \text{ ksi} = \frac{85 \text{ kips}}{A} + \frac{(425 \text{ kips} \cdot \text{in.})(4 \text{ in.})}{A(3.5 \text{ in.})^2} \qquad A \approx 10.2 \text{ in.}^2$$

En la primera instancia se elige el perfil W8 × 35.

Ensayo 1: W8 × 35. Los esfuerzos permisibles son

Esfuerzos de flexión permisibles (véase los datos) $\quad (\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 22$ ksi



W8 × 35

$A = 10.3 \text{ in.}^2$
$r_x = 3.51$ in.
$r_y = 2.03$ in.
$S_x = 31.2 \text{ in.}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in.

Esfuerzo concéntrico permisible: La mayor relación de esbeltez de la columna es $L/r_y = (192 \text{ in.})/(2.03 \text{ in.}) = 94.6$. Si se usa la ecuación (10.41) con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, se encuentra que la relación de esbeltez en la unión entre las dos ecuaciones para σ_{cr} es $L/r = 133.7$. Por lo tanto, se utilizan las ecuaciones (10.38) y (10.39) y se encuentra que $\sigma_{\text{cr}} = 22.5$ ksi. A partir de la ecuación (10.42), el esfuerzo permisible es

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 22.5/1.67 = 13.46 \text{ ksi}$$

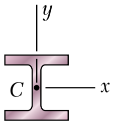
Para la sección W8 × 35, se tiene

$$\frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kips}}{10.3 \text{ in.}^2} = 8.25 \text{ ksi} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{425 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{31.2 \text{ in.}^3} = 13.62 \text{ ksi}$$

Con estos datos se halla que el primer miembro de la ecuación (10.55) es

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} = \frac{8.25 \text{ ksi}}{13.464 \text{ ksi}} + \frac{13.62 \text{ ksi}}{22 \text{ ksi}} = 1.232$$

Como $1.232 > 1.000$ el requisito expresado por la fórmula de interacción no se satisface; debe elegirse una sección más grande.



W8 × 48

$A = 14.1 \text{ in.}^2$
$r_x = 3.61$ in.
$r_y = 2.08$ in.
$S_x = 43.3 \text{ in.}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in.

Ensayo 2: W8 × 48. Siguiendo el procedimiento anterior, se escribe

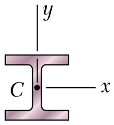
$$\frac{L}{r_y} = \frac{192 \text{ in.}}{2.08 \text{ in.}} = 92.3 \qquad (\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 13.76 \text{ ksi}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kips}}{14.1 \text{ in.}^2} = 6.03 \text{ ksi} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{425 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{43.3 \text{ in.}^3} = 9.82 \text{ ksi}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.55):

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} = \frac{6.03 \text{ ksi}}{13.76 \text{ ksi}} + \frac{9.82 \text{ ksi}}{22 \text{ ksi}} = 0.884 < 1.000$$

El perfil W8 × 48 es satisfactorio pero puede ser innecesariamente grande.



W8 × 40

$A = 11.7 \text{ in.}^2$
$r_x = 3.53$ in.
$r_y = 2.04$ in.
$S_x = 35.5 \text{ in.}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in.

Ensayo 3: W8 × 40. Siguiendo el procedimiento, la fórmula de interacción no se satisface.

Selección de perfil. Se debe utilizar el perfil **W8 × 48** ◀

PROBLEMAS

10.89 Una columna de 5.5 m de longitud efectiva está elaborada de una aleación de aluminio 2014-T6 para el que el esfuerzo permisible a la flexión es 220 MPa. Con el método de interacción determine la carga permisible **P**, si se sabe que la excentricidad es *a*) $e = 0$, *b*) $e = 40$ mm.

10.90 Retome el problema 10.89, y ahora suponga que la longitud efectiva de la columna es de 3.0 m.

10.91 Una columna de madera con una sección transversal de 5.0 × 7.5 in. tiene una longitud efectiva de 8.5 ft. El tipo de madera que se usó tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a las fibras $\sigma_C = 1\,180$ psi y un módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi. Con el método del esfuerzo permisible, determine la carga excéntrica **P** más grande que puede aplicarse cuando *a*) $e = 0.5$ in., *b*) $e = 1.0$ in.

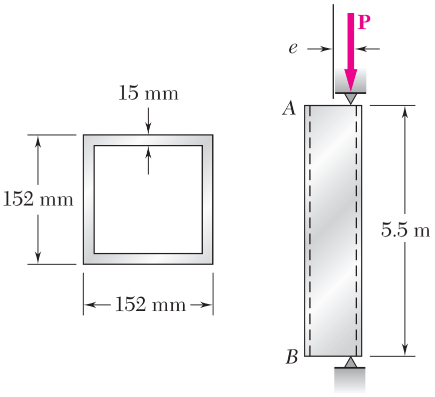


Figura P10.89

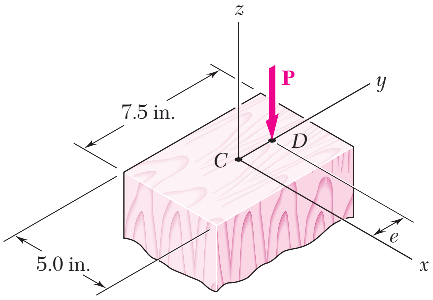


Figura P10.91

10.92 Retome el problema 10.91, y ahora use el método de interacción y un esfuerzo permisible a la flexión de 1 300 psi.

10.93 Un elemento a compresión con 2.75 m de longitud efectiva soporta una carga céntrica, como se muestra en la figura. Utilice el método del esfuerzo permisible y suponga que $e = 40$ mm, para determinar la carga **P**. Considere que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

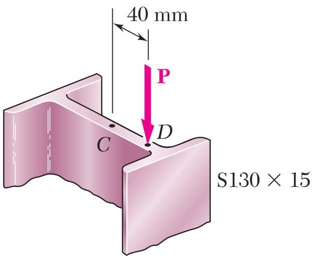


Figura P10.93

10.94 Retome el problema 10.93, y ahora use $e = 60$ mm.

10.95 Una columna rectangular está hecha de una madera que tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C = 1\,750$ psi y un módulo de elasticidad ajustado $E = 580 \times 10^3$ psi. Con el método del esfuerzo permisible determine la mayor longitud efectiva permisible L que puede utilizarse.

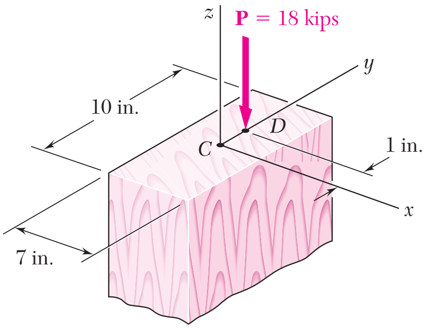


Figura P10.95

10.96 Retome el problema 10.95, y ahora suponga que $P = 24$ kips.

10.97 Una carga excéntrica $P = 48$ kN se aplica en un punto a 20 mm del eje geométrico de la barra de 50 mm de diámetro, la cual está hecha de una aleación de aluminio 6061-T6. Use el método de interacción y un esfuerzo permisible a la tensión de 145 MPa para determinar la máxima longitud efectiva permisible L que puede utilizarse.

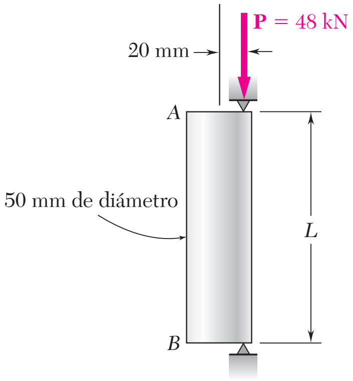


Figura P10.97

10.98 Retome el problema 10.97, y ahora suponga que la aleación de aluminio empleada es 2014-T6, y que el esfuerzo permisible a la flexión es de 180 MPa.

10.99 El elemento a compresión AB está hecho de acero para el que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Está libre en su parte superior A y fijo en su base B. Con el método de esfuerzo permisible, determine la máxima excentricidad permisible e_x, si se sabe que *a*) $e_y = 0$, *b*) $e_y = 8$ mm.

10.100 El elemento a compresión AB está hecho de acero para el que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Está libre en su parte superior A y fijo en su base B. Con el método de interacción para un esfuerzo flector permisible igual a 120 MPa, y sabiendo que las excentricidades e_x y e_y son iguales, determine su valor común permisible máximo.

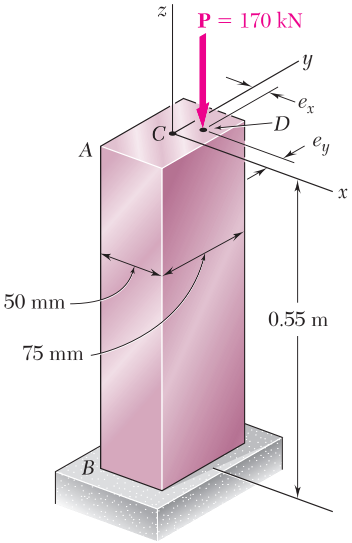


Figura P10.99 y P10.100

10.101 Una columna de 14 ft de longitud efectiva consiste en una sección de tubo de acero que tiene la sección transversal que se ilustra en la figura. Con el método del esfuerzo permisible, calcule la máxima excentricidad permisible e si *a*) $P = 55$ kips, *b*) $P = 35$ kips. Considere $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

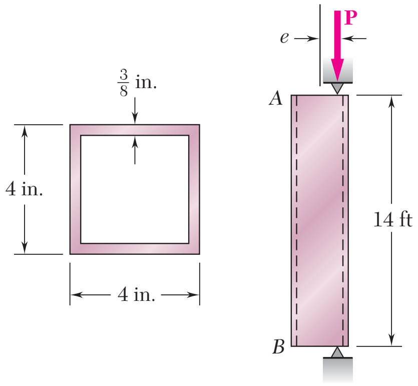


Figura *P10.101*

10.102 Retome el problema 10.101, y ahora suponga que la longitud efectiva de la columna se incrementa a 18 ft y que *a*) $P = 28$ kips, *b*) $P = 18$ kips.

10.103 Una columna de madera con sección transversal rectangular tiene una longitud efectiva de 7.2 ft y soporta una carga de 9.2 kips, como muestra la figura. Los tamaños disponibles para b son iguales a 3.5, 5.5, 7.5 y 9.5 in. El tipo de madera tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C =$ 1 180 psi y un módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi. Con el método del esfuerzo permisible, determine la sección más ligera que puede emplearse.

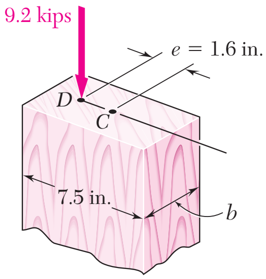


Figura P10.103

10.104 Retome el problema 10.103, y ahora suponga que $e = 3.2$ in.

10.105 La carga excéntrica **P** tiene una magnitud de 85 kN y se aplica en un punto localizado a una distancia $e = 30$ mm del eje geométrico de un cilindro hecho de una aleación de aluminio 6016-T6. Con el método de la interacción y un esfuerzo permisible a la flexión de 140 MPa, encuentre el diámetro más pequeño d que puede utilizarse.

10.106 Retome el problema 10.105 con el método del esfuerzo permisible, y suponga que la aleación de aluminio empleada es una 2014-T6.

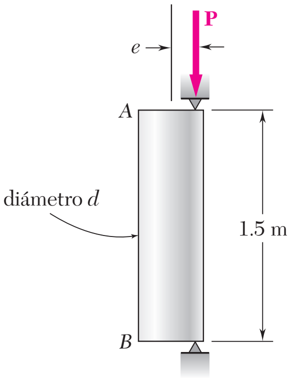


Figura P10.105

10.107 Un elemento de compresión con sección transversal rectangular tiene una longitud efectiva de 36 in. y está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6, para la que el esfuerzo permisible a la flexión es de 24 ksi. Con el método de interacción, determine la dimensión d más pequeña de la sección transversal que puede usarse cuando $e = 0.4$ in.

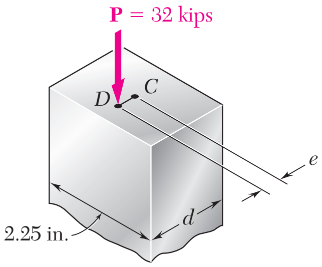


Figura P10.107

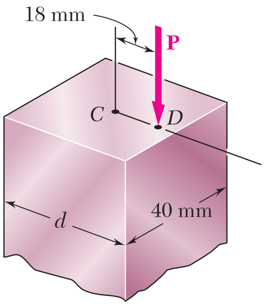


Figura P10.109

10.108 Retome el problema 10.107, y ahora suponga que $e = 0.2$ in.

10.109 Un elemento de compresión hecho de acero tiene una longitud efectiva de 720 mm y debe soportar una carga **P** de 198 kN, según se muestra en la figura. Para el material empleado, $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Con el método de interacción y un esfuerzo permisible a la flexión igual a 150 MPa, determine la dimensión d más pequeña de la sección transversal que puede utilizarse.

10.110 Retome el problema 10.109, y ahora suponga que la longitud efectiva es de 1.62 m y que la magnitud P de la carga excéntrica es de 128 kN.

10.111 Un tubo de aluminio con 80 mm de diámetro exterior debe soportar una carga **P** de 93 kN con una excentricidad de 20 mm. Los tubos disponibles para su uso están hechos con grosores de pared en incrementos de 3 mm desde 6 mm hasta 15 mm. Emplee el método de diseño del esfuerzo permisible y determine el tubo más ligero que puede utilizarse. Suponga que $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

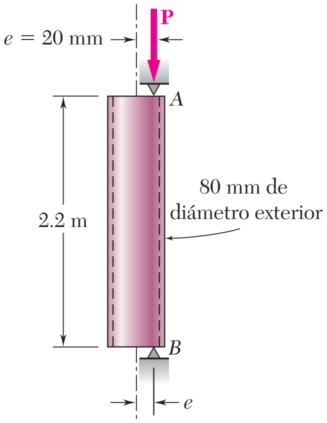


Figura P10.111

10.112 Retome el problema 10.111, y ahora use el método de diseño de interacción con $P = 165$ kN, $e = 15$ mm y un esfuerzo permisible a la flexión de 150 MPa.

10.113 Una columna de acero con 24 ft de longitud efectiva está excéntricamente cargada, como se muestra en la figura. Con el método del esfuerzo permisible, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 14 in. que debe usarse. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

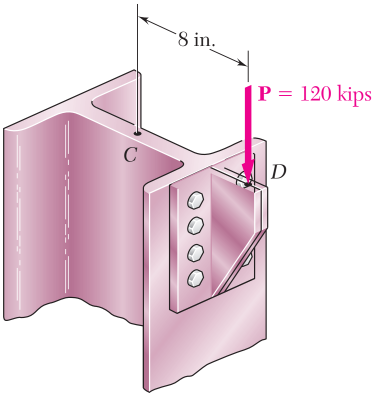


Figura P10.113

10.114 Retome el problema 10.113, y ahora use el método de interacción, suponga que $\sigma_Y = 50$ ksi y un esfuerzo permisible a la flexión de 30 ksi.

10.115 Un elemento de compresión de acero de longitud efectiva de 5.8 m, sostiene una carga excéntrica **P** de 296 kN. Con el método de interacción, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 200 mm que debe usarse. Utilice $E = 200$ GPa, $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_{\text{perm}} = 150$ MPa a la flexión.

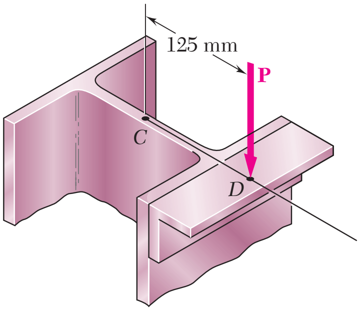


Figura P10.115

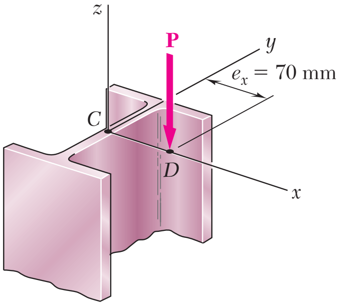


Figura *P10.116*

10.116 Una columna de acero de 7.2 m de longitud efectiva debe soportar una carga excéntrica **P** de 83 kN en un punto D localizado sobre el eje x, según se muestra en la figura. Con el método del esfuerzo permisible, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 250 mm que debe utilizarse. Considere $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 10

Carga crítica

Este capítulo se dedicó al diseño y análisis de columnas, es decir, elementos prismáticos bajo cargas axiales. Para familiarizarse con el comportamiento de las columnas se consideró, en la sección 10.2, el equilibrio de un modelo simple y se halló que para valores de carga P por encima de cierto valor P_{cr}, llamado *carga crítica*, eran posibles dos posiciones de equilibrio del modelo: la posición original, con cero deflexiones transversales, y una segunda posición que incluía deflexiones que podían ser bastante grandes. Esto condujo a concluir que la primera posición de equilibrio era inestable para $P > P_{\mathrm{cr}}$, y estable para $P < P_{\mathrm{cr}}$, pues en el último caso era la única posición posible de equilibrio.

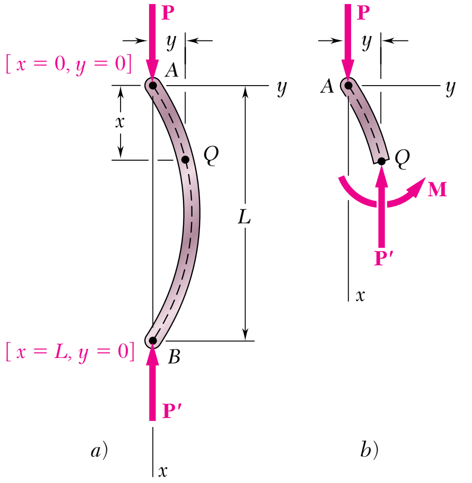


Figura 10.8

En la sección 10.3 se estudió una columna articulada de longitud L y de rigidez flexional constante EI sometida a una carga axial céntrica P. Suponiendo que la columna se hubiera pandeado (figura 10.8), se había observado que el momento flector en Q era igual a $-P_y$ y se escribió

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

Fórmula de Euler

Resolviendo la ecuación diferencial, sujeta a las condiciones de frontera correspondientes a una columna articulada, se determinó la carga P más pequeña para la cual el pandeo podría ocurrir. Esta carga, llamada *carga crítica* y denotada por P_{cr}, está dada por la *fórmula de Euler*:

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.11}$$

en donde L es la longitud de la columna. Para esta carga, u otra mayor, el equilibrio de la columna es inestable y ocurren deflexiones transversales.

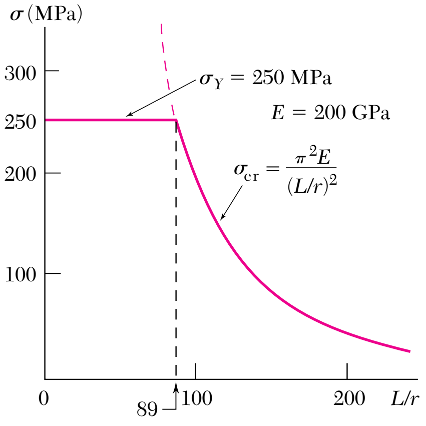


Figura 10.9

Representando el área de la sección transversal de la columna por A y su radio de giro por r, se encontró el esfuerzo crítico σ_{cr} correspondiente a la carga crítica P_{cr}:

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.13}$$

Relación de esbeltez

La cantidad L/r se llamó *relación de esbeltez* y se dibujó σ_{cr} como función de L/r (figura 10.9). Puesto que el análisis se basó en esfuerzos que permanecen por debajo del límite de cedencia del material, se observó que la columna fallaría por fluencia cuando $\sigma_{\mathrm{cr}} > \sigma_Y$.

En la sección 10.4 se analizó la carga crítica de columnas con diferentes condiciones de extremo y se escribió

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \qquad (10.11')$$

Longitud efectiva

en donde L_e es la *longitud efectiva* de la columna, es decir, la longitud de una columna equivalente articulada. Se calcularon las longitudes efectivas de varias columnas con diferentes condiciones de extremo, y se mostraron en la figura 10.18 de la página 617.

Carga axial excéntrica. Fórmula de la secante

En la sección 10.5, se consideraron columnas bajo carga *axial excéntrica*. En una columna articulada sometida a una carga P aplicada con excentricidad e, reemplazamos la carga por una carga axial céntrica y un par de momento $M_A = Pe$ (figuras 10.19*a* y 10.20) y se dedujo la siguiente expresión para la máxima deflexión transversal:

$$y_{\text{máx}} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\frac{L}{2}\right) - 1\right] \qquad (10.28)$$

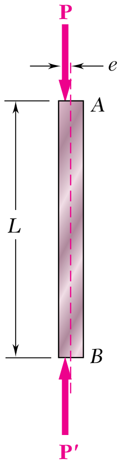


Figura 10.19*a*

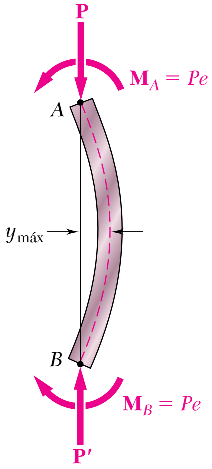


Figura 10.20

Después se determinó el esfuerzo máximo en la columna y, de la expresión obtenida para ese esfuerzo, se dedujo la *fórmula de la secante*:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\,\dfrac{L_e}{r}\right)} \qquad (10.36)$$

Esta ecuación puede resolverse para la fuerza por unidad de área, P/A, la cual causa un máximo esfuerzo especificado $\sigma_{\text{máx}}$ en una columna articulada en los extremos o en cualquier otra columna de relación efectiva de esbeltez L_e/r.

Diseño de columnas reales

Columnas céntricamente cargadas

En la primera parte de este capítulo cada columna se tomó como un prisma homogéneo recto. Como en todas las columnas reales hay imperfecciones, el *diseño de columnas reales* se realiza mediante el uso de fórmulas empíricas basadas en pruebas de laboratorio y expresadas en especificaciones de códigos elaborados por organizaciones profesionales. En la sección 10.6 se analizó el diseño de *columnas céntricamente cargadas*, hechas de acero, aluminio o madera. Para cada material el diseño se basó en ecuaciones que expresan el esfuerzo permisible como función de la relación de esbeltez L/r de la columna.

Columnas con carga excéntrica

Método del esfuerzo permisible

En la última sección de este capítulo [véase sección 10.7] se estudiaron dos métodos utilizados para el diseño de columnas bajo una carga *excéntrica*. El primero fue el *método del esfuerzo permisible*, un método conservador en el cual se supone que el esfuerzo permisible es el mismo que si la columna estuviera céntricamente cargada. El método del esfuerzo permisible requiere que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{perm}} \qquad (10.53)$$

Método de interacción

El segundo método fue el de *interacción*, usado en la mayor parte de las especificaciones modernas. En este método, el esfuerzo permisible para una columna cargada céntricamente se usa para la porción del esfuerzo total producido por la carga axial y el esfuerzo permisible a deflexión, para el esfuerzo producido por la flexión. Así, la desigualdad por satisfacer es

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1 \qquad (10.55)$$

PROBLEMAS DE REPASO

10.117 La varilla de acero *BC* está unida a la barra rígida *AB* y al apoyo fijo en *C*. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la carga crítica P_{cr} del sistema cuando $d = \frac{1}{2}$ in.

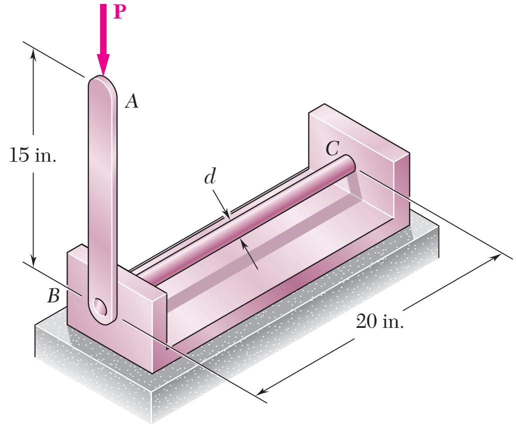


Figura P10.117

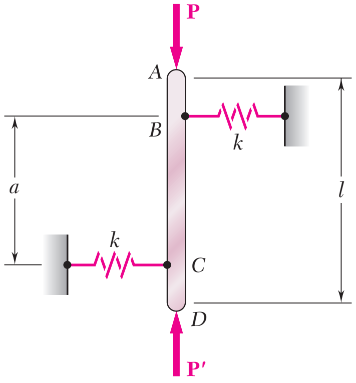


Figura *P10.118*

10.118 La barra rígida *AD* está unida a dos resortes de constante *k* y se encuentra en equilibrio, según la posición mostrada en la figura. Si se sabe que las fuerzas iguales y opuestas **P** y **P**′ *permanecen verticales*, determine la magnitud P_{cr} de la carga crítica para el sistema. Cada resorte puede actuar ya sea a tensión o a compresión.

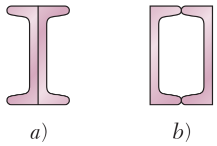

a) *b*)

Figura P10.119

10.119 Una columna de 3 m de longitud efectiva se construirá al soldar dos canales de acero laminado C130 × 13. Utilice $E = 200$ GPa para determinar, en cada arreglo que se muestra en la figura, la carga céntrica permisible si se requiere un factor de seguridad de 2.4.

10.120 El elemento *AB* es un solo canal de acero C130 × 10.4 de 2.5 m de longitud. Si se sabe que los anclajes en los puntos *A* y *B* pasan a través del centroide de la sección transversal del canal, determine el factor de seguridad para la carga que se muestra respecto del pandeo en el plano de la figura si $\theta = 30°$. Considere que $E = 200$ GPa.

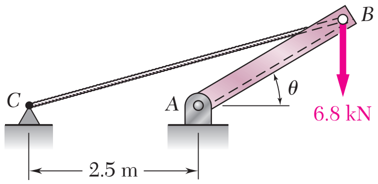


Figura P10.120

10.121 Un puntal cuadrado de aluminio de 1 in. se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un anclaje en el punto A y por un conjunto de apoyos móviles en B y C, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L_{AB} = 3$ ft, $L_{BC} = 4$ ft y $L_{CD} = 1$ ft, determine la carga **P** permisible con un factor de seguridad de 3.2 respecto del pandeo. Considere sólo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

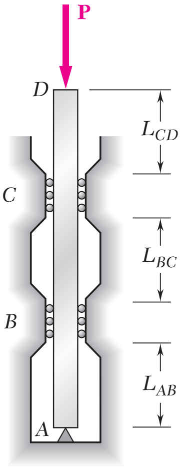

P
D
L_{CD}
C
L_{BC}
B
L_{AB}
A

Figura P10.121

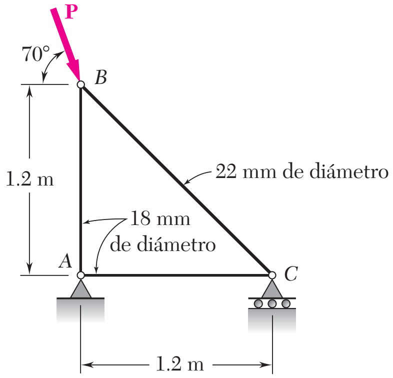

P
70°
B
1.2 m
22 mm de diámetro
18 mm
de diámetro
A
C
1.2 m

Figura *P10.122*

10.122 Determine el factor de seguridad para la estructura que se muestra en la figura, si se sabe que $P = 5.2$ kN. Utilice $E = 200$ GPa y considere sólo el pandeo en el plano de la estructura.

10.123 Se aplica una carga axial **P** a la varilla de acero AB con un diámetro de 1.25 in. que se muestra en la figura. Para $P = 8.6$ kips y $e = \frac{1}{16}$ in., determine *a*) la deflexión en el punto medio C de la varilla, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

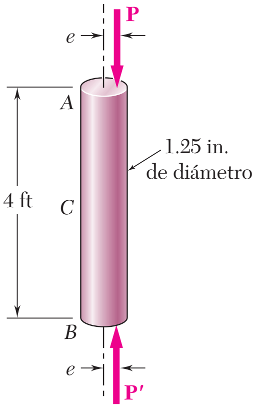

P
e
A
1.25 in.
de diámetro
4 ft
C
B
e
P′

Figura P10.123

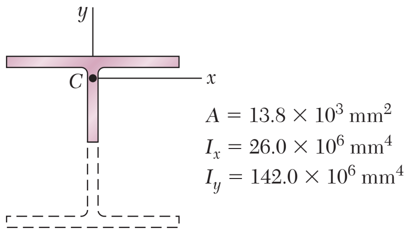

y
C
x
$A = 13.8 \times 10^3$ mm^2
$I_x = 26.0 \times 10^6$ mm^4
$I_y = 142.0 \times 10^6$ mm^4

Figura P10.124

10.124 Una columna está hecha de medio perfil de acero laminado W360 × 216 y tiene las propiedades geométricas que se muestran en la figura. Con el diseño de esfuerzo permisible, determine la carga céntrica permisible si la longitud efectiva de la columna es *a*) 4.0 m, *b*) 6.5 m. Utilice $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.125 Un elemento a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura y una longitud efectiva de 5 ft. Si se sabe que la aleación de aluminio usada es 2014–T6, determine la carga céntrica permisible.

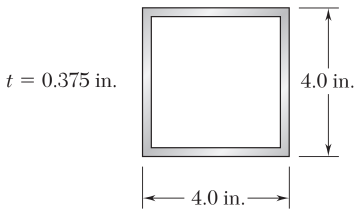


Figura *P10.125*

10.126 Una columna con longitud efectiva de 17 ft debe sostener una carga céntrica de 235 kips. Utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 10 in. que debe usarse. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.127 Una carga vertical **P** de 32 kN se aplica en el punto medio de una arista de la sección transversal cuadrada de un elemento a compresión *AB*, el cual está hecho de aluminio y tiene su parte superior *A* libre y su base *B* fija. Si se sabe que la aleación empleada es una 6061-T6, con el método del esfuerzo permisible calcule la dimensión *d* más pequeña permisible.

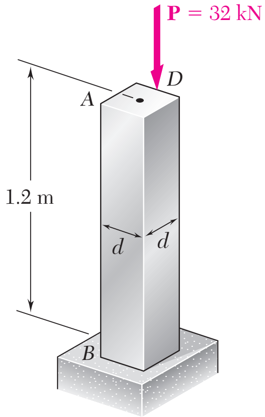


Figura *10.127*

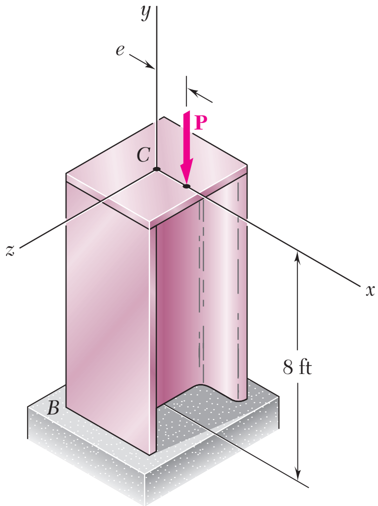


Figura P10.128

10.128 Una carga axial **P** de 43 kips se aplica a la columna *BC* de acero laminado en un punto del eje *x* a una distancia $e = 2.5$ in. del eje geométrico de la columna. Con el método del esfuerzo permisible, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 8 in. que debe emplearse. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi.

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para resolverse con la ayuda de una computadora.

10.C1 Una barra de acero con longitud efectiva de 500 mm se usará como riostra a compresión para una carga céntrica **P**. Para el grado de acero utilizado $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 245$ MPa. Si se requiere un factor de seguridad de 2.8 usando la fórmula de Euler, escriba un programa para computadora y úselo para calcular la carga céntrica permisible P_{perm} para valores del radio de 6 mm a 24 mm, en intervalos de 2 mm.

10.C2 Una barra de aluminio está fija en su extremo A y apoyada en el extremo B en forma tal que está libre para rotar alrededor de un eje horizontal que pasa por el anclaje. Las abrazaderas impiden la rotación alrededor de un eje vertical en el extremo B. Si $E = 10.1 \times 10^6$ psi, utilice la fórmula de Euler con un factor de seguridad de 2.5 para determinar la carga **P** céntrica admisible para valores de b desde 0.75 in. a 1.5 in., con incrementos a cada 0.125 in.

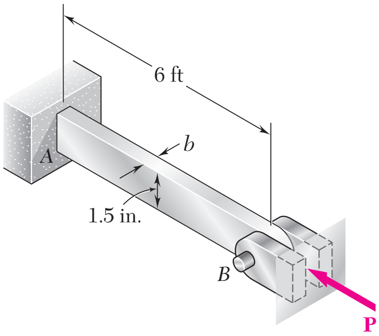


Figura P10.C2

10.C3 Los miembros anclados AB y BC consisten en secciones de tubo de aluminio de 120 mm de diámetro y 10 mm de espesor de pared. Si se necesita un factor de seguridad de 3.5, calcule la masa m del bloque más grande que puede sostener el arreglo de cables que se ilustra en la figura, para valores de h desde 4 m hasta 8 m, usando incrementos de 0.25 m. Utilice $E = 70$ GPa y considere sólo el pandeo en el plano de la estructura.

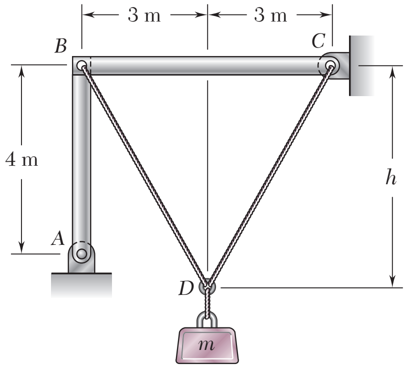


Figura P10.C3

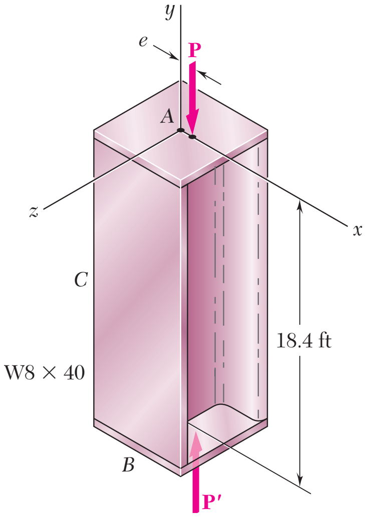


Figura P10.C4

10.C4 Se aplica una carga axial **P** en un punto del eje x a una distancia $e = 0.5$ in. del eje geométrico de la columna AB de acero laminado W8 × 40. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, escriba un programa de cómputo y úselo para calcular, para valores de P desde 25 a 75 kips en intervalos de 5 kips: *a*) la deflexión horizontal en el punto medio C, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

10.C5 Una columna de longitud efectiva L de un perfil laminado de acero debe soportar una carga axial céntrica **P**. La resistencia a la fluencia para el grado de acero utilizado es σ_Y, el módulo de elasticidad es E, el área de sección transversal del perfil seleccionado es A, y su radio de giro más pequeño es r. Mediante las ecuaciones de diseño AISC, escriba un programa de cómputo que pueda utilizarse con las unidades americanas o con las del SI para determinar la carga permisible **P**. Emplee este programa para solucionar los problemas *a*) 10.59, *b*) 10.60, *c*) 10.124.

10.C6 Una columna de longitud efectiva L de un perfil laminado de acero debe soportar una carga excéntrica como aparece en la figura. La resistencia a la fluencia del grado de acero se indica por σ_Y, el esfuerzo permisible a la flexión por σ_{perm}, el módulo de elasticidad por E, el área de sección transversal del perfil seleccionado por A, y su radio de giro más pequeño es r. Escriba un programa de cómputo que pueda utilizarse con las unidades americanas o con las del SI para determinar la carga permisible **P**, ya sea por el método del esfuerzo permisible o por el de interacción. Utilice este programa para revolver los problemas *a*) 10.113, *b*) 10.114.

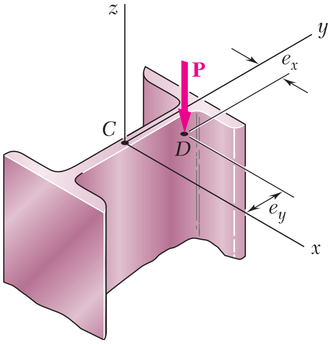


Figura P10.C6

CAPÍTULO

11

Métodos de energía

Cuando el clavadista desciende sobre el trampolín, la energía potencial debida a su elevación sobre éste se convierte en energía de deformación debido a la flexión de la tabla. En este capítulo se determinarán los esfuerzos normal y cortante que resultan de las cargas de energía.

11.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores el interés se centró en las relaciones existentes entre fuerzas y deformaciones bajo diferentes condiciones de carga. El análisis se basó en dos conceptos fundamentales: el concepto de esfuerzo (capítulo 1) y el de deformación (capítulo 2). Ahora se introducirá un tercer concepto importante, el de *energía de deformación*.

En la sección 11.2 se definirá la *energía de deformación* de un elemento como el aumento de energía asociada con la deformación del elemento. Se observará que la energía de deformación es igual al trabajo realizado por una carga, la cual se incrementa lentamente aplicada al elemento. La *densidad de energía de deformación* de un material se definirá como la energía de deformación por unidad de volumen y se observará que es igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación del material (sección 11.3). A partir del diagrama esfuerzo-deformación de un material, se definirá el *módulo de tenacidad* y el *módulo de resiliencia* del material.

En la sección 11.4 se analizará la energía de deformación elástica asociada con *esfuerzos normales*, primero en elementos bajo carga axial y luego en elementos sometidos a flexión. Más tarde se considerará la energía elástica asociada con *esfuerzos cortantes* como los que ocurren en las cargas torsionales de los ejes y en cargas transversales de las vigas (sección 11.5). La energía de deformación para un *estado general de esfuerzo* se analizará en la sección 11.6, de donde se deducirá el *criterio de máxima energía de distorsión* para la fluencia o cedencia.

El efecto de *carga de impacto* se examinará en la sección 11.7. Se aprenderá a calcular tanto el *máximo esfuerzo* como la *deflexión máxima* causada por una masa en movimiento que se impacta en un elemento. En la sección 11.8 se analizarán las propiedades que mejoran la capacidad de una estructura para soportar cargas de impacto.

En la sección 11.9 se calculará la energía elástica de deformación de un elemento sometido a una *carga única concentrada* y en la sección 11.10 se determinará la deflexión en el punto de aplicación de la carga única.

En la última parte del capítulo se considerará la energía de deformación de una estructura sometida a *varias cargas* (sección 11.11). El *teorema de Castigliano* se deducirá en la sección 11.12 y se utilizará en la sección 11.13 para determinar la deflexión en un punto dado de una estructura sometida a la acción de varias cargas. En la última sección se aplicará el teorema de Castigliano al análisis de estructuras indeterminadas (sección 11.14).

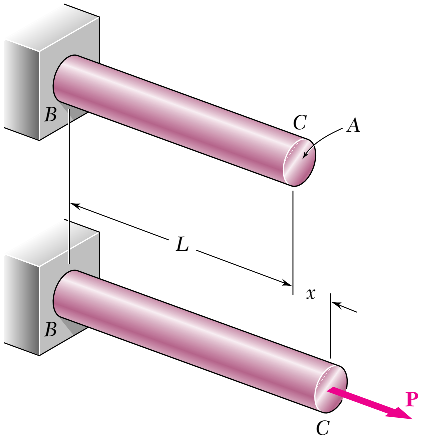


Figura 11.1

11.2 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Considere una barra BC de longitud L y sección transversal A, empotrada en B y sometida en C a una carga axial $\mathbf{P}$ que se *incrementa lentamente* (figura 11.1). Como se estudió en la sección 2.2, graficando la magnitud P de la carga contra la deformación x de la barra se obtiene un diagrama carga-deformación (figura 11.2) que es característico de la barra BC.

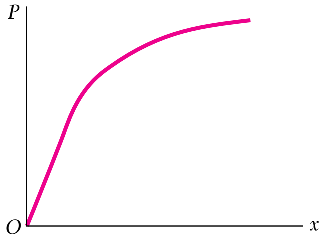


Figura 11.2

Considere ahora el trabajo dU realizado por la carga **P** cuando la barra se alarga una pequeña cantidad dx. Este *trabajo elemental* es igual al producto de la magnitud P de la carga y del pequeño alargamiento dx. Se tiene

$$dU = P\,dx \tag{11.1}$$

y se observa que la expresión obtenida es igual al elemento de área de ancho dx localizado bajo el diagrama carga-deformación (figura 11.3). El *trabajo total* U efectuado por la carga cuando la barra experimenta una deformación x_1 es

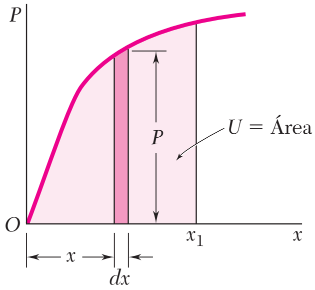


Figura 11.3

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx$$

y es igual al área bajo el diagrama carga-deformación entre $x = 0$ y $x = x_1$.

El trabajo realizado por la carga **P**, cuando se le aplica lentamente a la barra, debe producir el incremento de alguna energía asociada con la deformación de la barra. Esta energía es la *energía de deformación* de la barra. Por definición

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

Recuerde que trabajo y energía se expresan en unidades obtenidas multiplicando unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, en el sistema SI, trabajo y energía se expresan en N · m o *joules* (J). En unidades americanas se tendrá ft · lb o in. · lb.

En el caso de una deformación lineal y elástica, la porción del diagrama carga-deformación incluido puede representarse por una línea recta cuya ecuación es $P = kx$ (figura 11.4). Sustituyendo para P en la ecuación (11.2),

$$U = \int_0^{x_1} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

o

$$U = \tfrac{1}{2}P_1x_1 \tag{11.3}$$

donde P_1 es el valor de la carga que corresponde a la deformación x_1.

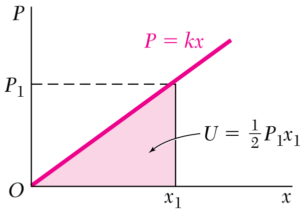


Figura 11.4

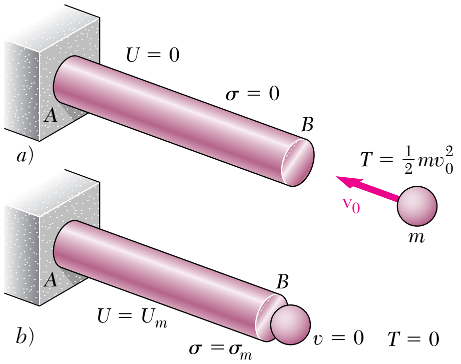


Figura 11.5

El concepto de energía de deformación es particularmente útil en la determinación de los efectos de carga de impacto en estructuras o elementos de máquinas. Considere, por ejemplo, un cuerpo de masa m que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_0$ y que golpea el extremo B de la barra AB (figura 11.5*a*). Despreciando la inercia de los elementos de la barra y suponiendo que no hay disipación de energía durante el impacto, se halla que la máxima energía de deformación U_m adquirida por la barra (figura 11.5*b*) es igual a la energía cinética inicial $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ del cuerpo en movimiento. Es posible determinar el valor P_m de la carga estática que habría producido la misma energía de deformación en la barra, y obtener el valor σ_m del máximo esfuerzo en la barra dividiendo P_m entre el área de la sección transversal de la barra.

11.3 DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Como se observó en la sección 2.2, el diagrama carga-deformación para una barra BC depende de la longitud L y del área A de la sección transversal de la barra. La energía de deformación U definida por la ecuación (11.2), por tanto, dependerá también de las dimensiones de la barra. Para eliminar el efecto de tamaño de nuestro análisis y dirigir nuestra atención a las propiedades del material, se considera la energía de deformación por unidad de volumen. Dividiendo la energía de deformación U entre el volumen $V = AL$ de la barra (figura 11.1), y usando la ecuación (11.2), se tiene

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L}$$

Recordando que P/A es el esfuerzo normal σ_x en la barra, y x/L la deformación normal ϵ_x, se escribe

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x$$

donde ϵ_1 es la deformación correspondiente a la elongación x_1. La energía de deformación por unidad de volumen, U/V, es la *densidad de energía de deformación* y se designará por la letra u. Se tiene, entonces

$$\text{Densidad de energía de deformación} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x \qquad (11.4)$$

La densidad de energía de deformación u se expresa en unidades que se obtienen dividiendo unidades de energía por unidades de volumen. En el sistema SI se tendrá J/m^3 o sus múltiplos kJ/m^3 y MJ/m^3; en el sistema americano, será in. · lb/in.^{3}.†

---

† Debe notarse que 1 J/m^3 y 1 Pa son ambos iguales a 1 N/m^2, mientras 1 in. · lb/in.^{3} y 1 psi son iguales a 1 lb/in.^{2}. Así, densidad de energía de deformación y esfuerzo son dimensionalmente iguales y pueden expresarse en las mismas unidades.

Refiriéndose a la figura 11.6, se observa que la densidad de energía de deformación u es igual al área situada bajo la curva esfuerzo-deformación, medida desde $\epsilon_x = 0$ hasta $\epsilon_x = \epsilon_1$. Si se retira la carga del material, el esfuerzo vuelve a cero, pero hay una deformación permanente ϵ_p, y sólo la porción que corresponde al área triangular puede recuperarse. El resto de la energía gastada al deformar el material se disipa en forma de calor.

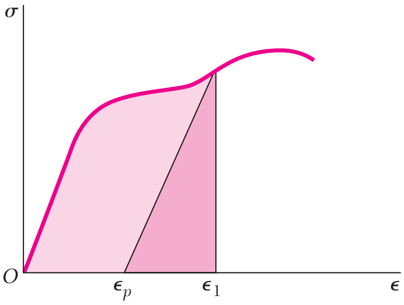


Figura 11.6

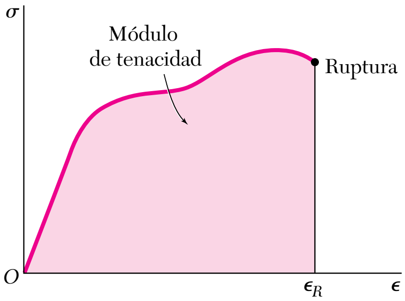


Figura 11.7

El valor de la densidad de energía de deformación obtenida haciendo $\epsilon_1 = \epsilon_R$ en la ecuación (11.4), en donde ϵ_R es la deformación de ruptura, se conoce como *módulo de tenacidad* del material. Es igual al área situada bajo el diagrama esfuerzo-deformación total (figura 11.7) y representa la energía por unidad de volumen requerida para causar la ruptura. Es claro que la tenacidad del material se relaciona con la ductilidad y con la resistencia última (véase sección 2.3), y que la capacidad de una estructura para resistir un impacto depende de la tenacidad del material usado (figura 11.8).

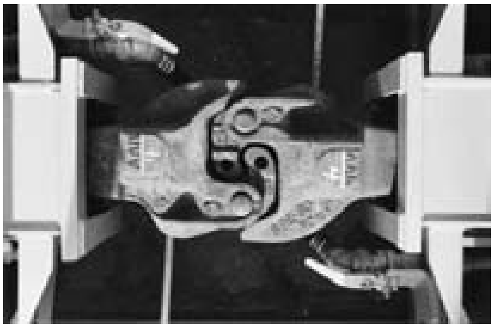


Figura 11.8 El mecanismo de acoplamiento de los ferrocarriles está hecho de acero dúctil con un alto módulo de tenacidad.

Si el esfuerzo σ_x permanece dentro del límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke y puede escribirse

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{11.5}$$

Sustituyendo σ_x de (11.5) en (11.4) se tiene

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x \, d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2} \tag{11.6}$$

o, usando la ecuación (11.5) para expresar ϵ_1 en función de σ_1,

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11.7}$$

El valor u_Y de la densidad de energía de deformación obtenida haciendo $\sigma_1 = \sigma_Y$ en la ecuación (11.7), donde σ_Y es el límite de cedencia, se llama *módulo de resiliencia* del material. Se tiene

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \tag{11.8}$$

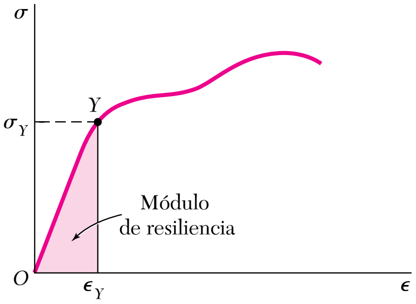


Figura 11.9

El módulo de resiliencia es igual al área situada bajo la porción recta *OY* del diagrama esfuerzo-deformación (figura 11.9) y representa la energía por unidad de volumen que el material puede absorber sin fluir. La capacidad de una estructura para soportar una carga de impacto sin deformarse en forma permanente, depende claramente de la resiliencia del material utilizado.

Como el módulo de tenacidad y el de resiliencia representan valores característicos de la densidad de energía de deformación del material considerado, ambos se expresan en $\mathrm{J/m^3}$, si se usan unidades SI, o $\mathrm{in.\cdot lb/in.^3}$ en unidades americanas.†

11.4 ENERGÍA ELÁSTICA DE DEFORMACIÓN PARA ESFUERZOS NORMALES

Como la barra de la sección precedente se sometió a esfuerzos σ_x uniformemente distribuidos, la densidad de energía de deformación era constante y pudo definirse como la razón U/V entre la energía de deformación U y el volumen V de la barra. En un elemento estructural o parte de máquina con distribución de esfuerzos no uniforme, la densidad u se define considerando un pequeño elemento de material de volumen ΔV y escribiendo

$$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

o

$$\boxed{u = \frac{dU}{dV}} \tag{11.9}$$

La expresión obtenida para u en la sección 11.3 en función de σ_x y ϵ_x permanece válida, es decir, todavía se tiene

$$u = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x \, d\epsilon_x \tag{11.10}$$

pero el esfuerzo σ_x, la deformación ϵ_x, y la densidad de energía de deformación u variarán generalmente en los diversos puntos.

Para valores de σ_x que estén dentro del límite de proporcionalidad, se utiliza $\sigma_x = E\epsilon_x$ en la ecuación (11.10) y se escribe

$$u = \frac{1}{2}E\epsilon_x^2 = \frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} \tag{11.11}$$

El valor de la energía de deformación U de un cuerpo sometido a esfuerzos normales uniaxiales se obtiene reemplazando u de la ecuación (11.11) en la ecuación (11.9) e integrando

$$\boxed{U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV} \tag{11.12}$$

Esta expresión es válida sólo para deformaciones elásticas y se conoce como *energía de deformación elástica* del cuerpo.

---

† Sin embargo, refiriéndose a las notas de la página 672 se observa que el módulo de tenacidad y el de resiliencia pudieron expresarse en las mismas unidades del esfuerzo.

Energía de deformación bajo carga axial. Recuerde, de la sección 2.17, que cuando una barra se somete a carga axial céntrica, se supone que los esfuerzos normales σ_x están uniformemente distribuidos en cualquier sección transversal. Si A es el área de la sección a una distancia x del extremo B (figura 11.10), y P la fuerza interna en esa sección, se escribe $\sigma_x = P/A$. Sustituyendo σ_x en la ecuación (11.12),

$$U = \int \frac{P^2}{2EA^2} dV$$

o, haciendo $dV = A\,dx$,

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx} \qquad (11.13)$$

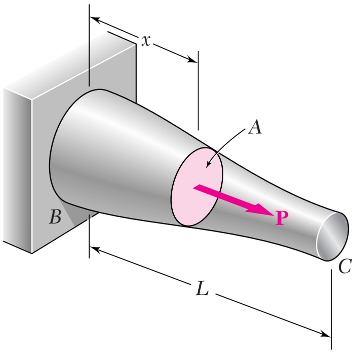


Figura 11.10

En el caso de una barra de sección constante sometida en sus extremos a fuerzas iguales y opuestas de magnitud P (figura 11.11), la ecuación (11.13) produce:

$$\boxed{U = \frac{P^2 L}{2AE}} \qquad (11.14)$$

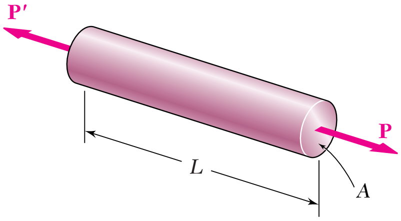


Figura 11.11

EJEMPLO 11.01

Una barra consta de dos porciones BC y CD hechas del mismo material y con longitud igual, pero de secciones diferentes (figura 11.12). Determine la energía de deformación de la barra cuando se somete a una carga axial céntrica **P**; exprese el resultado en función de P, L, E, el área A de la sección transversal de la porción CD y la relación n de los dos diámetros.

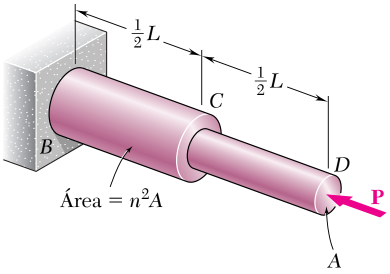


Figura 11.12

Se utiliza la ecuación (11.14) para calcular la energía de deformación de cada porción y se suman las expresiones obtenidas:

$$U_n = \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2AE} + \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2(n^2A)E} = \frac{P^2L}{4AE}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

o

$$U_n = \frac{1+n^2}{2n^2}\frac{P^2L}{2AE} \qquad (11.15)$$

Al verificar que para $n = 1$, se tiene

$$U_1 = \frac{P^2L}{2AE}$$

que es la expresión dada en la ecuación (11.14) para una barra de longitud L y sección transversal uniforme de área A. También se observa que para $n > 1$, se tiene $U_n < U_1$; por ejemplo, cuando $n = 2$, resulta $U_2 = \left(\frac{5}{8}\right)U_1$. Puesto que el máximo esfuerzo se produce en la porción CD de la barra y es igual a $\sigma_{\text{máx}} = P/A$, se sigue que, para un esfuerzo permisible dado, aumentar el diámetro de BC lleva a una *rebaja* de la capacidad de la barra para absorber energía. Deben evitarse los cambios innecesarios en la sección transversal en el diseño de elementos que puedan estar sometidos a cargas, como cargas de impacto, donde la capacidad de absorción de la energía del elemento es crítica.

EJEMPLO 11.02

Dos barras del mismo material y la misma sección transversal de área A (figura 11.13) sostienen una carga **P** en el punto B. Determine la energía de deformación del sistema.

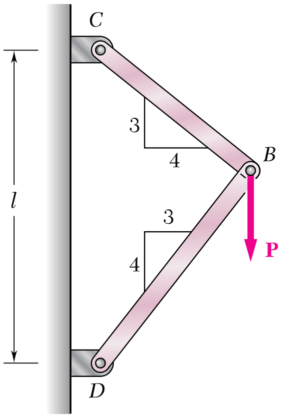


Figura 11.13

Si las fuerzas en los elementos BC y BD son F_{BC} y F_{BD}, respectivamente, y recordando la ecuación (11.14), la energía de deformación del sistema se expresa como

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE} \tag{11.16}$$

Pero en la figura 11.13 se observa que

$$BC = 0.6l \qquad BD = 0.8l$$

y en el diagrama de cuerpo libre del pasador B y el correspondiente triángulo de fuerza (figura 11.14), que

$$F_{BC} = +0.6P \qquad F_{BD} = -0.8P$$

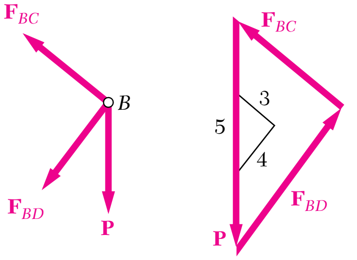


Figura 11.14

Sustituyendo en la ecuación (11.16):

$$U = \frac{P^2l[(0.6)^3 + (0.8)^3]}{2AE} = 0.364\frac{P^2l}{AE}$$

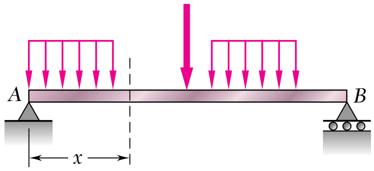


Figura 11.15

Energía de deformación en flexión. Considere la viga AB, sometida a una carga dada (figura 11.15), y sea M el momento flector a una distancia x del extremo A. Despreciando por el momento el efecto de fuerza cortante y teniendo en cuenta sólo $\sigma_x = My/I$, se sustituye esta expresión en la ecuación (11.12) y se escribe

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2y^2}{2EI^2} dV$$

Haciendo $dV = dA\,dx$, en donde dA es un elemento del área transversal y recordando que $M^2/2EI^2$ es función de x únicamente, se tiene

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int y^2\,dA\right)dx$$

Recordando que la integral entre paréntesis es el momento de inercia I de la sección transversal alrededor de su eje neutro, se escribe

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx} \tag{11.17}$$

EJEMPLO 11.03

Determine la energía de deformación de la viga prismática volada *AB* (figura 11.16), teniendo en cuenta sólo el efecto de los esfuerzos normales.

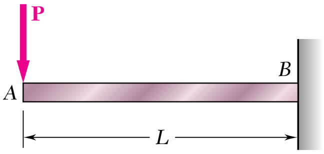


Figura 11.16

El momento flector *M* a una distancia *x* del extremo *A* es $M = -Px$. Sustituyendo en la ecuación (11.17),

$$U = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

11.5 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA PARA ESFUERZOS CORTANTES

Cuando un material está sometido a esfuerzo cortante plano τ_{xy}, la densidad de energía de deformación en un punto dado se expresa como

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} \qquad (11.18)$$

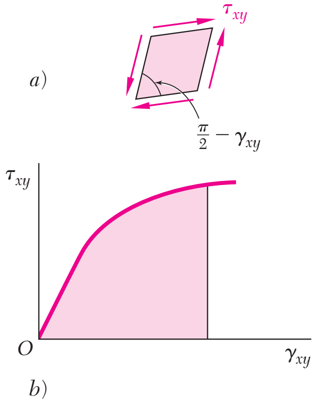


Figura 11.17

en donde γ_{xy} es la deformación cortante correspondiente a τ_{xy} (figura 11.17*a*). Se observa que *u* es el área situada bajo el diagrama esfuerzo cortante-deformación (figura 11.17*b*).

Para valores de τ_{xy} dentro del límite proporcional, se tiene $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, siendo *G* el módulo de rigidez del material. Sustituyendo τ_{xy} en la ecuación (11.18) e integrando,

$$u = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad (11.19)$$

El valor de la energía de deformación *U* del cuerpo sometido a esfuerzos cortantes planos se obtiene recordando, de la sección 11.4, que

$$u = \frac{dU}{dV} \qquad (11.9)$$

Sustituyendo por *u*, de la ecuación (11.19), en la ecuación (11.9) e integrando ambos miembros

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G}dV \qquad (11.20)$$

Esta expresión define la deformación elástica asociada con las deformaciones de fuerza cortante del cuerpo. De la misma manera que la expresión obtenida en la sección 11.4 para esfuerzos normales uniaxiales, ésta sólo es válida para deformaciones elásticas.

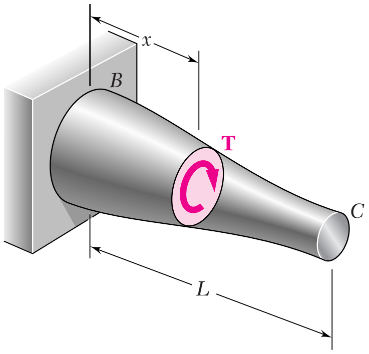


Figura 11.18

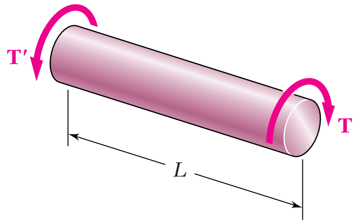


Figura 11.19

Energía de deformación en la torsión. Considere a un eje *BC* de longitud *L* sometido a uno o varios momentos de torsión. Si *J* es el momento polar de inercia de la sección transversal situada a una distancia *x* de *B* (figura 11.18) y *T* el par de deformación interno en esa sección, los esfuerzos cortantes en la sección son $\tau_{xy} = T\rho/J$. Sustituyendo por τ_{xy} en la ecuación (11.20),

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2} dV$$

Haciendo $dV = dA\,dx$, en donde dA es un elemento del área transversal, y observando que $T^2/2GJ^2$ es función de x únicamente, se tiene

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int \rho^2\,dA\right)dx$$

Recordando que la integral entre paréntesis es el momento polar de inercia *J* de la sección transversal, resulta

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \tag{11.21}$$

En el caso de un eje de sección transversal uniforme, sometido en sus extremos a pares *T* iguales y opuestos (figura 11.19), la ecuación (11.21) da

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.22}$$

EJEMPLO 11.04

Un eje circular consta de dos porciones *BC* y *CD* de longitud igual y del mismo material, pero de diferentes secciones transversales (figura 11.20). Determine la energía de deformación del eje cuando se somete a un par de torsión **T** en el extremo *D*, expresando el resultado en función de *T*, *L*, *G*, el momento polar de inercia *J* de la menor sección y la relación *n* de los dos diámetros.

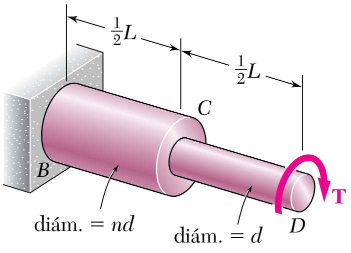


Figura 11.20

Se usa la ecuación (11.22) para calcular la energía de deformación de cada porción del eje y se suma lo obtenido. Observando que el momento polar de inercia de la parte *BC* es igual a n^4J, se escribe

$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2L}{4GJ}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$$

o

$$U_n = \frac{1 + n^4}{2n^4}\frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.23}$$

Se verifica que, para $n = 1$,

$$U_1 = \frac{T^2L}{2GJ}$$

que es la expresión dada en la ecuación (11.22) para un eje de longitud *L* y sección transversal constante. También se observa que, cuando $n > 1$, $U_n < U_1$; y cuando $n = 2$, $U_2 = \left(\frac{17}{32}\right) U_1$. Como el esfuerzo cortante máximo ocurre en la porción *CD* del eje y es proporcional al par de torsión *T*, se nota que para un esfuerzo permisible dado, como ocurrió antes en el caso de la carga axial de una barra, si se aumenta el diámetro de *BC* hay una *disminución* de la capacidad del eje para absorber energía.

Energía de deformación bajo carga transversal. En la sección 11.4 se obtuvo una expresión para la energía de deformación de una viga bajo carga transversal. Sin embargo, al deducir esa expresión se tuvo en cuenta sólo el efecto de los esfuerzos normales debido a flexión y se despreció el efecto de los esfuerzos cortantes. En el ejemplo 11.05 se tomarán en cuenta ambos tipos de esfuerzos.

EJEMPLO 11.05

Determine la energía de deformación del voladizo rectangular *AB* (figura 11.21) teniendo en cuenta tanto los esfuerzos normales como los esfuerzos cortantes.

Recuerde, del ejemplo 11.03, que la energía de deformación debido a σ_x es

$$U_\sigma = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

Para hallar la energía U_τ debida a los esfuerzos cortantes τ_{xy}, se retoma la ecuación (6.9) de la sección 6.4 y se tiene que, para una viga de sección rectangular de ancho b y profundidad h,

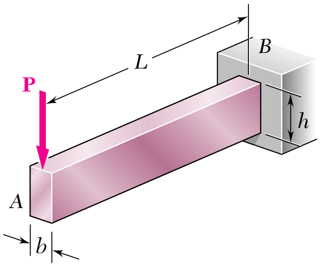


Figura 11.21

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Sustituyendo τ_{xy} en la ecuación (11.20),

$$U_\tau = \frac{1}{2G}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\right)^2 \int \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

o, haciendo $dV = b\,dy\,dx$ y simplificando

$$U_\tau = \frac{9P^2}{8Gbh^2}\int_{-c}^{c}\left(1 - 2\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^4}{c^4}\right)dy \int_0^L dx$$

Integrando y recordando que $c = h/2$, se tiene

$$U_\tau = \frac{9P^2L}{8Gbh^2}\left[y - \frac{2}{3}\frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{y^5}{c^4}\right]_{-c}^{+c} = \frac{3P^2L}{5Gbh} = \frac{3P^2L}{5GA}$$

La energía de deformación total de la viga es

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5GA}$$

o, como $I/A = h^2/12$ y factorizando U_σ,

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = U_\sigma\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) \qquad (11.24)$$

Recordando de la sección 2.14 que $G \geq E/3$, se concluye que el paréntesis en la expresión obtenida es menor que $1 + 0.9(h/L)^2$ y que el error relativo es menor que $0.9(h/L)^2$ cuando se desprecia el efecto de la fuerza cortante. Para una viga con una relación h/L menor que $\frac{1}{10}$, el error porcentual es menor que 0.9%. Es, por tanto, costumbre en la práctica de la ingeniería despreciar el efecto de la fuerza cortante al calcular la energía de deformación en vigas esbeltas.

11.6 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN PARA UN ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS

En las secciones precedentes se estudió la energía de deformación de un cuerpo tanto en estado de esfuerzo uniaxial (sección 11.4) como en estado de esfuerzo cortante plano (sección 11.5). En el caso de un cuerpo en estado general de esfuerzo caracterizado por seis componentes del esfuerzo σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}, la densidad de energía de deformación se obtiene, junto con otras cuatro expresiones que se hallan permutando los subíndices, sumando la expresión dada en las ecuaciones (11.10) y (11.18).

En el caso de la deformación elástica de un cuerpo isotrópico, cada una de las seis relaciones esfuerzo-deformación incluidas es lineal, y la densidad de energía de deformación se expresa como:

$$u = \tfrac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{11.25}$$

Recordando las relaciones (2.38) obtenidas en la sección 2.14 y sustituyendo para las componentes de deformación en (11.25), se tiene, para el estado más general de esfuerzo en un punto determinado de un cuerpo elástico isotrópico,

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{11.26}$$

Si los ejes principales en un punto dado se usan como ejes coordenados, los esfuerzos cortantes se anulan y la ecuación (11.26) se reduce a

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \tag{11.27}$$

donde σ_a, σ_b y σ_c son los esfuerzos principales en el punto dado.

Recuerde, de la sección 7.7, que uno de los criterios usados para predecir si un estado de esfuerzo dado hará fluir un material dúctil, llamado el criterio de la máxima energía de distorsión, se basa en el cálculo de la energía por unidad de volumen asociado con la distorsión, o cambio en la forma de ese material. Se intentará, entonces, dividir la densidad de energía de deformación u en un punto dado en dos partes; una, u_v, asociada con un cambio de volumen del material en ese punto, y otra parte u_d, asociada con la distorsión o cambio de forma del material, en el mismo punto. Se escribe

$$u = u_v + u_d \tag{11.28}$$

Para calcular u_v y u_d, se introducirá el concepto de *valor medio* $\overline{\sigma}$ de los esfuerzos principales en el punto considerado,

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}{3} \tag{11.29}$$

y

$$\sigma_a = \overline{\sigma} + \sigma_a' \qquad \sigma_b = \overline{\sigma} + \sigma_b' \qquad \sigma_c = \overline{\sigma} + \sigma_c' \tag{11.30}$$

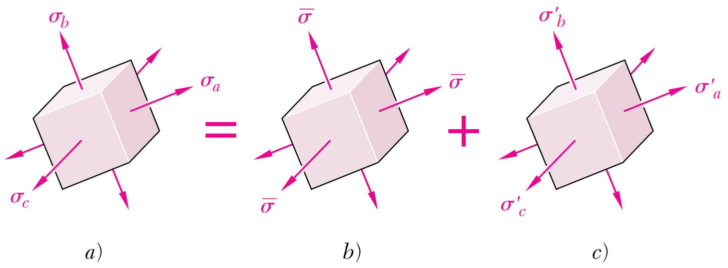


Figura 11.22

Así, el estado dado de esfuerzos (figura 11.22*a*) puede obtenerse por suposiciones de los estados de esfuerzo de las figuras 11.22*b* y *c*. Note que el estado de esfuerzo de la figura 11.22*b* tiende a cambiar el volumen del elemento de material, pero no su forma, ya que todas las caras están sometidas al mismo esfuerzo $\overline{\sigma}$. Por otra parte, se tiene de las ecuaciones (11.29) y (11.30) que

$$\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c = 0 \tag{11.31}$$

lo que indica que algunos de los esfuerzos mostrados en la figura 11.22*c* son tensiones y otros son compresiones. En consecuencia, este estado de esfuerzo tiende a cambiar la forma del elemento. Sin embargo, no tiende a cambiar su volumen. Ciertamente, en la ecuación (2.31) de la sección 2.13, se notó que la dilatación e (cambio de volumen por unidad de volumen) causada por este estado de esfuerzos es

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c)$$

o, $e = 0$, a la luz de la ecuación (11.31). De estas observaciones se concluye que la porción u_v de la densidad de energía de deformación debe asociarse con el estado de esfuerzos de la figura 11.22*b*, mientras que la porción u_d lo está con el estado de la figura 11.22*c*.

Se sigue que la porción u_v de la densidad de energía de deformación, correspondiente a un cambio en volumen del elemento, puede obtenerse sustituyendo $\overline{\sigma}$ por cada uno de los esfuerzos principales en la ecuación (11.27). Se tiene

$$u_v = \frac{1}{2E}\left[3\overline{\sigma}^2 - 2\nu(3\overline{\sigma}^2)\right] = \frac{3(1 - 2\nu)}{2E}\overline{\sigma}^2$$

o, retomando la ecuación (11.29),

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \tag{11.32}$$

Para obtener la porción u_d de la densidad de energía de deformación, correspondiente a la distorsión del elemento, se resuelve la ecuación (11.28) para u_d y se sustituye por u y u_v en las ecuaciones (11.27) y (11.32), respectivamente. Se escribe

$$u_d = u - u_v = \frac{1}{6E}\left[3(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2) - 6\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a) - (1 - 2\nu)(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2\right]$$

Desarrollando el cuadrado y reordenando los términos,

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_a^2 - 2\sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) + (\sigma_b^2 - 2\sigma_b\sigma_c + \sigma_c^2) + (\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_a + \sigma_a^2)\right]$$

Puesto que cada paréntesis interior es un cuadrado perfecto y recordando, en la ecuación (2.43) de la sección 2.15, que el primer coeficiente es igual a $1/12G$, se obtiene la siguiente expresión para la porción u_d de la densidad de energía de deformación, es decir, para la energía de distorsión por unidad de volumen,

$$u_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2\right] \tag{11.33}$$

En el caso de *esfuerzo plano* y suponiendo que el eje c es perpendicular al plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_c = 0$ y la ecuación (11.33) se reduce a

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{11.34}$$

Considerando el caso particular de una probeta de laboratorio sometido a tensiones, se observa que, en la cedencia, $\sigma_a = \sigma_Y$, $\sigma_b = 0$, y por tanto $(u_d)_Y = \sigma_Y^2/6G$. El criterio de la máxima energía de distorsión para esfuerzo plano indica que un estado dado de esfuerzo es seguro siempre que $u_d < (u_d)_Y$ o, sustituyendo u_d de la ecuación (11.34), siempre que

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \tag{7.26}$$

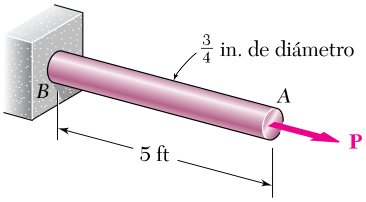
que es la condición mencionada en la sección 7.7 y representada gráficamente por la elipse de la figura 7.41. En el caso de un estado general de esfuerzos, debe usarse la expresión (11.33) obtenida para u_d. El criterio de la máxima energía de distorsión se expresa entonces por la condición

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 < 2\sigma_Y^2 \tag{11.35}$$

que indica que un estado de esfuerzo dado es seguro si el punto de coordenadas σ_a, σ_b, σ_c se localiza dentro de la superficie definida por la ecuación

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 = 2\sigma_Y^2 \tag{11.36}$$

Esta superficie es un cilindro de radio $\sqrt{2/3}\,\sigma_Y$ con eje de simetría que forma ángulos iguales con los tres ejes principales de esfuerzo.



PROBLEMA MODELO 11.1

Durante una operación industrial de rutina, la barra *AB* debe adquirir una energía de deformación elástica de 120 in. · lb. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el límite de cedencia requerido del acero, si el factor de seguridad contra la deformación permanente es cinco.

SOLUCIÓN

Factor de seguridad. Como se requiere un factor de seguridad de cinco, la barra debe diseñarse para una energía de deformación de

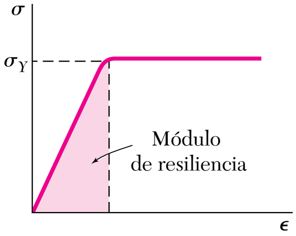
$$U = 5(120 \text{ in.} \cdot \text{lb}) = 600 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Densidad de energía de deformación. El volumen de la barra es

$$V = AL = \frac{\pi}{4}(0.75 \text{ in.})^2(60 \text{ in.}) = 26.5 \text{ in.}^3$$

Como la barra es de sección constante, la densidad de energía de deformación es

$$u = \frac{U}{V} = \frac{600 \text{ in.} \cdot \text{lb}}{26.5 \text{ in.}^3} = 22.6 \text{ in.} \cdot \text{lb/in.}^3$$

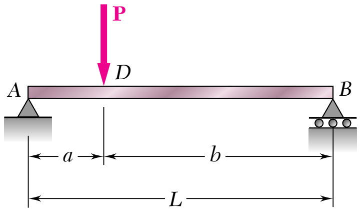


Límite de cedencia. Recuerde que el módulo de resiliencia es igual a la densidad de energía de deformación cuando el máximo esfuerzo es igual a σ_Y. Usando la ecuación (11.8) se escribe:

$$u = \frac{\sigma_Y^2}{2E}$$

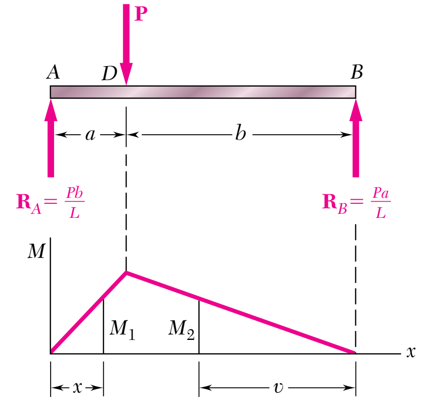
$$22.6 \text{ in.} \cdot \text{lb/in.}^3 = \frac{\sigma_Y^2}{2(29 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \sigma_Y = 36.2 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Comentario. Es importante notar que, como las cargas de energía no están relacionadas linealmente con los esfuerzos que producen, los factores de seguridad asociados con cargas de energía deben aplicarse a las cargas de energía y no a los esfuerzos.



PROBLEMA MODELO 11.2

a) Considerando sólo el efecto de esfuerzos normales debidos a la flexión, determine la energía de deformación de la viga prismática *AB* para la carga mostrada en la figura. *b*) Evalúe la energía de deformación, sabiendo que la viga es una W10 × 45, $P = 40$ kips, $L = 12$ ft, $a = 3$ ft, $b = 9$ ft y $E = 29 \times 10^6$ psi.



SOLUCIÓN

Momento flector. Usando el diagrama de cuerpo libre de toda la viga, se determinan las reacciones

$$\mathbf{R}_A = \frac{Pb}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{Pa}{L}\uparrow$$

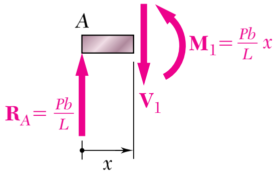
Para la porción *AD* de la viga, el momento flector es

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

Para la porción *DB*, se observa que el momento flector a una distancia *v* del extremo *B* es

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

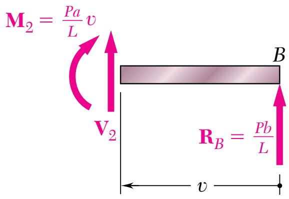
Desde *A* a *D*:



***a*) Energía de deformación.** Puesto que la energía de deformación es una cantidad escalar, se añade la energía de deformación de la porción *AD* a la de la porción *DB* para obtener la energía de deformación total de la viga. Usando la ecuación (11.17),

$$\begin{aligned} U &= U_{AD} + U_{DB} \\ &= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}dv \\ &= \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}v\right)^2 dv \\ &= \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a + b) \end{aligned}$$

Desde *B* a *D*:



o, como $(a + b) = L$,

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL} \blacktriangleleft$$

***b*) Cálculo de la energía de deformación.** El momento de inercia de una sección de acero laminado W10 × 45 se obtiene del apéndice C y los datos dados se repiten usando unidades de kips y pulgadas.

$P = 40$ kips $\qquad L = 12$ ft $= 144$ in.

$a = 3$ ft $= 36$ in. $\qquad b = 9$ ft $= 108$ in.

$E = 29 \times 10^6$ psi $= 29 \times 10^3$ ksi $\qquad I = 248$ in.^{4}

Sustituyendo en la expresión para *U*,

$$U = \frac{(40\text{ kips})^2(36\text{ in.})^2(108\text{ in.})^2}{6(29 \times 10^3\text{ ksi})(248\text{ in.}^4)(144\text{ in.})} \qquad U = 3.89\text{ in.} \cdot \text{kips} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

11.1 Determine el módulo de resiliencia para las siguientes aleaciones de aluminio:

a) 1100-H14: $E = 70$ GPa $\sigma_Y = 55$ MPa
b) 2014-T6 $E = 72$ GPa: $\sigma_Y = 220$ MPa
c) 6061-T6 $E = 69$ GPa: $\sigma_Y = 150$ MPa

11.2 Determine el módulo de resiliencia para cada uno de los siguientes grados de acero estructural:

a) ASTM A709 Grade 50: $\sigma_Y = 50$ ksi
b) ASTM A913 Grade 65: $\sigma_Y = 65$ ksi
c) ASTM A709 Grade 100: $\sigma_Y = 100$ ksi

11.3 Determine el módulo de resiliencia para las siguientes aleaciones:

a) Titanio: $E = 16.5 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 120$ ksi
b) Magnesio: $E = 6.5 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 29$ ksi
c) Cuproníquel (endurecido) $E = 20 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 16$ ksi

11.4 Determine el módulo de resiliencia para los siguientes metales:

a) Acero inoxidable
AISI 302 (endurecido): $E = 190$ GPa $\sigma_Y = 260$ MPa
b) Acero inoxidable 2014-T6
AISI 302 (laminado en frío): $E = 190$ GPa $\sigma_Y = 520$ MPa
c) Hierro fundido maleable $E = 165$ GPa $\sigma_Y = 230$ MPa

11.5 El diagrama esfuerzo-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante la prueba de una probeta de acero estructural sometida a tensión. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el módulo de resiliencia del acero, *b*) el módulo de tenacidad del acero.

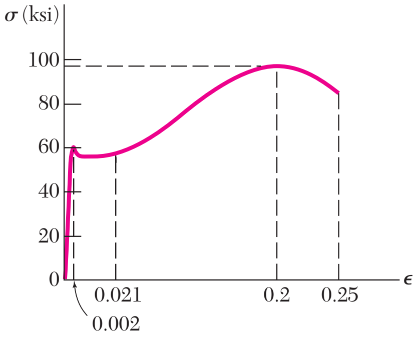


Figura P11.5

11.6 El diagrama esfuerzo-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante la prueba de una aleación de aluminio sometida a tensión. Si $E = 72$ GPa, *a*) determine el módulo de resiliencia de la aleación, *b*) el módulo de tenacidad de la aleación.

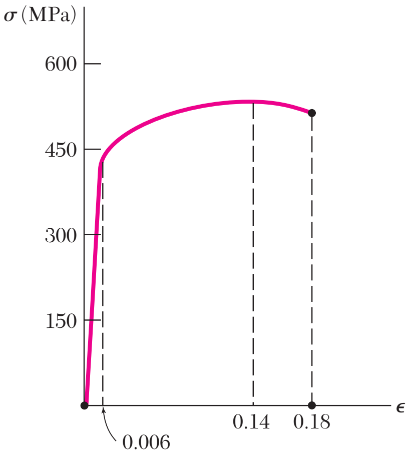


Figura P11.6

11.7 El diagrama carga-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante una prueba a tensión de una muestra de acero estructural. Si el área transversal de la probeta era de 250 mm^2, y la deformación se midió con una galga de 500 mm de longitud, determine *a*) el módulo de resiliencia del acero, *b*) el módulo de tenacidad del acero.

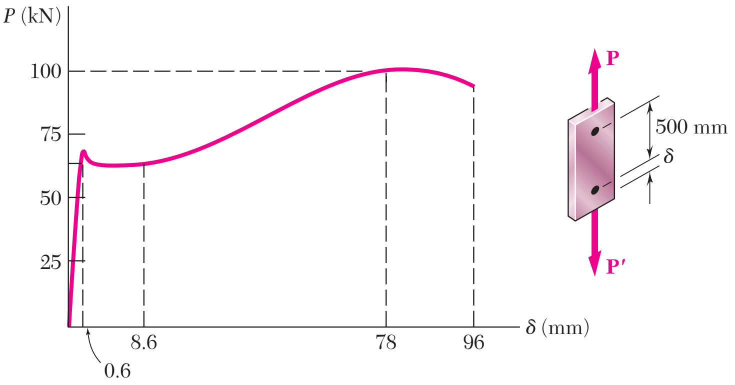


Figura P11.7

11.8 El diagrama carga-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante una prueba a tensión de una barra de aleación de aluminio de 0.875 in. de diámetro. Si se sabe que la deformación se midió con una galga de 15 in. de longitud, determine *a*) el módulo de resiliencia de la aleación, *b*) el módulo de tenacidad de la aleación.

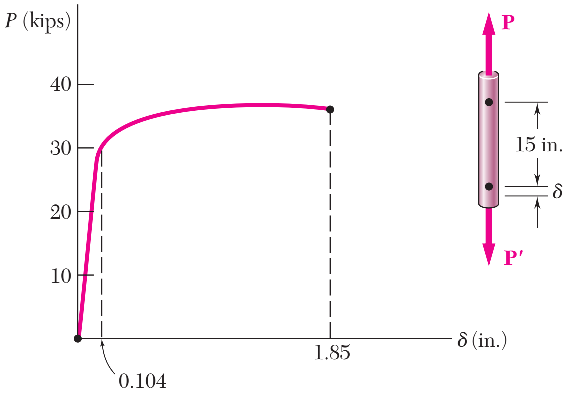


Figura *P11.8*

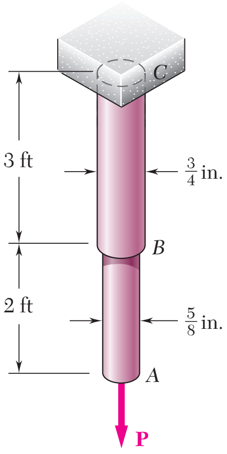


Figura P11.9

11.9 Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar *a*) la energía de deformación de la barra de acero *ABC* cuando $P = 8$ kips, *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en las partes *AB* y *BC* de la barra.

11.10 Utilice $E = 200$ GPa para determinar *a*) la energía de deformación de la barra de acero *ABC* cuando $P = 25$ kN, *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en los tramos *AB* y *BC* de la barra.

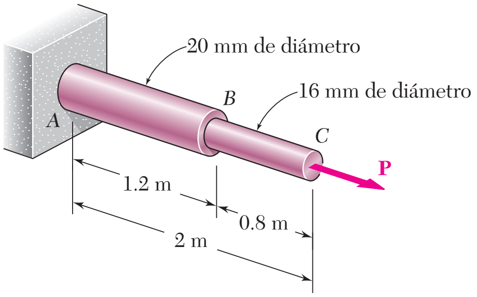

20 mm de diámetro
16 mm de diámetro
A
B
C
P
1.2 m
0.8 m
2 m

Figura P11.10

11.11 Un tubo de aluminio de 30 in. de longitud cuya sección transversal tiene una superficie de 1.85 in.^{2} está soldado a un apoyo fijo *A* y a una tapa rígida *B*. La barra de acero *EF*, de 0.75 in. de diámetro, está soldada a la tapa *B*. Si se sabe que el módulo de elasticidad es de 29×10^6 psi para el acero y de 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine *a*) la energía de deformación total del sistema cuando $P = 10$ kips y *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en el tubo *CD* y en la barra *EF*.

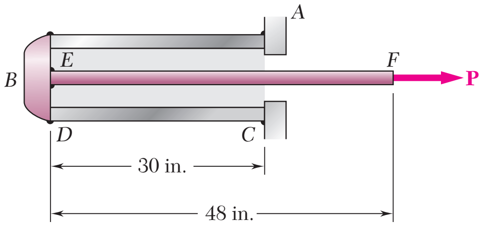

A
E
F
P
B
D
C
30 in.
48 in.

Figura P11.11

11.12 La barra *AB* está hecha de un acero para el cual la resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 450$ MPa y $E = 200$ GPa; la barra *BC* es de una aleación de aluminio para la que $\sigma_Y = 280$ MPa y $E = 73$ GPa. Determine la máxima energía de deformación que puede adquirir la barra compuesta *ABC* sin que se cause una deformación permanente.

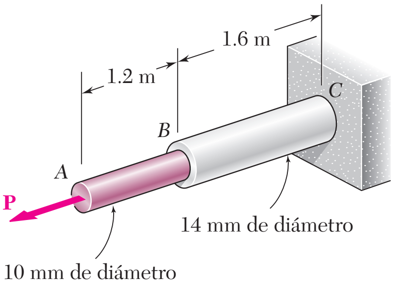

1.6 m
1.2 m
C
B
A
P
14 mm de diámetro
10 mm de diámetro

Figura *P11.12*

11.13 Las barras *AB* y *BC* están construidas de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 300$ MPa y su módulo de elasticidad es $E = 200$ GPa. Determine la máxima energía de deformación que puede adquirir el ensamble sin causar una deformación permanente cuando la longitud *a* de la barra *AB* es *a*) 2 m, *b*) 4 m.

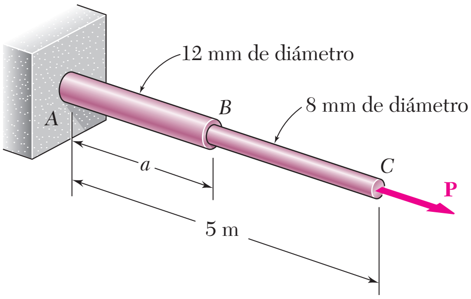

12 mm de diámetro
B
8 mm de diámetro
A
a
C
P
5 m

Figura P11.13

11.14 La barra BC está hecha de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 300$ MPa y su módulo de elasticidad es $E = 200$ GPa. Si se sabe que la barra puede adquirir una energía de deformación de 10 J cuando se aplica la carga axial **P**, determine el diámetro de la barra para el cual se satisface un factor de seguridad de seis respecto de la deformación permanente.

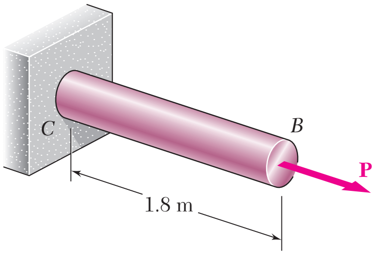


Figura *P11.14*

11.15 Use $E = 10.6 \times 10^6$ psi para encontrar por métodos aproximados la máxima energía de deformación que puede adquirir la barra de aluminio mostrada, si el esfuerzo permisible normal es de $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi.

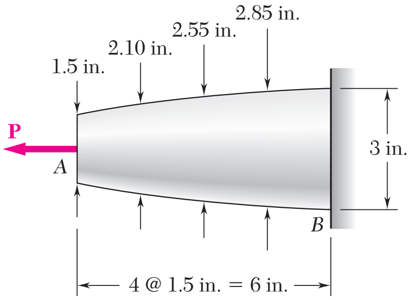


Figura P11.15

11.16 Demuestre por integración que la energía de deformación de la barra ahusada AB es

$$U = \frac{1}{4}\frac{P^2L}{EA_{\text{mín}}}$$

donde $A_{\text{mín}}$ es el área de la sección transversal en el extremo B.

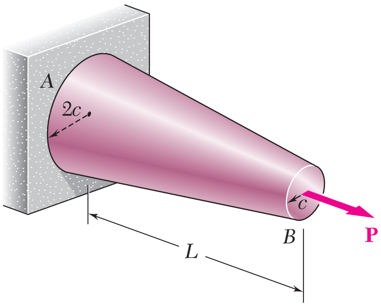


Figura P11.16

11.17 a 11.20 En las armaduras que se muestran en las figuras, todos los elementos son del mismo material y tienen las secciones transversales indicadas. Determine la energía de deformación de la armadura cuando se aplica la carga **P**.

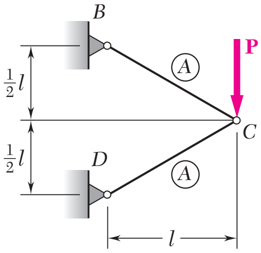

B
$\frac{1}{2}l$
A
P
C
$\frac{1}{2}l$
D
A
l

Figura P11.17

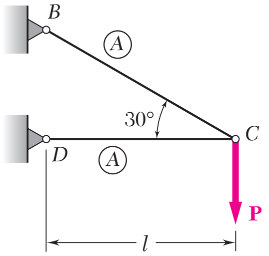


Figura P11.18

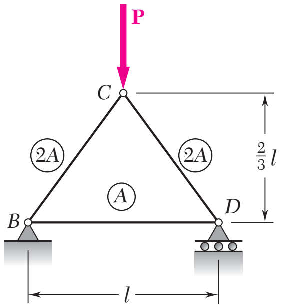

P
C
2A
2A
$\frac{2}{3}l$
A
B
D
l

Figura *P11.19*

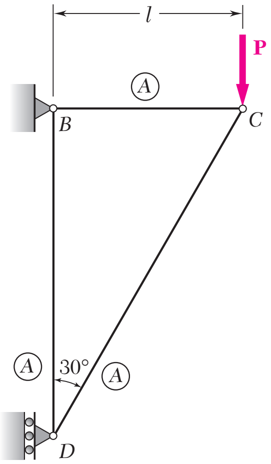

l
P
A
B
C
A
30°
A
D

Figura P11.20

11.21 Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura es de aluminio y tiene el área transversal indicada. Si $E = 72$ GPa, determine la energía de deformación para la carga indicada.

11.22 Retome el problema 11.21, y ahora suponga que la carga de 120 kN se retira.

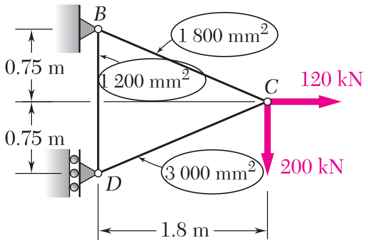

B
1 800 mm²
0.75 m
1 200 mm²
C
120 kN
0.75 m
3 000 mm²
200 kN
D
1.8 m

Figura P11.21 y *P11.22*

11.23 a 11.26 Determine la energía de deformación de la viga prismática AB para las cargas que se muestran en las figuras. Considere sólo el efecto de los esfuerzos normales.

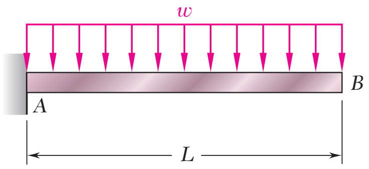


Figura P11.23

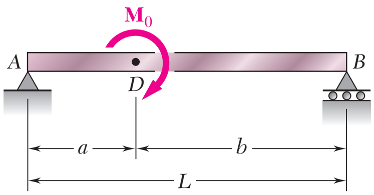


Figura P11.24

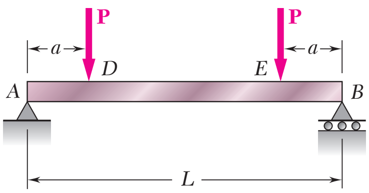


Figura *P11.25*

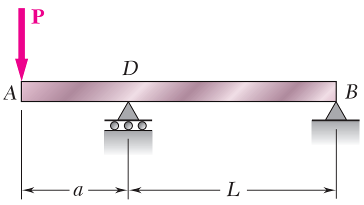


Figura P11.26

11.27 Si se supone que la viga prismática AB tiene una sección transversal rectangular, demuestre que, para la carga dada, el máximo valor de la densidad de energía de deformación es

$$u_{\text{máx}} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

donde U es la energía de deformación y V es el volumen.

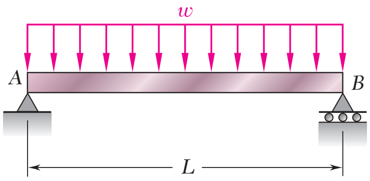


Figura P11.27

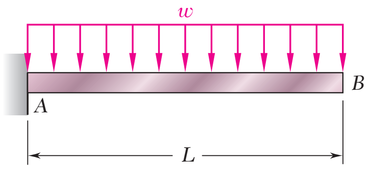


Figura P11.28

11.28 Si se supone que la viga prismática AB tiene una sección transversal rectangular, demuestre que, para la carga dada, el máximo valor de la densidad de energía de deformación en la viga es

$$u_{\text{máx}} = 15\frac{U}{V}$$

donde U es la energía de deformación y V es el volumen.

11.29 y 11.31 Si $E = 200$ GPa, determine la energía de deformación debida a la flexión para la viga de acero y la carga que se muestran en las figuras.

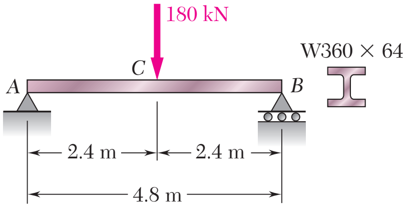

180 kN
W360 × 64
C
A
B
2.4 m
2.4 m
4.8 m

Figura P11.29

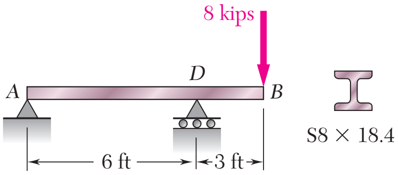

8 kips
D
A
B
S8 × 18.4
6 ft
3 ft

Figura P11.30

11.30 y *11.32* Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi a fin de determinar la energía de deformación debida a la flexión para la viga de acero y la carga que se muestran en las figuras.

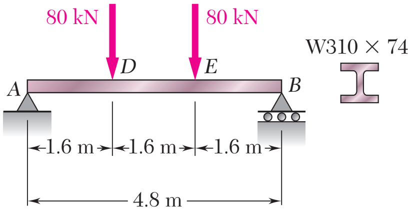

80 kN
80 kN
W310 × 74
D
E
A
B
1.6 m
1.6 m
1.6 m
4.8 m

Figura P11.31

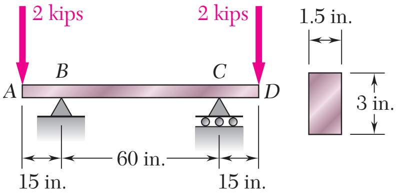

2 kips
2 kips
1.5 in.
B
C
A
D
3 in.
60 in.
15 in.
15 in.

Figura *P11.32*

11.33 El barco en A acaba de iniciar una perforación en el piso oceánico en busca de petróleo a una profundidad de 5 000 ft. El tubo de acero para perforación tiene un diámetro exterior de 8 in. y una pared de espesor uniforme de 0.5 in. Si se sabe que la parte superior del tubo de perforación da dos vueltas completas antes de que la broca en B comience a operar y que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la máxima energía de deformación que adquiere el tubo de perforación.

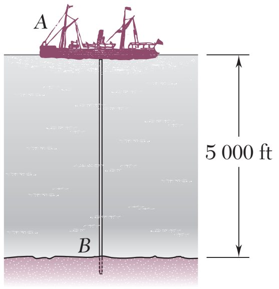


Figura P11.33

11.34 La barra AC está hecha de aluminio y se somete a un par de torsión **T** aplicado en el extremo C. Si se sabe que $G = 73$ GPa y que la porción BC de la barra es hueca y tiene un diámetro interior de 16 mm, determine la energía de deformación de la barra para un esfuerzo cortante máximo de 120 MPa.

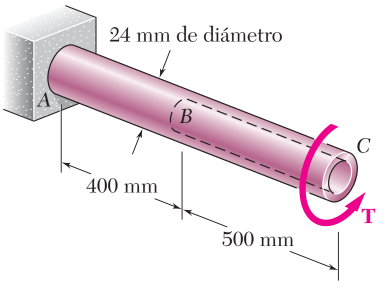


Figura P11.34

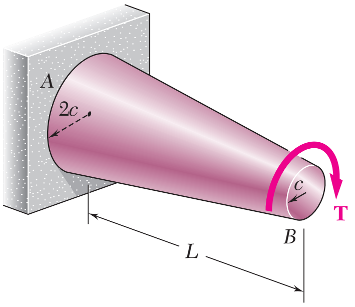


Figura P11.35

11.35 Demuestre por integración que la energía de deformación de la barra ahusada AB es

$$U = \frac{7}{48}\frac{T^2L}{GJ_{\text{mín}}}$$

donde $J_{\text{mín}}$ es el momento polar de inercia en el extremo B.

11.36 El estado que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de latón para el cual $\sigma_Y = 160$ MPa. Use el criterio de la máxima energía de distorsión para determinar si ocurre la cedencia cuando *a*) $\sigma_z = +45$ MPa, *b*) $\sigma_z = -45$ MPa.

11.37 El estado de esfuerzo que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina hecho de latón para el cual $\sigma_Y = 160$ MPa. Use el criterio de máxima energía de distorsión para determinar el rango de valores de σ_z para el que no ocurre la cedencia.

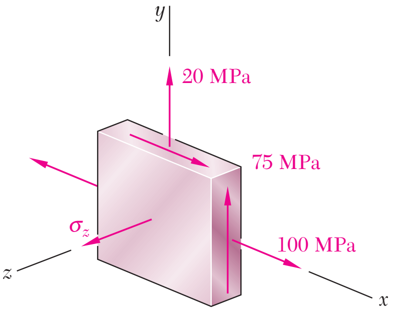


Figura *P11.36* y P11.37

11.38 El estado de esfuerzo que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de un tipo de acero para el que $\sigma_Y = 65$ ksi. Use el criterio de la máxima energía de distorsión para determinar el factor de seguridad asociado con la resistencia a la cedencia cuando *a*) $\sigma_Y = +16$ ksi, *b*) $\sigma_Y = -16$ ksi.

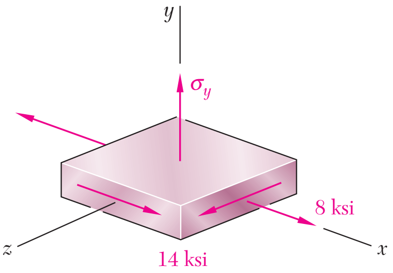


Figura P11.38 y *P11.39*

11.39 El estado de esfuerzo que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de un tipo de acero para el cual $\sigma_Y = 65$ ksi. Utilice el criterio de la máxima energía de distorsión para determinar el rango de valores de σ_y para los que el factor de seguridad asociado con la resistencia a la cedencia es mayor o igual que 2.2.

11.40 Determine la energía de deformación de la viga prismática *AB*, para ello tome en cuenta el efecto de los esfuerzos normal y cortante.

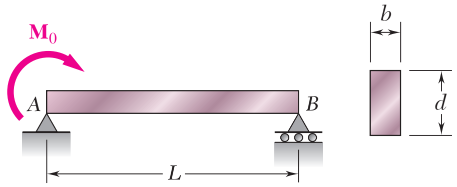
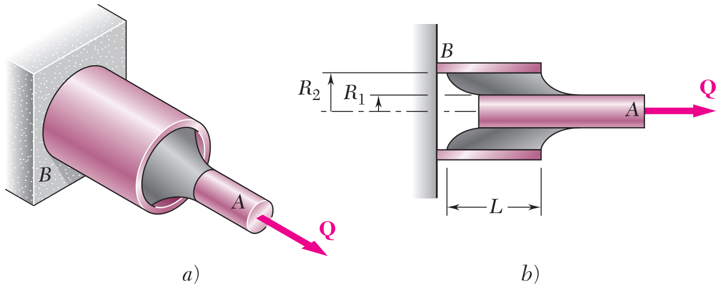


Figura P11.40

***11.41** Un soporte aislante de vibración se construyó al pegar una barra *A* de radio R_1 y un tubo *B* de radio interior R_2 a un cilindro hueco de caucho. Si *G* es el módulo de rigidez del caucho, determine la energía de deformación del cilindro hueco de caucho para la carga mostrada.



a) *b*)

Figura P11.41

11.7 CARGAS DE IMPACTO

Considere una barra BD de sección transversal uniforme que es golpeada en su extremo B por un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0$ (figura 11.23*a*). Puesto que la barra se deforma bajo el impacto (figura 11.23*b*), dentro de ella se desarrollan esfuerzos que alcanzan un máximo valor σ_m. Después de vibrar por un tiempo, la barra volverá al reposo y todos los esfuerzos desaparecerán. Tal secuencia de eventos se define como una *carga de impacto* (figura 11.24).

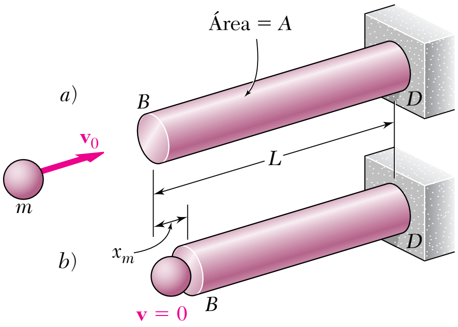


Figura 11.23

Para determinar el valor máximo del esfuerzo σ_m que ocurre en un punto dado de la estructura sometida a carga de impacto, se elaboran algunas hipótesis simplificativas.

Primero se supondrá que la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ del cuerpo que golpea se transfiere íntegramente a la estructura y, en consecuencia, que la energía de deformación U_m correspondiente a la máxima deformación x_m es

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{11.37}$$

Esta hipótesis conduce a los siguientes requisitos:

1. No se disipa energía durante el impacto.
2. El cuerpo que golpea no debe rebotar y retener parte de su energía. Esto, a su vez, requiere que la inercia de la estructura sea despreciable comparada con la inercia del cuerpo que golpea.

En la práctica, ninguno de estos requisitos se satisface, y sólo parte de la energía se transfiere a la estructura. Por tanto, el suponer que toda la energía cinética se transfiere a la estructura lleva a un diseño conservador de ésta.

Se supondrá también que el diagrama esfuerzo-deformación obtenido de una prueba estática del material es válido también bajo cargas de impacto. Así, para una deformación elástica de la estructura, el valor máximo de la energía de deformación puede expresarse como

$$U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E}\,dV \tag{11.38}$$

En el caso de la barra uniforme de la figura 11.23, el máximo esfuerzo σ_m tiene el mismo valor a través de la barra y puede escribirse que $U_m = \sigma_m^2 V/2E$. Resolviendo para σ_m y sustituyendo U_m de la ecuación (11.37)

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_mE}{V}} = \sqrt{\frac{mv_0^2E}{V}} \tag{11.39}$$

Figura 11.24 El vapor eleva rítmicamente un peso dentro de la guía del pilote y luego lo impulsa hacia abajo. Esto envía una gran carga de impacto sobre el pilote, el cual, así, es clavado en el piso.

Observe que lo obtenido eligiendo una barra con un gran volumen V y un módulo de elasticidad E bajo, resultará un valor más pequeño del máximo esfuerzo σ_m para una carga de impacto dada.

En la mayor parte de los problemas, la distribución de esfuerzos no es uniforme y la ecuación (11.39) no se aplica. Conviene entonces determinar la carga estática $\mathbf{P}_m$ que produciría igual energía de deformación que la carga de impacto y calcular de P_m el valor correspondiente σ_m del máximo esfuerzo que ocurre en la estructura.

EJEMPLO 11.06

Un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$ golpea el extremo B de una barra no uniforme BCD (figura 11.25). Si el diámetro de la porción BC es el doble que el de CD, halle el valor máximo σ_m del esfuerzo en la barra.

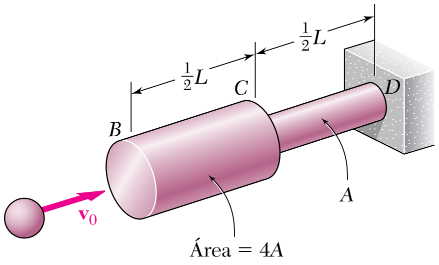


Figura 11.25

Haciendo $n = 2$ en la expresión (11.15) del ejemplo 11.01, se tiene que cuando la barra BCD se somete a una carga estática P_m, su energía de deformación es

$$U_m = \frac{5P_m^2L}{16AE} \tag{11.40}$$

donde A es la sección transversal de la porción CD de la barra. Resolviendo la ecuación (11.40) para P_m, resulta que la carga estática que produce en la barra la misma energía de deformación que la carga de impacto es

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_mAE}{L}}$$

donde U_m es dada por la ecuación (11.37). El mayor esfuerzo se produce en la porción CD de la barra. Dividiendo P_m entre el área A de esa porción, se obtiene

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A} = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_mE}{AL}} \tag{11.41}$$

o, sustituyendo U_m de la ecuación (11.37),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{mv_0^2E}{AL}} = 1.265\sqrt{\frac{mv_0^2E}{AL}}$$

Comparando este valor con el obtenido para σ_m, en el caso de la barra uniforme de la figura 11.24, y haciendo $V = AL$ en la ecuación (11.39), se advierte que el máximo esfuerzo en la barra de sección transversal variable es 26.5% mayor que en la barra uniforme más liviana. En consecuencia, como se observó en el análisis del ejemplo 11.01, aumentar el diámetro de la porción BC de la barra se traduce en un *decremento* de la capacidad de absorción de energía de la barra.

EJEMPLO 11.07

Se deja caer un bloque de peso W desde una altura h sobre el extremo libre de una viga en voladizo AB (figura 11.26). Halle el valor del máximo esfuerzo en la viga.

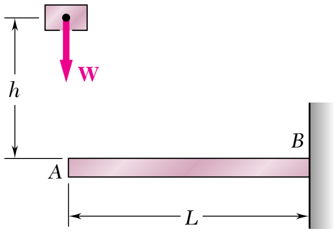


Figura 11.26

Al caer desde la distancia h, la energía potencial Wh del bloque se convierte en energía cinética. Como resultado del impacto, la energía cinética se transforma en energía de deformación. Luego,†

$$U_m = Wh \tag{11.42}$$

Recordando la expresión obtenida para la energía de deformación del voladizo AB del ejemplo 11.03 y despreciando el efecto de la fuerza cortante, se tiene

$$U_m = \frac{P_m^2L^3}{6EI}$$

Resolviendo esta ecuación para P_m, se halla que la fuerza estática que produce en la viga igual energía de deformación es

$$P_m = \sqrt{\frac{6U_mEI}{L^3}} \tag{11.43}$$

El máximo esfuerzo σ_m ocurre en el extremo fijo B y es igual a

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{P_mLc}{I}$$

Sustituyendo P_m de (11.43), se escribe

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_mE}{L(I/c^2)}} \tag{11.44}$$

o, recordando (11.42),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

---

† La distancia total que cae el bloque es $h + y_m$, en donde y_m es la deflexión máxima del extremo de la viga. Por tanto, una expresión más aproximada para U_m (véase problema modelo 11.3) es

$$U_m = W(h + y_m) \tag{11.42$'$}$$

Sin embargo, como $h \gg y_m$, puede despreciarse y_m y utilizarse la ecuación (11.42).

11.8 DISEÑO PARA CARGAS DE IMPACTO

Ahora se compararán los valores obtenidos en la sección precedente para el máximo esfuerzo σ_m, *a*) en la barra de sección transversal uniforme de la figura 11.23, *b*) en la barra de sección transversal del ejemplo 11.06, y *c*) en el voladizo del ejemplo 11.07, suponiendo que el último tiene sección transversal circular de radio *c*.

a) Recuerde primero de la ecuación (11.39) que, si U_m denota la cantidad de energía transferida a la barra como resultado de la carga de impacto, el máximo esfuerzo en la barra de sección transversal uniforme es

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_mE}{V}} \qquad (11.45a)$$

donde *V* es el volumen de la barra.

b) Considerando la barra del ejemplo 11.06 y observando que el volumen de ella es

$$V = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2$$

se sustituye $AL = 2V/5$ en la ecuación (11.41) y se escribe

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_mE}{V}} \qquad (11.45b)$$

c) Por último, puesto que $I = \frac{1}{4}\pi c^4$ para una viga de sección transversal circular, se tiene que

$$L(I/c^2) = L(\tfrac{1}{4}\pi c^4/c^2) = \tfrac{1}{4}(\pi c^2 L) = \tfrac{1}{4}V$$

donde *V* es el volumen de la viga. Sustituyendo en la ecuación (11.44), el máximo esfuerzo en el voladizo del ejemplo 11.07 se expresará como

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_mE}{V}} \qquad (11.45c)$$

Se observa que en cada caso el máximo esfuerzo σ_m es proporcional a la raíz cuadrada del módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen del elemento. Suponiendo que los tres elementos tienen el mismo volumen y son del mismo material, se nota también que, para un valor dado de la energía absorbida, la barra uniforme experimentará el máximo esfuerzo más bajo y el voladizo, el más alto.

Esta observación se explica por el hecho de que, siendo uniforme la distribución de esfuerzos en el caso *a*, la energía de deformación estará distribuida de manera uniforme en la barra. En el caso *b*, en cambio, los esfuerzos en la porción *BC* son sólo 25% de los esfuerzos en la porción *CD*. Esta distribución desigual de esfuerzos y de energía de deformación lleva a un máximo esfuerzo σ_m que es el doble del correspondiente en la barra uniforme. Finalmente, en el caso *c*, donde la viga en voladizo se somete a carga transversal de impacto, los esfuerzos varían linealmente a lo largo de la viga y a través de la sección transversal. La distribución muy irregular de energía de deformación provoca que el máximo esfuerzo σ_m sea 3.46 veces mayor que si el mismo elemento hubiera sido cargado axialmente, como en el caso *a*.

Las propiedades observadas en los tres casos específicos analizados en esta sección son generales y se dan en todo tipo de estructuras y cargas de impacto. Así, se concluye que una estructura diseñada para soportar en forma efectiva una carga de impacto debe

1. Tener un volumen grande.
2. Ser de un material con bajo módulo de elasticidad y alto límite de fluencia.
3. Estar conformada de modo que los esfuerzos se distribuyan lo más uniformemente posible a través de la estructura.

11.9 TRABAJO Y ENERGÍA BAJO UNA CARGA ÚNICA

Cuando se introdujo el concepto de energía de deformación, se analizó el trabajo realizado por una carga axial **P** aplicada al extremo de una barra de sección transversal uniforme (figura 11.1). La energía de deformación de la barra para una elongación x_1 se definió como el trabajo de la carga **P** cuando se incrementó lentamente desde 0 hasta el valor P_1 correspondiente a x_1. Entonces

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \qquad (11.2)$$

En el caso de deformación elástica, el trabajo de la carga **P** y, por tanto, la energía de deformación de la barra era

$$U = \tfrac{1}{2}P_1x_1 \qquad (11.3)$$

Después, en las secciones 11.4 y 11.5, se calculó la energía de deformación de elementos estructurales en diferentes condiciones de carga, hallando la densidad u de energía de deformación en cualquier punto e integrando u en todo el elemento.

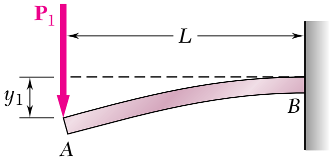


Figura 11.27

Sin embargo, cuando una estructura o elemento se somete a una *carga única concentrada*, es posible usar la ecuación (11.3) para evaluar la energía de deformación elástica, siempre que se conozca la relación carga-deformación. Por ejemplo, en el caso de la viga en voladizo del ejemplo 11.03 (figura 11.27),

$$U = \tfrac{1}{2}P_1y_1$$

y sustituyendo por y_1 el valor de la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D,

$$U = \frac{1}{2}P_1\left(\frac{P_1L^3}{3EI}\right) = \frac{P_1^2L^3}{6EI} \qquad (11.46)$$

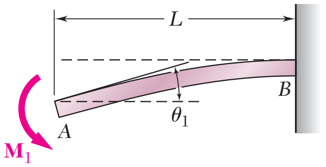


Figura 11.28

Un enfoque similar se puede usar en el caso de energía de deformación de una estructura o elemento sometido a un *par único*. Recordando que el trabajo elemental de un par M es $M\,d\theta$, donde $d\theta$ es un ángulo pequeño, se halla, ya que M y θ están relacionados linealmente, que la energía elástica de deformación de una viga en voladizo AB sometido a un par único $\mathbf{M}_1$ en su extremo A (figura 11.28) puede expresarse como

$$U = \int_0^{\theta_1} M\,d\theta = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \qquad (11.47)$$

en donde θ_1 es la pendiente de la viga en A. Sustituyendo θ_1 por el valor obtenido del apéndice D, se escribe

$$U = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{M_1L}{EI}\right) = \frac{M_1^2L}{2EI} \tag{11.48}$$

En forma análoga, la energía de deformación elástica de un eje uniforme circular AB de longitud L, sometido en su extremo B a un par de torsión $\mathbf{T}_1$ (figura 11.29) será:

$$U = \int_0^{\phi_1} T\,d\phi = \tfrac{1}{2}T_1\phi_1 \tag{11.49}$$

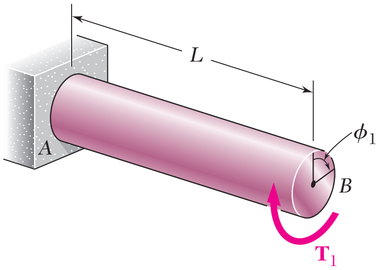


Figura 11.29

Sustituyendo el ángulo de torsión ϕ_1 de la ecuación (3.16), se verifica que

$$U = \frac{1}{2}T_1\left(\frac{T_1L}{JG}\right) = \frac{T_1^2L}{2JG}$$

como se obtuvo previamente en la sección 11.5.

El método presentado en esta sección puede simplificar la solución de muchos problemas relacionados con cargas de impacto. En el ejemplo 11.08, el choque de un automóvil con una barrera (figura 11.30) se analiza por medio de un modelo simplificado consistente en el bloque y una viga simple.

Figura 11.30 Cuando el automóvil choca contra la barrera, una considerable cantidad de energía se disipa en forma de calor durante la deformación permanente del auto y de la barrera.

EJEMPLO 11.08

Un bloque de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0$ golpea el elemento prismático AB en un punto medio C (figura 11.31). Determine *a*) la carga estática equivalente P_m, *b*) el máximo esfuerzo σ_m en el elemento, *c*) la deflexión máxima x_m en el punto C.

a) Carga estática equivalente. La máxima energía de deformación del elemento es igual a la energía cinética del bloque antes del impacto. Entonces

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \qquad (11.50)$$

Por otra parte, expresando U_m como el trabajo de la carga estática horizontal equivalente cuando se la aplica lentamente en el punto medio C del elemento, se tiene

$$U_m = \tfrac{1}{2}P_m x_m \qquad (11.51)$$

donde x_m es la deflexión de C correspondiente a la estática P_m. En la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D, se halla que

$$x_m = \frac{P_m L^3}{48EI} \qquad (11.52)$$

Sustituyendo x_m de (11.52) en la ecuación (11.51)

$$U_m = \frac{1}{2}\frac{P_m^2 L^3}{48EI}$$

Resolviendo para P_m y retomando la ecuación (11.50), se encuentra que la carga estática equivalente a la carga de impacto es

$$P_m = \sqrt{\frac{96U_m EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} \qquad (11.53)$$

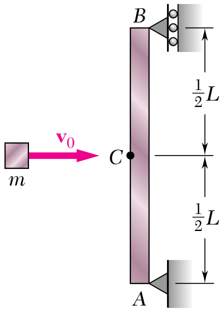


Figura 11.31

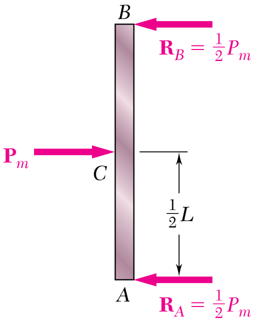

B
$\mathbf{R}_B = \frac{1}{2}P_m$
$\mathbf{P}_m$
C
$\frac{1}{2}L$
A
$\mathbf{R}_A = \frac{1}{2}P_m$

Figura 11.32

b) Esfuerzo máximo. Dibujando el diagrama de cuerpo libre del elemento (figura 11.32), se observa que el momento ocurre en C y es $M_{\text{máx}} = P_m L/4$. El máximo esfuerzo se produce en la sección transversal a través de C y es igual a

$$\sigma_m = \frac{M_{\text{máx}}c}{I} = \frac{P_m Lc}{4I}$$

Sustituyendo P_m de la ecuación (11.53),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{3mv_0^2 EI}{L(I/c)^2}}$$

c) Deflexión máxima. Reemplazando en la ecuación (11.52) la expresión obtenida para P_m en (11.53),

$$x_m = \frac{L^3}{48EI}\sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 L^3}{48EI}}$$

11.10 DEFLEXIÓN BAJO UNA CARGA ÚNICA POR EL MÉTODO DE TRABAJO-ENERGÍA

En la sección precedente se estudió que si se conoce la deflexión x_1 de una estructura o elemento bajo una carga $\mathbf{P}_1$ concentrada y única, la correspondiente energía de deformación U puede obtenerse escribiendo

$$U = \tfrac{1}{2}P_1 x_1 \qquad (11.3)$$

Una expresión similar puede utilizarse para obtener la energía de deformación de un elemento estructural bajo un par único $\mathbf{M}_1$:

$$U = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \qquad (11.47)$$

A la inversa, si se conoce la energía interna U de una estructura o elemento sometido a una fuerza concentrada única $\mathbf{P}_1$ o par $\mathbf{M}_1$, es posible usar las ecuaciones (11.3) u (11.47) para determinar la deflexión correspondiente x_1 o el ángulo θ_1. Para determinar la deflexión bajo una carga única aplicada a una estructura compuesta, puede ser más fácil, en lugar de usar algunos de los métodos del capítulo 9, primero calcular la energía de deformación de la estructura integrando la densidad de energía de deformación en sus diferentes partes, como se hizo en las secciones 11.4 y 11.5, y luego utilizar las ecuaciones (11.3) u (11.47) para obtener la deflexión deseada. De manera análoga, el ángulo de torsión ϕ_1 de un eje compuesto se obtiene por integración de la densidad de energía de deformación en las diferentes partes del eje y resolviendo la ecuación (11.49) para ϕ_1.

Debe tenerse presente que el método estudiado en esta sección puede usarse *únicamente si la estructura dada está sometida a una carga o par concentrado único*. La energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas *no puede* determinarse calculando el trabajo de cada carga como si se aplicara independientemente a la estructura (sección 11.11). Observe también que, aun si fuera posible calcular la energía de deformación de la estructura de esa manera, sólo una ecuación estaría disponible para determinar las deflexiones correspondientes a las diferentes cargas. En las secciones 11.12 y 11.13 se presentará otro método basado en el concepto de energía de deformación, que resulta útil para hallar la deflexión o la pendiente en un punto dado de una estructura, aun cuando ésta se encuentre sometida a varias cargas simultáneas concentradas, distribuidas o pares.

EJEMPLO 11.09

Una carga **P** se soporta en B por dos barras uniformes con la misma sección transversal A (figura 11.33). Halle la deflexión vertical del punto B.

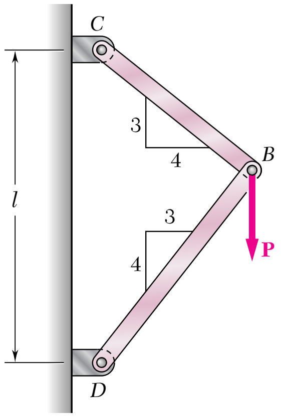


Figura 11.33

En el ejemplo 11.02 se determinó la energía de deformación del sistema bajo la carga. Igualando la expresión obtenida para U al trabajo de la carga,

$$U = 0.364\frac{P^2 l}{AE} = \frac{1}{2}Py_B$$

y, resolviendo para la deflexión vertical de B

$$y_B = 0.728\frac{Pl}{AE}$$

Nota. Debe observarse que, una vez obtenidas las fuerzas en las dos barras (véase ejemplo 11.02), las deformaciones $\delta_{B/C}$ y $\delta_{B/D}$ de las barras pueden hallarse utilizando el método estudiado en el capítulo 2. Determinar la deflexión vertical del punto B de esas deformaciones, sin embargo, requeriría de un cuidadoso análisis geométrico. El método de energía de deformación usado aquí, convierte en innecesario dicho análisis.

EJEMPLO 11.10

Determine la deflexión del extremo libre de la viga en voladizo *AB* (figura 11.34) considerando el efecto de *a*) los esfuerzos normales únicamente, *b*) los esfuerzos normales y cortantes.

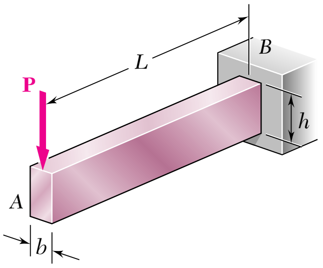


Figura 11.34

a) Efecto de los esfuerzos normales. El trabajo de la fuerza **P**, aplicada lentamente a *A* es

$$U = \tfrac{1}{2}Py_A$$

Sustituyendo por *U* la expresión de energía de deformación obtenida para la viga del ejemplo 11.03, donde sólo se consideraron esfuerzos normales, se tiene

$$\frac{P^2L^3}{6EI} = \frac{1}{2}Py_A$$

y, despejando y_A,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

b) Efecto de los esfuerzos normales y cortantes. Ahora se sustituye por *U* la expresión (11.24) obtenida en el ejemplo 11.05, donde los efectos tanto de esfuerzos normales como de cortantes se tuvieron en cuenta, y se tiene

$$\frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = \frac{1}{2}Py_A$$

y, despejando y_A,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

Se observa que el error relativo cuando no se tiene en cuenta el efecto de la fuerza cortante es igual al obtenido en el ejemplo 11.05, es decir, menor que $0.9(h/L)^2$. Como se indicó entonces, es menor de 0.9% para una viga con una relación *h*/*L*, menor que $\frac{1}{10}$.

EJEMPLO 11.11

Se aplica un par de torsión **T** al extremo *D* del eje *BCD* (figura 11.35). Si ambas porciones del eje tienen igual longitud y son del mismo material, pero el diámetro de *BC* es el doble de *CD*, determine el ángulo de torsión para todo el eje.

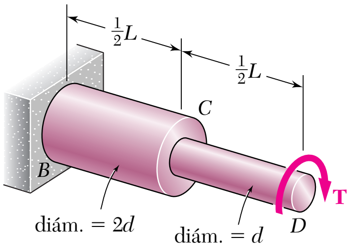


Figura 11.35

La energía de deformación de un eje similar se determinó en el ejemplo 11.04 rompiendo el eje en sus partes *BC* y *CD*. Haciendo $n = 2$ en la ecuación (11.23) se tiene

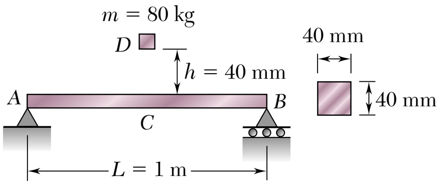
$$U = \frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ}$$

donde *G* es el módulo de rigidez del material y *J* el momento polar de inercia de la porción *CD* del eje. Haciendo *U* igual al trabajo del par de torsión cuando se aplica lentamente al extremo *D* y recordando la ecuación (11.49), se escribe

$$\frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ} = \frac{1}{2}T\phi_{D/B}$$

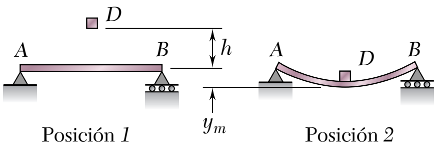
y despejando el ángulo de torsión $\phi_{D/B}$,

$$\phi_{D/B} = \frac{17TL}{32GJ}$$



PROBLEMA MODELO 11.3

El bloque D de masa m se deja caer libremente y recorre una altura h antes de golpear el punto medio C de la viga de aluminio AB. Si $E = 73$ GPa, halle *a*) la deflexión máxima en el punto C, *b*) el máximo esfuerzo en la viga.

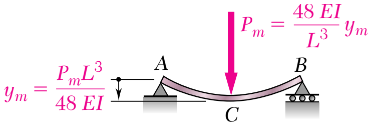


SOLUCIÓN

Principio de trabajo y energía. Como el bloque parte del reposo, en la posición *1* tanto la energía cinética como la de deformación son cero. En la posición *2*, cuando ocurre la deflexión máxima y_m, la energía cinética es cero de nuevo. La expresión para y_m se ilustra en la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D. La energía de deformación en la posición *2* es

$$U_2 = \frac{1}{2}P_m y_m = \frac{1}{2}\frac{48EI}{L^3}y_m^2 \qquad U_2 = \frac{24EI}{L^3}y_m^2$$

Del apéndice D



Se observa que el trabajo hecho por el peso **W** del bloque es $W(h + y_m)$. Igualando la energía de deformación de la viga y el trabajo hecho por **W**, se tiene

$$\frac{24EI}{L^3}y_m^2 = W(h + y_m) \tag{1}$$

***a*) Deflexión máxima en el punto *C*.** De los datos dados se tiene

$$EI = (73 \times 10^9 \text{ Pa})\tfrac{1}{12}(0.04 \text{ m})^4 = 15.573 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$
$$L = 1 \text{ m} \qquad h = 0.040 \text{ m} \qquad W = mg = (80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 784.8 \text{ N}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene y resuelve una ecuación cuadrática

$$(373.8 \times 10^3)y_m^2 - 784.8y_m - 31.39 = 0 \qquad y_m = 10.27 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

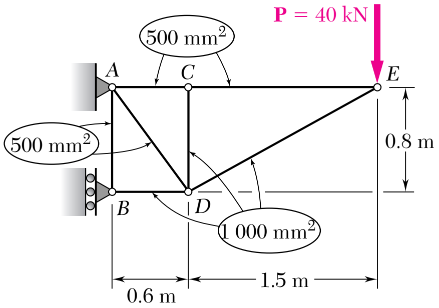
***b*) Esfuerzo máximo.** El valor de P_m es

$$P_m = \frac{48EI}{L^3}y_m = \frac{48(15.573 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{(1 \text{ m})^3}(0.01027 \text{ m}) \qquad P_m = 7\,677 \text{ N}$$

Recordando que $\sigma_m = M_{\text{máx}}c/I$ y $M_{\text{máx}} = \frac{1}{4}P_m L$, se escribe

$$\sigma_m = \frac{(\frac{1}{4}P_m L)c}{I} = \frac{\frac{1}{4}(7\,677 \text{ N})(1 \text{ m})(0.020 \text{ m})}{\frac{1}{12}(0.040 \text{ m})^4} \qquad \sigma_m = 179.9 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Es posible obtener una aproximación al trabajo realizado por el peso del bloque omitiendo y_m de la expresión para trabajo y del miembro derecho de la ecuación (1), como se hizo en el ejemplo 11.07. Si esto se efectúa aquí, se obtiene $y_m = 9.16$ mm; el error es de 10.8%. Sin embargo, si un bloque de 8 kg se deja caer desde una altura de 400 mm, produciendo el mismo valor de Wh, al omitir y_m en el miembro derecho de la ecuación (1) se produce un error de sólo 1.2%. Un análisis adicional de esta aproximación se ofrece en el problema 11.70.

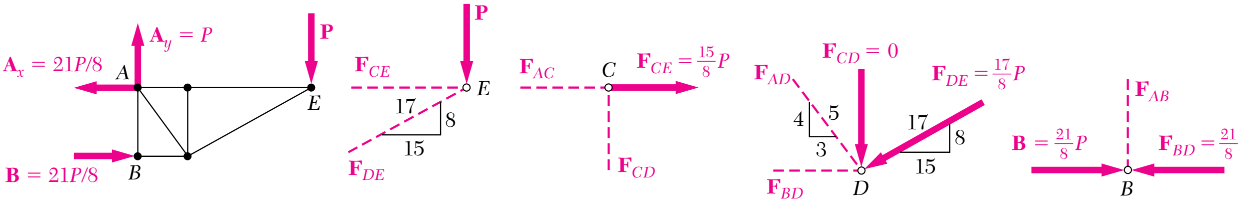

P = 40 kN
500 mm²
A
C
E
500 mm²
0.8 m
B
D
1 000 mm²
0.6 m
1.5 m

PROBLEMA MODELO 11.4

Los elementos de la armadura mostrada son secciones de tubería de aluminio con las secciones transversales que se ilustran en la figura. Si $E = 73$ GPa, determine la deflexión vertical del punto E, causada por la carga **P**.

SOLUCIÓN

Fuerzas axiales en los elementos de la armadura. Se obtienen las reacciones usando el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Después se considera, en secuencia, el equilibrio de los nodos E, C, D y B. En cada nodo se determinan las fuerzas indicadas por líneas punteadas. En el nudo B, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ proporciona una verificación de cálculos.


$\mathbf{A}_y = P$
$\mathbf{A}_x = 21P/8$
A
P
E
B
$\mathbf{B} = 21P/8$
$\mathbf{F}_{CE}$
P
E
17
8
15
$\mathbf{F}_{DE}$
$\mathbf{F}_{AC}$
C
$\mathbf{F}_{CE} = \frac{15}{8}P$
$\mathbf{F}_{CD}$
$\mathbf{F}_{AD}$
$\mathbf{F}_{CD} = 0$
$\mathbf{F}_{DE} = \frac{17}{8}P$
4
5
3
17
8
15
$\mathbf{F}_{BD}$
D
$\mathbf{F}_{AB}$
$\mathbf{B} = \frac{21}{8}P$
$\mathbf{F}_{BD} = \frac{21}{8}P$
B

$\Sigma F_y = 0$: $F_{DE} = -\frac{17}{8}P$

$\Sigma F_x = 0$: $F_{CE} = +\frac{15}{8}P$

$\Sigma F_x = 0$: $F_{AC} = +\frac{15}{8}P$

$\Sigma F_y = 0$: $F_{CD} = 0$

$\Sigma F_y = 0$: $F_{AD} = +\frac{5}{4}P$

$\Sigma F_x = 0$: $F_{BD} = -\frac{21}{8}P$

$\Sigma F_y = 0$: $F_{AB} = 0$

$\Sigma F_x = 0$: (Se cumple)

Energía de deformación. Notando que E es el mismo para todos los elementos, la energía de deformación de la armadura se expresa como

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} \tag{1}$$

donde F_i es la fuerza en un elemento dado como se indica en la siguiente tabla y donde la suma se extiende a todos los elementos de la armadura.

Elemento	F_i	L_i, m	A_i, m²	$\dfrac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	$1\,000 \times 10^{-6}$	$4\,134P^2$
CD	0	0.8	$1\,000 \times 10^{-6}$	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	$1\,000 \times 10^{-6}$	$7\,677P^2$

$$\sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} = 29\,700P^2$$

Volviendo a la ecuación (1) se tiene

$$U = (1/2E)(29.7 \times 10^3 P^2).$$

Principio de trabajo energía. Cabe recordar que el trabajo hecho por la carga **P**, cuando se la aplica gradualmente, es $\frac{1}{2}Py_E$. Igualando el trabajo realizado por **P** a la energía de deformación U y recordando que $E = 73$ GPa y $P = 40$ kN, se tiene

$$\frac{1}{2}Py_E = U \qquad \frac{1}{2}Py_E = \frac{1}{2E}(29.7 \times 10^3 P^2)$$

$$y_E = \frac{1}{E}(29.7 \times 10^3 P) = \frac{(29.7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$$

$$y_E = 16.27 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$y_E = 16.27$ mm ↓ ◀

PROBLEMAS

11.42 Un collarín de 6 kg tiene una velocidad $v_0 = 4.5$ m/s cuando choca contra una pequeña placa unida al extremo *A* de la varilla *AB* con 20 mm de diámetro. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la carga estática equivalente, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla, *c*) la deflexión máxima del extremo *A*.

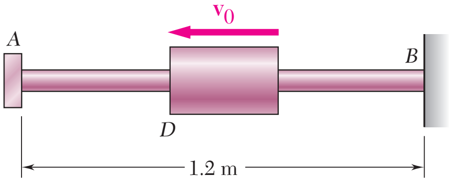


Figura P11.42 y *P11.43*

11.43 Un collarín *D* de 5 kg se mueve a lo largo de la varilla uniforme *AB* y tiene una velocidad $v_0 = 6$ m/s cuando choca contra una pequeña placa unida al extremo *A* de la varilla. Si $E = 200$ GPa y se sabe que el esfuerzo permisible en la varilla es de 250 MPa, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para ésta.

11.44 El collar *G* de 100 lb se libera desde el reposo en la posición que se muestra en la figura y lo detiene la placa *BDF*. La placa está unida a la barra *CD* de in. de diámetro y a las barras *AB* y *EF* de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro. Si se sabe que para el $\frac{7}{8}$ tipo de acero usado $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la máxima distancia permisible *h*.

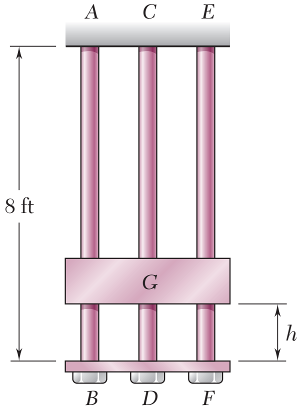


Figura P11.44

11.45 Retome el problema 11.44, y ahora suponga que la barra *CD* de acero de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro, se cambia por una barra de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro hecha de un aluminio para el que $\sigma_{\text{perm}} = 20$ ksi y $E = 10.6 \times 10^6$ psi.

11.46 El collarín *D* se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la figura y lo detiene la pequeña placa unida al extremo *C* de la barra vertical *ABC*. Determine la masa del collar para la que el esfuerzo normal máximo en el tramo *BC* es de 125 MPa.

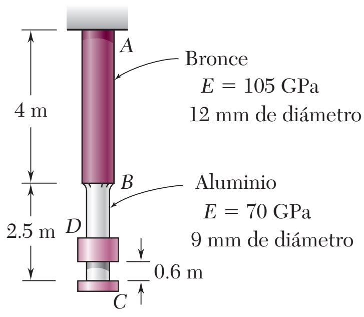


Figura P11.46

11.47 Retome el problema 11.46, y ahora suponga que los dos tramos de la barra *ABC* están hechas de aluminio.

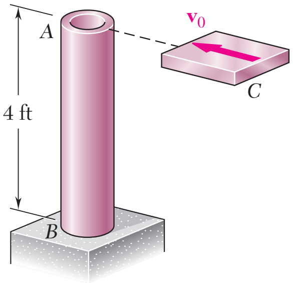


Figura P11.48

11.48 El poste AB consiste de un tubo de acero de 3.5 in. de diámetro exterior y 0.3 in. de espesor de pared. Un bloque C de 15 lb se mueve horizontalmente con una velocidad $\mathbf{v}_0$ y golpea al poste en una superficie cuadrada en A. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la máxima velocidad v_0 para la cual el esfuerzo normal máximo en el tubo no excede 24 ksi.

11.49 Retome el problema 11.48, y ahora suponga que el poste AB consiste en una barra sólida de 3.5 in. de diámetro.

11.50 La viga de acero AB es golpeada sobre una superficie cuadrada en su punto medio C por un bloque de 45 kg que se mueve horizontalmente con una velocidad $v_0 = 2$ m/s. Con $E = 200$ GPa, determine a) la carga estática equivalente, b) el esfuerzo normal en la viga y c) la deflexión máxima en el punto medio C de la viga.

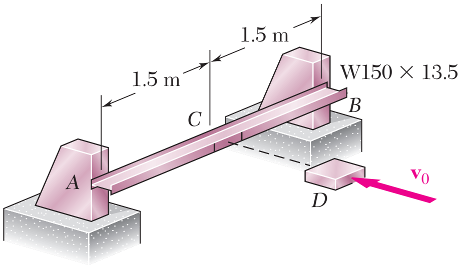


Figura P11.50

11.51 Retome el problema 11.50, y ahora suponga que la viga de acero laminado W150 × 13.5 se gira 90° alrededor de su eje longitudinal, de manera que su alma está en posición vertical.

11.52 El bloque D de 45 lb se suelta desde una altura $h = 0.6$ ft sobre la viga AB de acero. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine a) la deflexión máxima en el punto E, b) el esfuerzo normal máximo en la viga.

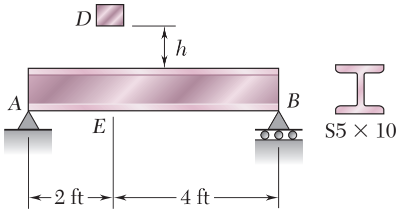


Figura P11.52

11.53 y 11.54 El bloque D de 2 kg se deja caer desde la posición que se ilustra en la figura sobre el extremo de una barra de 16 mm de diámetro. Si $E = 200$ GPa, determine a) la deflexión máxima en el extremo A, b) el momento flector máximo en la barra y c) el esfuerzo normal máximo en la barra.

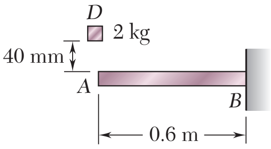


Figura P11.53

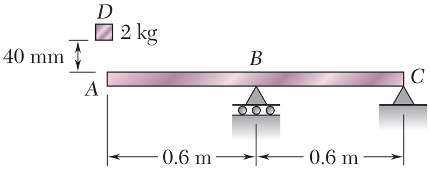


Figura P11.54

11.55 Una clavadista de 160 lb salta desde una altura de 20 in. sobre el extremo *C* de un trampolín que tiene la sección transversal uniforme ilustrada en la figura. Ahora suponga que las piernas de la clavadista permanecen rígidas con $E = 1.8 \times 10^6$ psi, y determine *a*) la deflexión máxima en el punto *C*, *b*) el esfuerzo normal máximo en el trampolín, *c*) la carga estática equivalente.

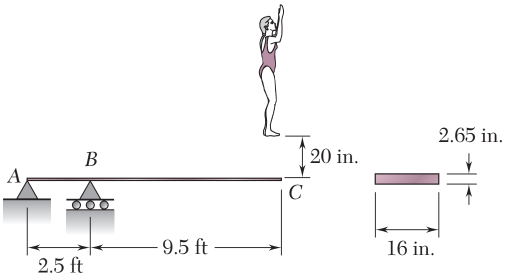


Figura *P11.55*

11.56 Se deja caer un bloque de peso *W* desde una altura *h* sobre una viga horizontal *AB* y la golpea en el punto *D*. *a*) Demuestre que la deflexión máxima y_m en el punto *D* puede expresarse como

$$y_m = y_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}}}\right)$$

donde y_{st} representa la deflexión en *D* causada por una carga estática *W* aplicada en ese punto y donde la cantidad entre paréntesis representa el *factor de impacto*. *b*) Calcule el factor de impacto para la viga y la carga de impacto del problema 11.53.

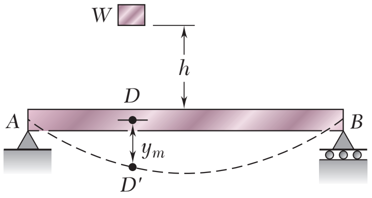


Figura P11.56 y P11.57

11.57 Un bloque de peso *W* se deja caer desde una altura *h* sobre la viga horizontal *AB* y la golpea en el punto *D*. *a*) Si y_m es el valor exacto de la deflexión máxima en *D* y y'_m es el valor obtenido al despreciar el efecto de esta deflexión en el cambio en la energía potencial del bloque, demuestre que el valor absoluto del error relativo $(y'_m - y_m)/y_m$ nunca excede a $y'_m/2h$. *b*) Verifique el resultado del inciso anterior al resolver el inciso *a*) del problema 11.53, sin tomar en cuenta a y_m cuando se determina el cambio en la energía potencial de la carga, y al comparar la respuesta obtenida de esta manera con la respuesta exacta de ese problema.

11.58 y 11.59 Utilice el método de trabajo y energía para determinar la deflexión causada por la carga **P** en el punto *D*.

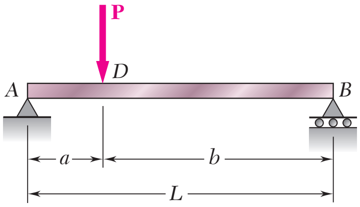


Figura P11.58

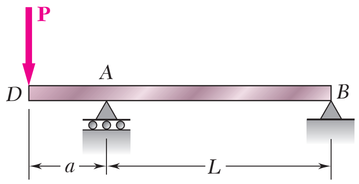


Figura P11.59

***11.60* y 11.61** Utilice el método de trabajo y energía para determinar la pendiente causada por el par $\mathbf{M}_0$ en el punto *D*.

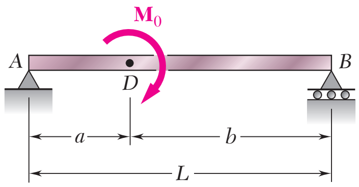


Figura *P11.60*

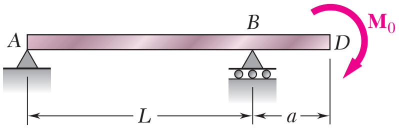


Figura P11.61

11.62 y 11.63 Utilice el método de trabajo y energía para determinar la deflexión causada por la fuerza **P** en el punto *C*.

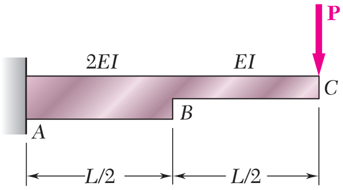


Figura P11.62

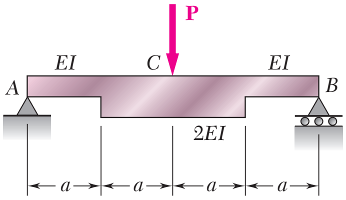


Figura P11.63

11.64 Utilice el método de trabajo y energía para determinar la pendiente causada por el par $\mathbf{M}_0$ en el punto *B*.

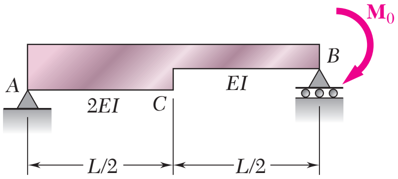


Figura P11.64

11.65 Utilice el método de trabajo y energía para determinar la pendiente causada por el par $\mathbf{M}_0$ en el punto *A*.

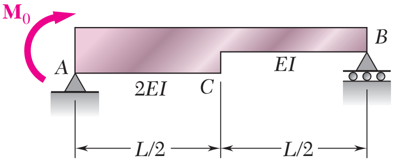


Figura *P11.65*

11.66 La varilla *BC* de acero tiene un diámetro de 20 mm y está unida a la palanca *AB* y al apoyo fijo *C*. La palanca *AB* de acero uniforme tiene 10 mm de espesor y 30 mm de profundidad. Utilice el método de trabajo y energía para determinar la deflexión del punto *A* cuando $L = 600$ mm. Considere que $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa.

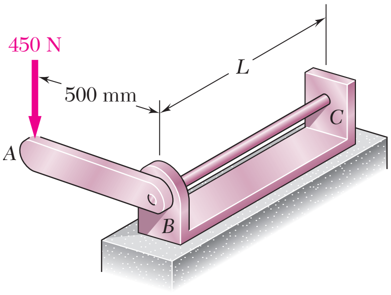


Figura *P11.66* y P11.67

11.67 La varilla *BC* de acero tiene un diámetro de 20 mm y está unida a la palanca *AB* y al apoyo fijo *C*. La palanca *AB* de acero uniforme tiene 10 mm de espesor y 30 mm de profundidad. Utilice el método de trabajo y energía para determinar la longitud *L* de la varilla *BC* para la cual la deflexión en el punto *A* es de 40 mm. Considere que $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa.

11.68 Dos ejes de acero, cada uno de 0.75 in. de diámetro, están conectados por los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el eje DF está fijo en F, determine el ángulo a través del cual gira el extremo A cuando se aplica sobre ese punto un par de torsión de 750 lb · in. (Desprecie la energía de deformación debida a la flexión de los ejes.)

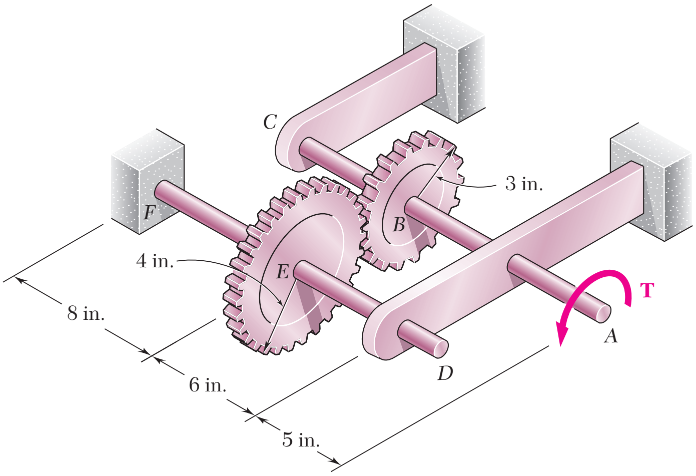


Figura *P11.68*

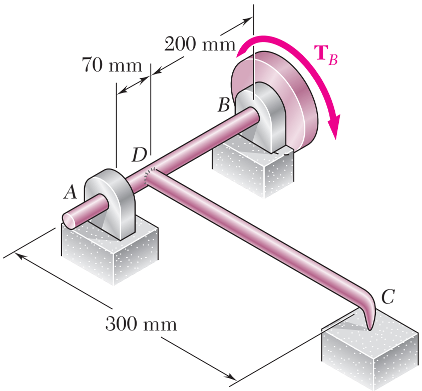


Figura P11.69

11.69 La barra CD de acero de 20 mm de diámetro está soldada al eje de acero AB de 20 mm de diámetro, según se ilustra en la figura. El extremo C de la barra CD se encuentra en contacto con la superficie rígida, que se muestra, cuando se aplica un par $\mathbf{T}_B$ al disco unido al eje AB. Si los cojinetes son autoalineables y no se ejercen pares sobre el eje, determine el ángulo de rotación del disco cuando $T_B = 400$ N · m. Utilice $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa. (Considere la energía de deformación debida tanto a la flexión como a la torsión del eje AB y la flexión del brazo CD.)

11.70 El elemento cilíndrico hueco de pared delgada AB tiene una sección no circular de espesor variable. Utilice la expresión dada en la ecuación (3.53) de la sección 3.13 y la expresión para la densidad de energía de deformación elástica en la ecuación (11.19), demuestre que el ángulo de giro del elemento AB es

$$\phi = \frac{TL}{4\mathcal{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

donde ds es un elemento de la línea central de la pared de la sección transversal y $\mathcal{A}$ es el área encerrada por dicha línea central.

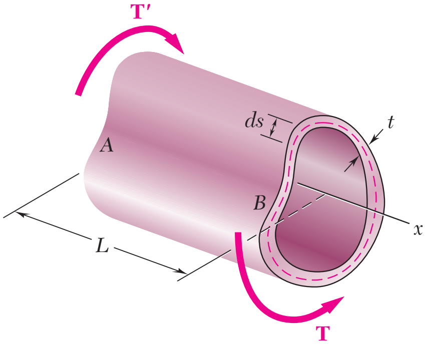


Figura P11.70

11.71 y *11.72* Cada elemento de la armadura que se muestra en las figuras tiene una sección transversal uniforme con área A. Utilice el método de trabajo y energía para determinar la deflexión horizontal del punto de aplicación de la carga $\mathbf{P}$.

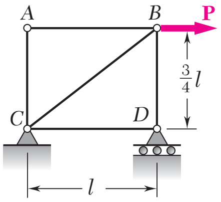

A
B
P
C
D
$\frac{3}{4}l$
l

Figura P11.71

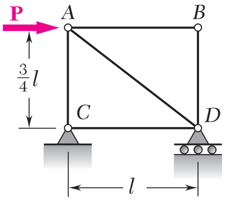

P
A
B
$\frac{3}{4}l$
C
D
l

Figura *P11.72*

11.73 Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de 3 in.^{2}. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la deflexión vertical de la junta A causada por la aplicación de la carga de 24 kip.

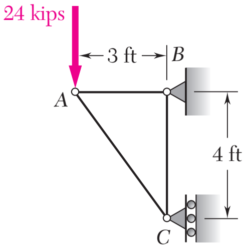

24 kips
3 ft
B
A
4 ft
C

Figura P11.73

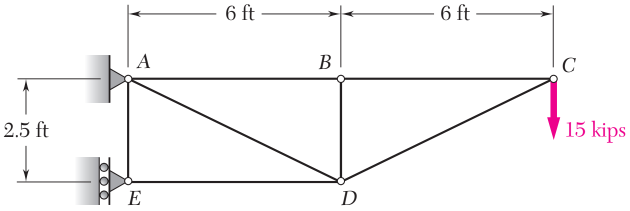

6 ft
6 ft
A
B
C
2.5 ft
15 kips
E
D

Figura P11.74

11.74 Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de 5 in.^{2}. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la deflexión vertical de la unión C causada por la aplicación de la carga de 15 kips.

11.75 Los elementos de la armadura que se muestra en la figura están hechos de acero y tienen las áreas de sección transversal indicadas. Si $E = 200$ GPa, determine la deflexión vertical de la junta C causada por la carga de 210 kN.

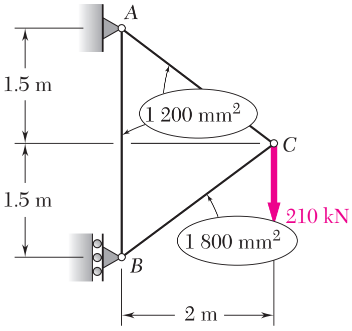

A
1.5 m
1 200 mm^2
C
1.5 m
210 kN
1 800 mm^2
B
2 m

Figura P11.75

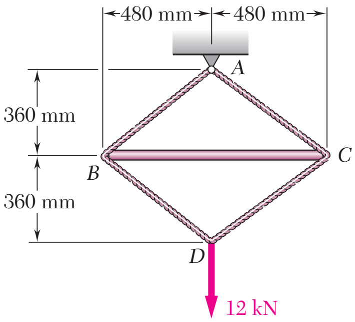

480 mm
480 mm
A
360 mm
C
B
360 mm
D
12 kN

Figura *P11.76*

11.76 La barra de acero BC tiene un diámetro de 24 mm y el cable de acero $ABDCA$ tiene 12 mm de diámetro. Si $E = 200$ GPa, determine la deflexión del punto D causada por la carga de 12 kN.

*11.11 TRABAJO Y ENERGÍA BAJO VARIAS CARGAS

En esta sección se estudiará cómo puede expresarse la energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas en función de las mismas y de las deflexiones resultantes.

Sea una viga elástica AB sometida a dos cargas concentradas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$. La energía de deformación de la viga es igual al trabajo de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuando son aplicados lentamente a la viga en C_1 y C_2, respectivamente (figura 11.36). Sin embargo, para calcular este trabajo primero tienen que expresarse las deflexiones x_1 y x_2 en función de las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

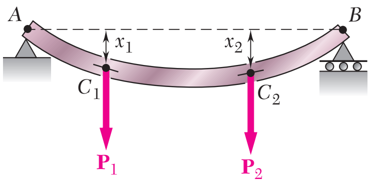


Figura 11.36

Suponga que sólo $\mathbf{P}_1$ se aplica a la viga (figura 11.37). Se observa que tanto C_1 como C_2 se deflectan y que sus deflexiones son proporcionales a la carga P_1. Denominando estas deflexiones x_{11} y x_{21}, se tiene

$$x_{11} = \alpha_{11}P_1 \qquad x_{21} = \alpha_{21}P_1 \tag{11.54}$$

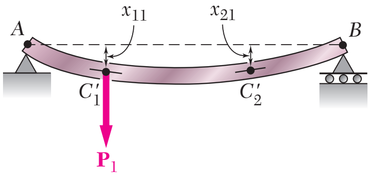


Figura 11.37

donde α_{11} y α_{21} son constantes llamadas *coeficientes de influencia*. Estas constantes representan las deflexiones de C_1 y C_2, respectivamente, cuando se aplica una carga unitaria en C_1 y son características de la viga AB.

Ahora, sea sólo $\mathbf{P}_2$ la carga que se aplica a la viga (figura 11.38). Llamado x_{12} y x_{22}, respectivamente, las deflexiones resultantes de C_1 y C_2 resulta

$$x_{12} = \alpha_{12}P_2 \qquad x_{22} = \alpha_{22}P_2 \tag{11.55}$$

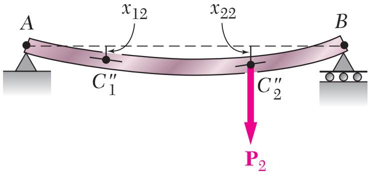


Figura 11.38

donde α_{12} y α_{22} son los coeficientes de influencia que representan las deflexiones de C_1 y C_2, respectivamente, cuando una carga unitaria se aplica en C_2. Utilizando el principio de superposición, cuando ambas cargas están aplicadas (figura 11.36), las deflexiones x_1 y x_2 de C_1 y C_2 se expresan como

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 \tag{11.56}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 \tag{11.57}$$

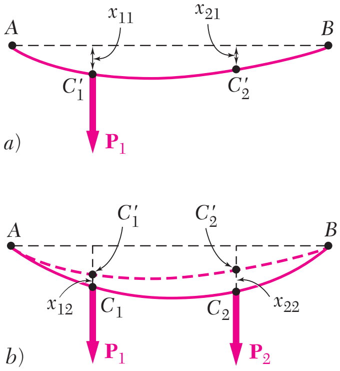


Figura 11.39

Para calcular el trabajo hecho por $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, y la energía de deformación de la viga, es importante notar que $\mathbf{P}_1$ se aplica en el comienzo lentamente a C_1 (figura 11.39*a*). Recordando la primera de las ecuaciones (11.54), se expresa el trabajo de $\mathbf{P}_1$ como

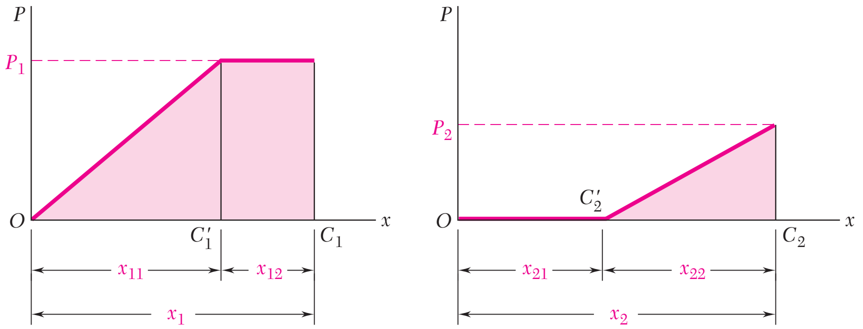
$$\tfrac{1}{2}P_1x_{11} = \tfrac{1}{2}P_1(\alpha_{11}P_1) = \tfrac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2 \tag{11.58}$$

y se observa que $\mathbf{P}_2$ no trabaja mientras C_2 se mueve hacia x_{21}, ya que todavía no se ha aplicado a la viga.

Ahora se aplica lentamente $\mathbf{P}_2$ en C_2 (figura 11.39*b*); recordando la segunda de las ecuaciones (11.55), el trabajo de $\mathbf{P}_2$ se expresa como

$$\tfrac{1}{2}P_2x_{22} = \tfrac{1}{2}P_2(\alpha_{22}P_2) = \tfrac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2 \tag{11.59}$$

Pero al aplicar $\mathbf{P}_2$ lentamente en C_2, el punto de aplicación de $\mathbf{P}_1$ se mueve hacia x_{12} de C'_1 a C_1, y la carga $\mathbf{P}_1$ trabaja. Como $\mathbf{P}_1$ está *completamente apli-*


P
P_1
O
x
C_1'
C_1
x_{11}
x_{12}
x_1
P
P_2
C_2'
O
x
C_2
x_{21}
x_{22}
x_2

a) Diagrama carga-desplazamiento para C_1

b) Diagrama carga-desplazamiento para C_2

Figura 11.40

cada durante este desplazamiento (figura 11.40), su trabajo es P_1x_{12} o, recordando la primera de las ecuaciones (11.55),

$$P_1x_{12} = P_1(\alpha_{12}P_2) = \alpha_{12}P_1P_2 \tag{11.60}$$

Sumando las expresiones obtenidas en (11.58), (11.59) y (11.60), la energía de deformación de la viga sometida a las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ se expresa como

$$\boxed{U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2)} \tag{11.61}$$

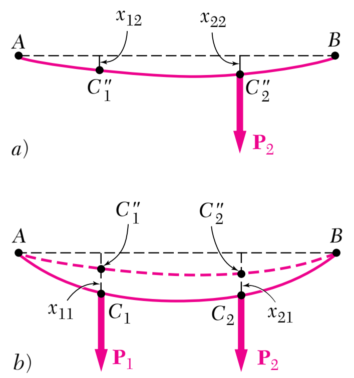
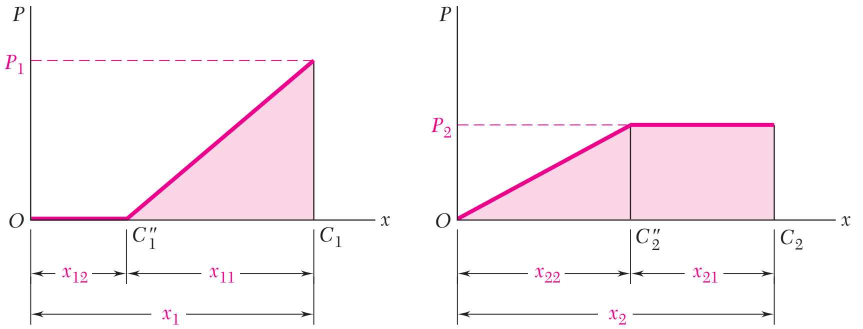

x_{12}
x_{22}
A
B
C_1''
C_2''
$\mathbf{P}_2$
a)
C_1''
C_2''
A
B
x_{11}
C_1
C_2
x_{21}
$\mathbf{P}_1$
$\mathbf{P}_2$
b)

Figura 11.41

Si primero se hubiera aplicado la carga $\mathbf{P}_2$ a la viga (figura 11.41*a*), y luego $\mathbf{P}_1$ (figura 11.41*b*), el trabajo hecho por cada fuerza habría sido el que se muestra en la figura 11.42. Cálculos similares a los efectuados, para la energía de deformación de la viga, conducirían a la siguiente expresión alternativa

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2) \tag{11.62}$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (11.61) y (11.62), se tiene $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, y se concluye que la deflexión producida en C_1 por una carga unitaria, aplicada en C_2, es igual a la deflexión producida en C_2 por una carga unitaria aplicada en C_1. Esto se conoce como *teorema recíproco de Maxwell*, en honor al físico británico James Clerk Maxwell (1831-1879).


P
P_1
O
x
C_1''
C_1
x_{12}
x_{11}
x_1
P
P_2
O
x
C_2''
C_2
x_{22}
x_{21}
x_2

a) Diagrama carga-desplazamiento para C_1

b) Diagrama carga-desplazamiento para C_2

Figura 11.42

Aunque ahora se está en capacidad de expresar la energía de deformación U de una estructura sometida a varias cargas como una función de las mismas, no se puede usar el método de la sección 11.10 para hallar la deflexión de tal estructura. Ciertamente, calcular la energía de deformación U integrando la densidad de la energía de deformación u sobre la estructura y al sustituir lo obtenido en la ecuación (11.61) sólo resultaría una ecuación que claramente no podría resolverse para los coeficientes α.

*11.12 TEOREMA DE CASTIGLIANO

Recordando la expresión obtenida para la energía de deformación de una estructura elástica sometida a dos cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$:

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \qquad (11.61)$$

donde α_{11}, α_{12} y α_{22} son los coeficientes de influencia asociados con los puntos de aplicación C_1 y C_2 de las dos cargas. Derivando ambos miembros de la ecuación (11.61) con respecto a P_1 y recordando la ecuación (11.56), resulta

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1 \qquad (11.63)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (11.61) con respecto a P_2, recordando la ecuación (11.57) y teniendo en cuenta que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, resulta

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2 \qquad (11.64)$$

En general, si una estructura elástica se somete a n cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, la deflexión x_j del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$, puede expresarse como la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a la carga $\mathbf{P}_j$. Se escribe

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \qquad (11.65)$$

Éste es el *teorema de Castigliano*, llamado así en honor al ingeniero italiano Alberto Castigliano (1847-1884),† quien lo estableció.

---

† En el caso de una estructura elástica sometida a n cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, la deflexión del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$, se expresa como

$$x_j = \sum_k \alpha_{jk}P_k \qquad (11.66)$$

y la energía de deformación de la estructura es

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_k \alpha_{ik}P_iP_k \qquad (11.67)$$

Derivando U con respecto a P_j y observando que P_j se encuentra en términos que corresponden a $i = j$ o $k = j$, se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ij}P_i$$

pero $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$,

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ji}P_i = \sum_k \alpha_{jk}P_k$$

Recordando la ecuación (11.66) se verifica que

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \qquad (11.65)$$

Recordando que el trabajo de un par **M** es $\frac{1}{2}M\theta$, donde θ es el ángulo de rotación en el punto donde el par se aplica lentamente, se tiene que el teorema de Castigliano puede usarse para determinar la pendiente de una viga en el punto de aplicación de un par $\mathbf{M}_j$. Resulta

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{11.68}$$

Análogamente, el ángulo de torsión ϕ_j en una sección de un eje donde el par de torsión $\mathbf{T}_j$ se aplica lentamente, se obtiene derivando la energía de deformación del eje con respecto a T_j:

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{11.69}$$

*11.13 DEFLEXIONES POR EL TEOREMA DE CASTIGLIANO

En la sección anterior se vio que la deflexión x_j de una estructura en el punto de aplicación de una fuerza $\mathbf{P}_j$ puede calcularse mediante la derivada parcial $\partial U/\partial P_j$ de la energía de deformación U de la estructura. Cabe recordar de las secciones 11.4 y 11.5 que U se obtiene integrando, o sumando sobre la estructura, la energía de deformación de cada elemento de ésta. Se estudiará que el cálculo de la deflexión x_j, por el teorema de Castigliano, se simplifica si la derivación respecto a la carga P_j se efectúa antes de integrar o sumar.

En el caso de una viga, por ejemplo, recordando de la sección 11.4 que

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \tag{11.17}$$

y se determina la deflexión x_j del punto de aplicación de la carga $\mathbf{P}_j$ escribiendo

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}dx \tag{11.70}$$

Para una armadura con n elementos uniformes de longitud L_i, área transversal A_i y fuerza interna F_i, se recurre a la ecuación (11.14) y resulta

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \tag{11.71}$$

La deflexión x_j del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$ se obtiene derivando con respecto a P_j cada término de la suma. Se escribe

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.72}$$

EJEMPLO 11.12

La viga en voladizo AB soporta una carga distribuida uniformemente w y una carga concentrada **P**, como se muestra (figura 11.43). Si $L = 2$ m, $w = 4$ kN/m, $P = 6$ kN y $EI = 5$ MN · m^2, halle la deflexión en A.

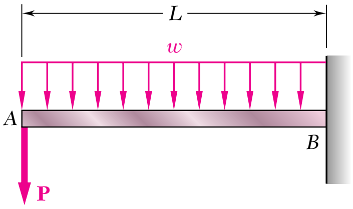


Figura 11.43

La deflexión y_A del punto A, donde se aplica la carga **P**, se obtiene de la ecuación (11.70). Como **P** es vertical y dirigida hacia abajo, y_A representa una deflexión vertical y es positiva hacia abajo. Entonces

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx \qquad (11.73)$$

El momento flector M a una distancia x de A es

$$M = -(Px + \tfrac{1}{2}wx^2) \qquad (11.74)$$

y su derivada con respecto a P es

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Sustituyendo M y $\partial M/\partial P$ en la ecuación (11.73), se escribe

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(Px^2 + \frac{1}{2}wx^3\right)dx$$

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} + \frac{wL^4}{8}\right) \qquad (11.75)$$

Sustituyendo los datos dados, resulta

$$y_A = \frac{1}{5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2}\left[\frac{(6 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^3}{3} + \frac{(4 \times 10^3 \text{ N/m})(2 \text{ m})^4}{8}\right]$$

$$y_A = 4.8 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad y_A = 4.8 \text{ mm} \downarrow$$

Note que el cálculo de la derivada parcial $\partial M/\partial P$ *no habría podido hacerse* si el valor numérico de P se hubiera sustituido por P en la expresión (11.74) para el momento flector.

Puede observarse que la deflexión x_j de una estructura en un punto dado C_j se obtiene por aplicación directa del teorema de Castigliano si una carga $\mathbf{P}_j$ se aplica en C_j en la dirección en que x_j debe determinarse. Cuando no hay carga en C_j, o cuando se aplica una carga en otra dirección, la deflexión x_j puede obtenerse por el teorema de Castigliano si se utiliza el siguiente procedimiento: se aplica una carga "ficticia" $\mathbf{Q}_j$ en C_j en la dirección que se desea para x_j y se utiliza el teorema de Castigliano para obtener la deflexión

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j} \qquad (11.76)$$

debida a $\mathbf{Q}_j$ y a las cargas reales. Haciendo $Q_j = 0$ en la ecuación (11.76) se obtiene la deflexión en C_j en la dirección deseada bajo la carga dada.

Análogamente puede procederse con la pendiente θ_j en un punto C_j aplicando un par ficticio $\mathbf{M}_j$ en C_j, calculando la derivada parcial $\partial U/\partial M_j$, y haciendo $M_j = 0$ en la expresión obtenida.

EJEMPLO 11.13

La viga en voladizo AB soporta una carga uniformemente distribuida w (figura 11.44). Halle la deflexión y la pendiente en A.

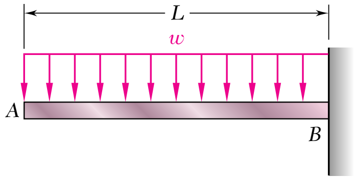


Figura 11.44

Deflexión en A. Se aplica una carga ficticia hacia abajo $\mathbf{Q}_A$ en A (figura 11.45) y se escribe

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q_A}\,dx \tag{11.77}$$

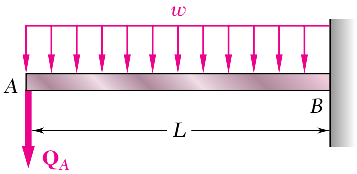


Figura 11.45

El momento flector M a una distancia x de A es

$$M = -Q_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{11.78}$$

y su derivada con respecto a Q_A es

$$\frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x \tag{11.79}$$

Sustituyendo M y $\partial M/\partial Q_A$ de (11.78) y (11.79) en (11.77), y haciendo $Q_A = 0$, se obtiene la deflexión en A para la carga dada:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-x)\,dx = +\frac{wL^4}{8EI}$$

Puesto que la carga ficticia se dirige hacia abajo, el signo positivo indica que

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

Pendiente en A. Se aplica el par ficticio $\mathbf{M}_A$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj en A (figura 11.46) y se escribe

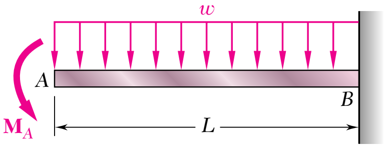


Figura 11.46

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

Recordando la ecuación (11.17), se tiene

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx \tag{11.80}$$

El momento flector M a una distancia x de A es

$$M = -M_A - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{11.81}$$

y su derivada con respecto a M_A es

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1 \tag{11.82}$$

Sustituyendo M y $\partial M/\partial M_A$ de (11.81) y (11.82) en (11.80), y haciendo $M_A = 0$, se obtiene la pendiente en A para la carga dada:

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-1)\,dx = +\frac{wL^3}{6EI}$$

Como el par ficticio se aplicó en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el signo positivo indica que el ángulo θ_A va en el mismo sentido que las de las agujas del reloj:

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI} \circlearrowright$$

EJEMPLO 11.14

Una carga **P** es soportada en B por dos barras de igual material e igual sección transversal de área A (figura 11.47). Determine la deflexión vertical y horizontal en el punto B.

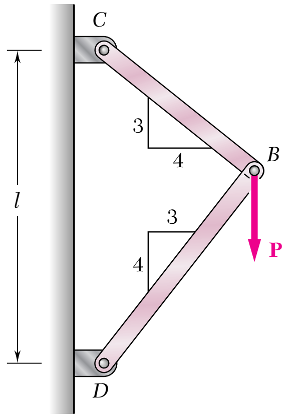


Figura 11.47

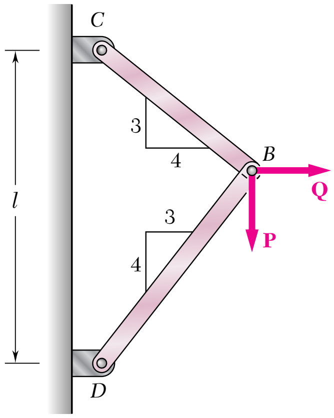


Figura 11.48

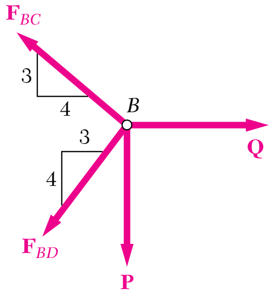


Figura 11.49

Se aplica una carga ficticia horizontal **Q** en B (figura 11.48). Del teorema de Castigliano se tiene

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \qquad y_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Recordando, de la sección 11.4, la expresión (11.14) para energía de deformación de una barra resulta

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE}$$

en donde F_{BC} y F_{BD} son las fuerzas en BC y BD, respectivamente. Entonces

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} \qquad (11.83)$$

y

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial P} \qquad (11.84)$$

Del diagrama de cuerpo libre del pasador B (figura 11.49) se obtiene

$$F_{BC} = 0.6P + 0.8Q \qquad F_{BD} = -0.8P + 0.6Q \qquad (11.85)$$

Derivando estas expresiones con respecto a Q y P, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} &= 0.8 & \frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} &= 0.6 \\ \frac{\partial F_{BC}}{\partial P} &= 0.6 & \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} &= -0.8 \end{aligned} \qquad (11.86)$$

Sustituyendo de (11.85) y (11.86) en (11.83) y (11.84), haciendo $Q = 0$, y notando que $BC = 0.6l$ y $BD = 0.8l$, se obtienen las deflexiones horizontales y verticales del punto B bajo la carga dada **P**:

$$x_B = \frac{(0.6P)(0.6l)}{AE}(0.8) + \frac{(-0.8P)(0.8l)}{AE}(0.6)$$

$$= -0.096\frac{Pl}{AE}$$

$$y_B = \frac{(0.6P)(0.6l)}{AE}(0.6) + \frac{(-0.8P)(0.8l)}{AE}(-0.8)$$

$$= +0.728\frac{Pl}{AE}$$

Haciendo referencia a las direcciones de las cargas **Q** y **P**, se concluye que

$$x_B = 0.096\frac{Pl}{AE} \leftarrow \qquad y_B = 0.728\frac{Pl}{AE} \downarrow$$

Se verifica que la expresión obtenida para la deflexión vertical de B es la misma encontrada en el ejemplo 11.09.

*11.14 ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las reacciones en los apoyos de una estructura elástica estáticamente indeterminada pueden calcularse mediante el teorema de Castigliano. En el caso de una estructura indeterminada de primer grado, por ejemplo, se designa una de las reacciones como redundante y se elimina o se modifica el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata, entonces, como una carga desconocida que, junto con las otras cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. Primero se calcula la energía de deformación U de la estructura debido a la acción combinada de las cargas y de la reacción redundante. Observando que la derivada parcial de U con respecto a la reacción redundante representa la deflexión (o pendiente) en el apoyo que ha sido eliminado o modificado, se realiza esta derivada igual a cero y se resuelve la ecuación para la reacción redundante.† Las reacciones restantes se obtienen de las ecuaciones de estática.

---

† Éste es el caso en que un apoyo rígido no permite deflexión. Para otros tipos de apoyo, la derivada parcial de U debe ser igual a la deflexión permitida.

EJEMPLO 11.15

Determine las reacciones en los apoyos para la viga prismática y carga mostradas (figura 11.50).

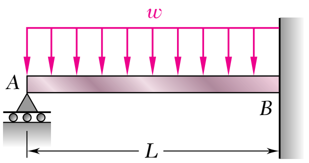


Figura 11.50

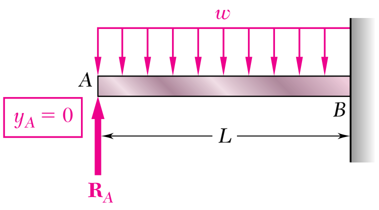


Figura 11.51

La viga es estáticamente indeterminada de primer grado. Se considera la reacción en A como redundante y se suelta la viga de ese apoyo. Ahora se considerará la reacción $\mathbf{R}_A$ como una carga desconocida (figura 11.51) y se calculará teniendo en cuenta que la deflexión y_A en A debe ser cero. Por el teorema de Castigliano $y_A = \partial U/\partial R_A$, donde U es la energía de deformación de la viga bajo la carga distribuida y la reacción redundante. De la ecuación (11.70), resulta

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \qquad (11.87)$$

Ahora se expresa el momento flector M para la carga de la figura 11.51.

El momento flector a una distancia x de A es

$$M = R_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.88)$$

y su derivada con respecto a R_A es

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \qquad (11.89)$$

Sustituyendo M y $\partial M/\partial R_A$ de (11.88) y (11.89) en (11.87), se escribe

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{1}{2}wx^3\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right)$$

Haciendo $y_A = 0$ y despejando a R_A, resulta

$$R_A = \tfrac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{3}{8}wL\uparrow$$

De las condiciones de equilibrio de la viga, se tiene que la reacción en B consta de los siguientes fuerza y par:

$$\mathbf{R}_B = \tfrac{5}{8}wL\uparrow \qquad \mathbf{M}_B = \tfrac{1}{8}wL^2 \curvearrowright$$

EJEMPLO 11.16

Una carga **P** está apoyada en B por tres barras del mismo material y la misma sección transversal de área (figura 11.52). Determine la fuerza en cada barra.

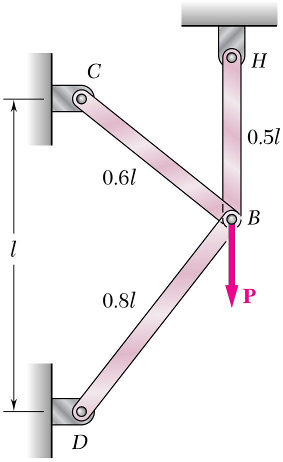


Figura 11.52

La estructura es estáticamente indeterminada de primer grado. Se considera la reacción en H como redundante y se suelta la barra BH de su apoyo en H. Ahora la reacción $\mathbf{R}_H$ es una carga desconocida (figura 11.53) y se determinará teniendo en cuenta que la deflexión y_H del punto H debe ser cero. Por el teorema de Castigliano $y_H = \partial U/\partial R_H$, donde U es la energía de deformación del sistema de tres barras bajo la carga **P** y la reacción redundante $\mathbf{R}_H$. De la ecuación (11.72), se escribe

$$y_H = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} + \frac{F_{BH}(BH)}{AE}\frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} \tag{11.90}$$

Puede notarse que la fuerza en la barra BH es igual a R_H y por tanto

$$F_{BH} = R_H \tag{11.91}$$

Entonces del diagrama de cuerpo libre del pasador B (figura 11.54) se obtiene

$$F_{BC} = 0.6P - 0.6R_H \qquad F_{BD} = 0.8R_H - 0.8P \tag{11.92}$$

Derivando con respecto a R_H, la fuerza en cada barra, se tiene

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} = -0.6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} = 0.8 \qquad \frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} = 1 \tag{11.93}$$

Sustituyendo de (11.91), (11.92) y (11.93) en (11.90), y notando que las longitudes BC, BD y BH son, respectivamente, iguales a $0.6l$, $0.8l$ y $0.5l$, se obtiene

$$y_H = \frac{1}{AE}[(0.6P - 0.6R_H)(0.6l)(-0.6) + (0.8R_H - 0.8P)(0.8l)(0.8) + R_H(0.5l)(1)]$$

Haciendo $y_H = 0$, resulta

$$1.228R_H - 0.728P = 0$$

y, resolviendo para R_H,

$$R_H = 0.593P$$

Llevando este valor a las ecuaciones (11.91) y (11.92), se obtienen las fuerzas en las tres barras:

$$F_{BC} = +0.244P \qquad F_{BD} = -0.326P \qquad F_{BH} = +0.593P$$

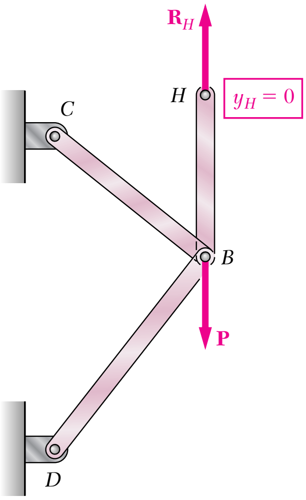


Figura 11.53

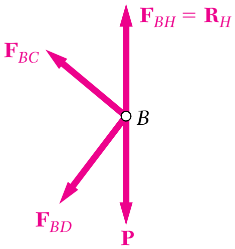
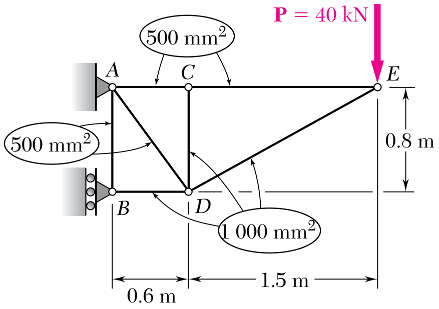


Figura 11.54

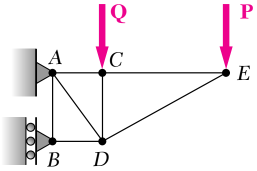
PROBLEMA MODELO 11.5

Para la armadura y carga del problema modelo 11.4, determine la deflexión vertical del nodo C.



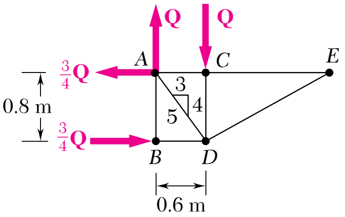
SOLUCIÓN

Teorema de Castigliano. Como no hay fuerza vertical en el nodo C, se introduce la carga ficticia $\mathbf{Q}$ como se muestra en la figura. Usando el teorema de Castigliano, donde F_i es la fuerza en un elemento dado bajo la carga combinada de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y $E =$ constante.



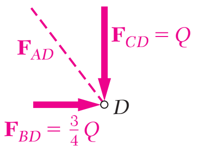
$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}\sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} \qquad (1)$$

Fuerza en los elementos. Considerando en secuencia el equilibrio de los nodos E, C, B y D, se determina la fuerza en cada elemento causado por la carga $\mathbf{Q}$.

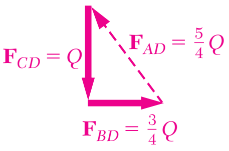


Nodo E: $F_{CE} = F_{DE} = 0$
Nodo C: $F_{AC} = 0;\ F_{CD} = -Q$
Nodo B: $F_{AB} = 0;\ F_{BD} = -\frac{3}{4}Q$

Nodo D



Triángulo de fuerza


$\mathbf{F}_{CD} = Q$
$\mathbf{F}_{AD} = \frac{5}{4}Q$
$\mathbf{F}_{BD} = \frac{3}{4}Q$

En el problema modelo 11.4 se calculó previamente la fuerza que $\mathbf{P}$ ejerce en cada elemento. La fuerza total en cada elemento bajo la acción combinada de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ se muestra en la siguiente tabla. Formando $\partial F_i/\partial Q$ para cada elemento, se calcula $(F_i L_i/A_i)(\partial F_i/\partial Q)$ como se indica en la tabla.

Elemento	F_i	$\partial F_i/\partial Q$	L_i, m	A_i, m²	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0.6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$\frac{5}{4}$	1.0	500×10^{-6}	$+3\,125P\ +3\,125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-\frac{3}{4}$	0.6	$1\,000 \times 10^{-6}$	$+1\,181P\ +\ 338Q$
CD	$-Q$	-1	0.8	$1\,000 \times 10^{-6}$	$+\ 800Q$
CE	$+15P/8$	0	1.5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1.7	$1\,000 \times 10^{-6}$	0

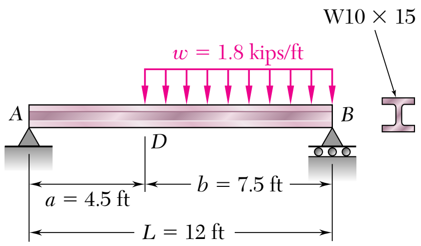
$$\sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4\,306P + 4\,263Q$$

Deflexión de C. Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

$$y_C = \frac{1}{E}\sum\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}(4\,306P + 4\,263Q)$$

Se hace ahora $Q = 0$, teniendo en cuenta que la carga $\mathbf{Q}$ no forma parte de la original, y sustituyendo los datos dados, $P = 40$ kN y $E = 73$ GPa, resulta

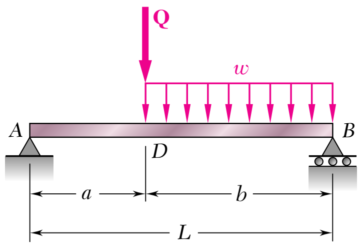
$$y_C = \frac{4\,306(40 \times 10^3 \text{ N})}{73 \times 10^9 \text{ Pa}} = 2.36 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad y_C = 2.36 \text{ mm}\downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 11.6

Para la viga y carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto D. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

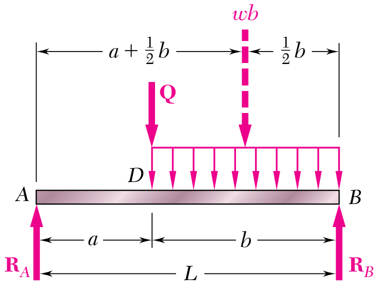
SOLUCIÓN



Teorema de Castigliano. Como las cargas dadas no incluyen una carga vertical en D, se introduce una ficticia **Q** como se muestra. Usando el teorema de Castigliano y notando que la rigidez flexional EI es constante, se escribe

$$y_D = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx \qquad (1)$$

Se integra separadamente para las porciones AD y DB de la viga.



Reacciones. Usando el diagrama de cuerpo libre de la viga completa, se tiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{wb(a+\frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\uparrow$$

Porción AD de la viga. Usando el diagrama de cuerpo libre que muestra la figura se halla

$$M_1 = R_A x = \left(\frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\right)x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = +\frac{bx}{L}$$

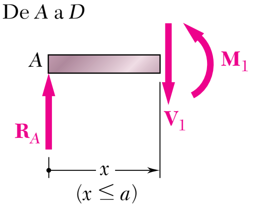
Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde A hasta D,

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}dx = \frac{1}{EI}\int_0^a R_A x\left(\frac{bx}{L}\right)dx = \frac{R_A a^3 b}{3EIL}$$

Se sustituye a R_A y luego se hace $Q = 0$.

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}dx = \frac{wa^3b^3}{6EIL^2} \qquad (2)$$

De A a D



Porción DB de la viga. Empleando el cuerpo libre mostrado, se tiene que el momento flector a una distancia v del extremo B es

$$M_2 = R_B v - \frac{wv^2}{2} = \left[\frac{wb(a+\frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\right]v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = +\frac{av}{L}$$

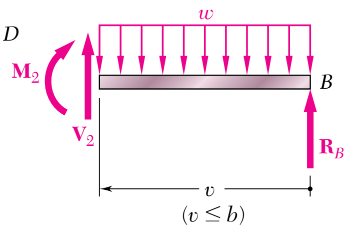
Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde el punto B, donde $v = 0$, hasta D donde $v = b$, se escribe

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}dv = \frac{1}{EI}\int_0^b \left(R_B v - \frac{wv^2}{2}\right)\left(\frac{av}{L}\right)dv = \frac{R_B ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL}$$

Sustituyendo R_B y haciendo $Q = 0$,

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}dv = \left[\frac{wb(a+\frac{1}{2}b)}{L}\right]\frac{ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL} = \frac{5a^2b^4 + ab^5}{24EIL^2}w \qquad (3)$$

De B a D

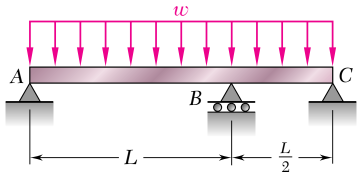


Deflexión en el punto D. Combinando los resultados de las ecuaciones (1), (2) y (3) se tiene

$$y_D = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a^2 + 5ab + b^2) = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a+b)(a+b) = \frac{wab^3}{24EIL}(4a+b)$$

En el apéndice C, se tiene que, para un perfil W10 × 15, $I = 68.9$ in.^{4}. Sustituyendo los valores de I, w, a, b y L se obtiene

$y_D = 0.262$ in. ↓ ◀

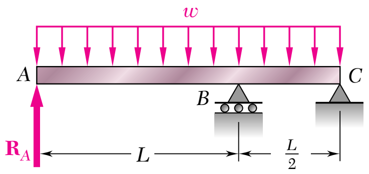

w
A
C
B
L
$\frac{L}{2}$

PROBLEMA MODELO 11.7

Para la viga uniforme y la carga mostradas en la figura, determine las reacciones en los apoyos.

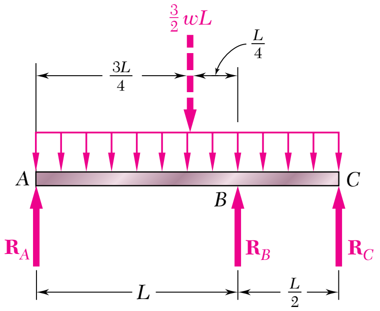
SOLUCIÓN

Teorema de Castigliano. La viga es indeterminada de primer grado y se toma la reacción $\mathbf{R}_A$ como redundante. Usando el teorema de Castigliano, se hallará la deflexión en A debida a la acción combinada de $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Como la rigidez flexional EI es constante:


w
A
C
B
$\mathbf{R}_A$
L
$\frac{L}{2}$

$$y_A=\int\frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial R_A}\right)dx=\frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \tag{1}$$

La integración se hará separadamente para las porciones AB y BC de la viga. Finalmente, se obtiene $\mathbf{R}_A$ haciendo $y_A=0$.

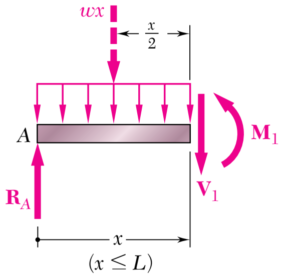

$\frac{3}{2}wL$
$\frac{L}{4}$
$\frac{3L}{4}$
A
C
B
$\mathbf{R}_A$
$\mathbf{R}_B$
$\mathbf{R}_C$
L
$\frac{L}{2}$

Cuerpo libre: viga completa. Se expresan las reacciones en B y C en función de R_A y la carga distribuida

$$R_B=\tfrac{9}{4}wL-3R_A \qquad R_C=2R_A-\tfrac{3}{4}wL \tag{2}$$

Porción AB de la viga. Usando el diagrama de cuerpo libre mostrado, se encuentra que

De A a B


wx
$\frac{x}{2}$
A
$\mathbf{M}_1$
$\mathbf{V}_1$
$\mathbf{R}_A$
x
$(x\le L)$

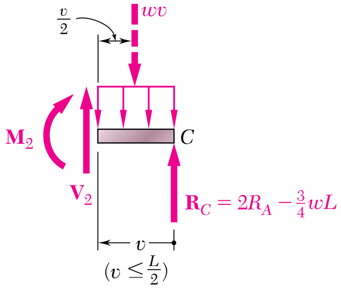
$$M_1=R_Ax-\frac{wx^2}{2} \qquad \frac{\partial M_1}{\partial R_A}=x$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde A hasta B, se tiene

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx=\frac{1}{EI}\int_0^L\left(R_Ax^2-\frac{wx^3}{2}\right)dx=\frac{1}{EI}\left(\frac{R_AL^3}{3}-\frac{wL^4}{8}\right) \tag{3}$$

Porción BC de la viga. Se escribe

De C a B


$\frac{v}{2}$
wv
C
$\mathbf{M}_2$
$\mathbf{V}_2$
$\mathbf{R}_C=2R_A-\frac{3}{4}wL$
v
$(v\le\frac{L}{2})$

$$M_2=\left(2R_A-\frac{3}{4}wL\right)v-\frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial R_A}=2v$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde C, donde $v=0$, hasta B donde $v=\frac{1}{2}L$, se tiene

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial R_A}\,dv=\frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(4R_Av^2-\frac{3}{2}wLv^2-wv^3\right)dv$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{R_AL^3}{6}-\frac{wL^4}{16}-\frac{wL^4}{64}\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{R_AL^3}{6}-\frac{5wL^4}{64}\right) \tag{4}$$

Reacción en *A*. Sumando las expresiones halladas en (3) y (4) se obtiene y_A y se hace igual a cero.

$$y_A=\frac{1}{EI}\left(\frac{R_AL^3}{3}-\frac{wL^4}{8}\right)+\frac{1}{EI}\left(\frac{R_AL^3}{6}-\frac{5wL^4}{64}\right)=0$$

Despejando R_A, $\qquad R_A=\frac{13}{32}wL \qquad R_A=\frac{13}{32}wL\uparrow$ ◀

Reacciones en *B* y en *C*. Reemplazando R_A en la ecuación (2) se obtiene

$$R_B=\frac{33}{32}wL\uparrow \qquad R_C=\frac{wL}{16}\uparrow$$ ◀

PROBLEMAS

11.77 a 11.79 Use la información del apéndice D para calcular el trabajo de las cargas al aplicarlas sobre la viga *a*) si se aplica primero la carga **P** y *b*) si se aplica primero el par **M**.

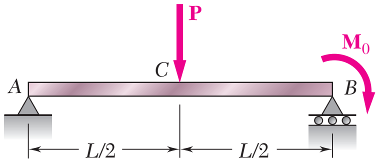

P
M$_0$
C
A
B
L/2
L/2

Figura P11.77

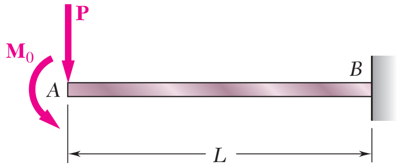


Figura *P11.78*

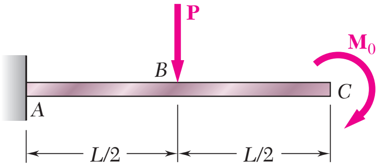

P
M$_0$
B
A
C
L/2
L/2

Figura P11.79

***11.80* a 11.82** Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, *a*) calcule el trabajo de las cargas al aplicarlas sucesivamente a la viga, para ello utilice la información del apéndice D, *b*) calcule la energía de deformación de la viga mediante el método de la sección 11.4 y demuestre que es igual al trabajo obtenido en el inciso *a*).

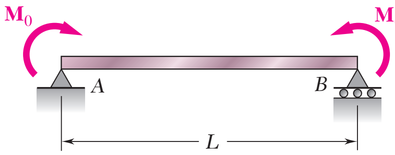


Figura *P11.80*

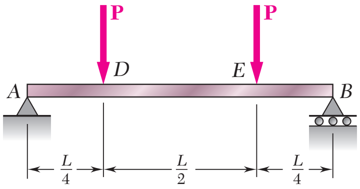

P
P
D
E
A
B
$\frac{L}{4}$
$\frac{L}{2}$
$\frac{L}{4}$

Figura P11.81

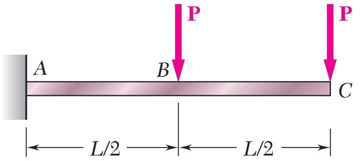


Figura P11.82

11.83 y 11.84 Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la deflexión del punto *D*.

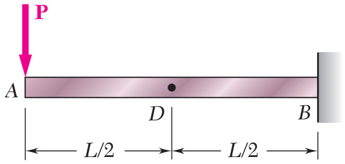


Figura P11.83 y P11.85

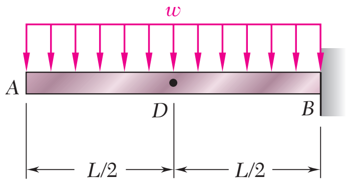


Figura P11.84 y *P11.86*

11.85 y *11.86* Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la pendiente en el punto *D*.

11.87 Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la pendiente en el punto *B*.

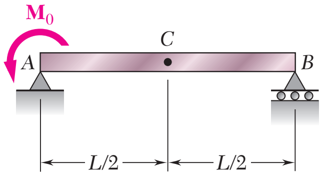


Figura P11.87

11.88 y 11.89 Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la deflexión en el punto D.

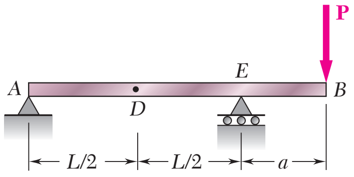

P
A
E
B
D
L/2
L/2
a

Figura P11.88 y *P11.90*

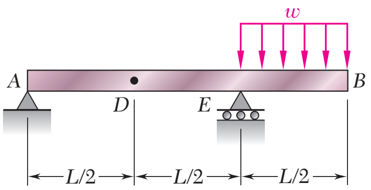

w
A
B
D
E
L/2
L/2
L/2

Figura P11.89 y P11.91

***11.90* y 11.91** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la pendiente en el punto D.

11.92 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión en el punto A. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

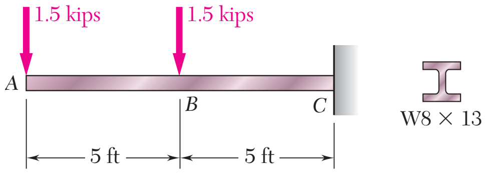

1.5 kips
1.5 kips
A
B
C
W8 × 13
5 ft
5 ft

Figura P11.92 y *P11.93*

11.93 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión en el punto B. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

11.94 y 11.95 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la deflexión en el punto B. Utilice $E = 200$ GPa.

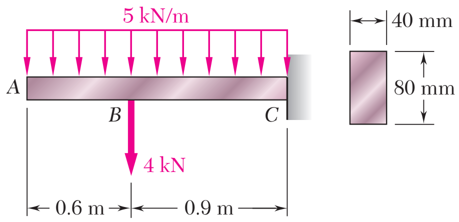

5 kN/m
40 mm
A
B
C
80 mm
4 kN
0.6 m
0.9 m

Figura P11.94

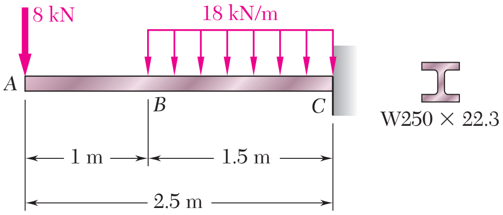

8 kN
18 kN/m
A
B
C
W250 × 22.3
1 m
1.5 m
2.5 m

Figura P11.95

11.96 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente en el extremo A. Utilice $E = 200$ GPa.

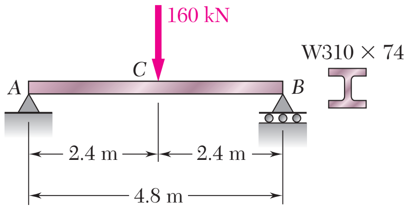

160 kN
W310 × 74
C
A
B
2.4 m
2.4 m
4.8 m

Figura P11.96

11.97 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión en el punto C. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

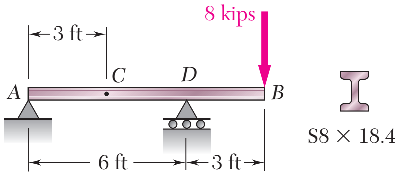

8 kips
3 ft
C
D
A
B
S8 × 18.4
6 ft
3 ft

Figura *P11.97* y P11.98

11.98 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente en el extremo A. Utilice $E = 200$ GPa.

11.99 y *11.100* Cada uno de los elementos de la armadura que se ilustra en la figura está hecho de acero y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión que se indica a continuación.

11.99 Deflexión vertical de la unión C.

11.100 Deflexión horizontal de la unión C.

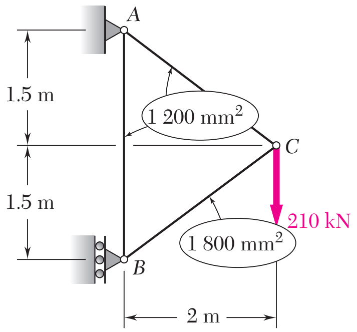


Figura P11.99 y *P11.100*

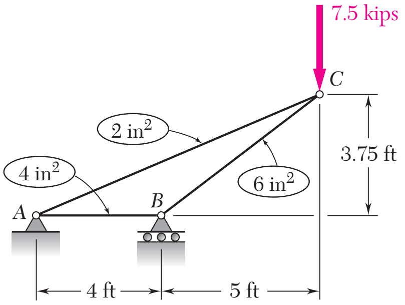


Figura P11.101 y P11.102

11.101 y 11.102 Cada uno de los elementos de la armadura que se ilustra en la figura está hecho de acero y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la deflexión que se indica a continuación.

11.101 Deflexión vertical de la unión C.

11.102 Deflexión horizontal de la unión C.

11.103 y *11.104* Cada uno de los elementos de la armadura que se ilustra en la figura está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de 500 mm^2. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión que se indica a continuación.

11.103 Deflexión vertical de la unión B.

11.104 Deflexión horizontal de la unión B.

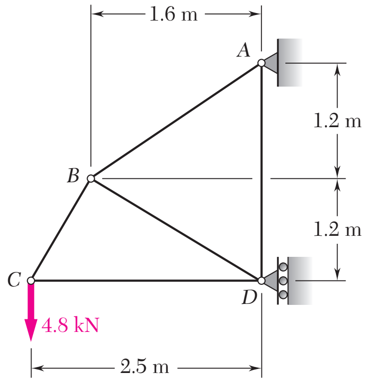


Figura P11.103 y *P11.104*

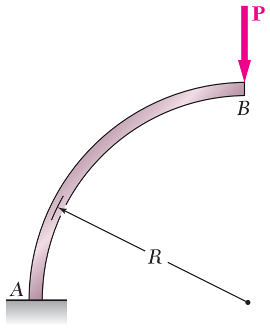


Figura P11.105

11.105 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine por medio del teorema de Castigliano *a*) la deflexión horizontal del punto B, *b*) la deflexión vertical del punto B.

11.106 Para la varilla uniforme y la carga que se muestran en la figura, determine por medio del teorema de Castigliano la deflexión del punto B.

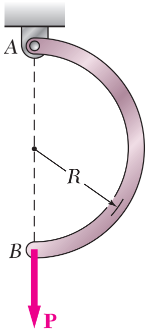


Figura P11.106

11.107 Dos barras *AB* y *BC*, que tienen la misma rigidez a la flexión *EI*, se sueldan en el punto *B*. Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la deflexión en el punto *C*, *b*) la pendiente del elemento *BC* en el punto *C*.

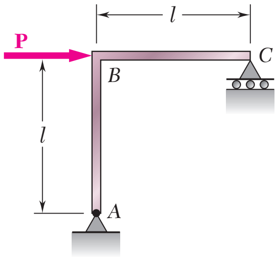


Figura P11.107

11.108 Una barra uniforme con rigidez a la flexión *EI* está doblada y soporta una carga como se indica en la figura. Determine *a*) la deflexión horizontal del punto *D*, *b*) la pendiente en el punto *D*.

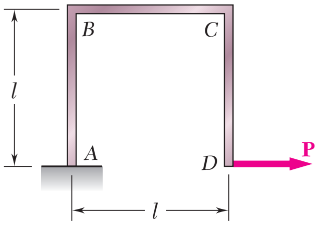


Figura *P11.108* y P11.109

11.109 Una barra uniforme con rigidez a la flexión *EI* está doblada y soporta una carga como se indica en la figura. Determine *a*) la deflexión vertical del punto *D*, *b*) la pendiente *BC* en el punto *C*.

11.110 Una barra uniforme con rigidez a la flexión *EI* está doblada y soporta una carga como se indica en la figura. Determine *a*) la deflexión vertical del punto *A*, *b*) la deflexión horizontal del punto *A*.

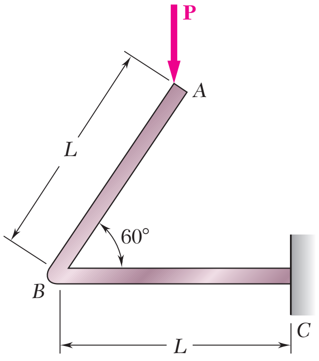


Figura *P11.110*

11.111 a 11.114 Determine la reacción en el apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

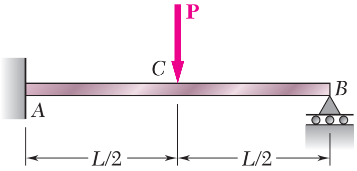


Figura P11.111

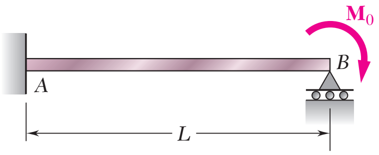


Figura P11.112

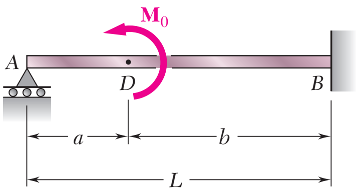


Figura *P11.113*

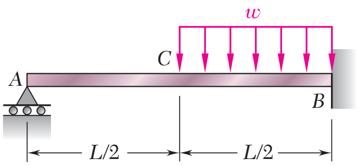


Figura P11.114

11.115 Determine la reacción del apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

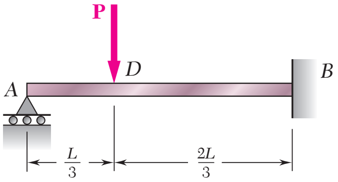

P
D
B
A
$\frac{L}{3}$
$\frac{2L}{3}$

Figura *P11.115*

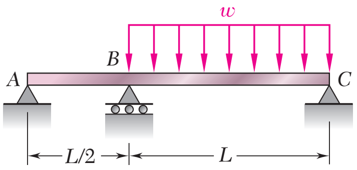


Figura P11.116

11.116 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la reacción en cada apoyo.

11.117 a *11.120* Tres elementos del mismo material y con la misma área de sección transversal se utilizan para soportar la carga **P**. Determine la fuerza en el elemento *BC*.

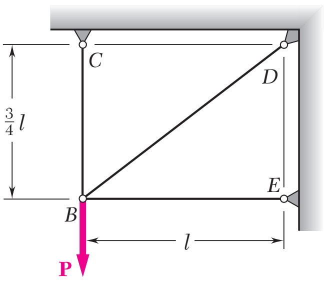

C
D
$\frac{3}{4}l$
E
B
P
l

Figura P11.117

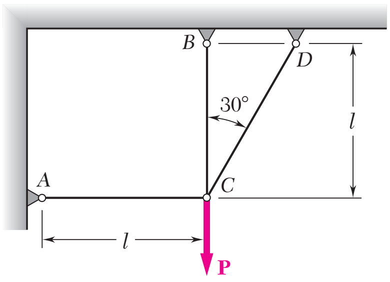


Figura P11.118

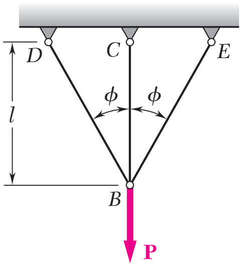


Figura P11.119

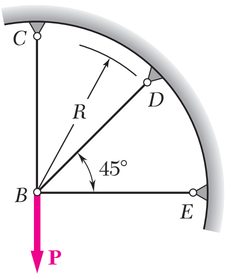


Figura *P11.120*

11.121 y 11.122 Si se sabe que los ocho elementos de la armadura indeterminada que se muestran en las figuras tienen la misma área en su sección transversal uniforme, determine la fuerza en el elemento *AB*.

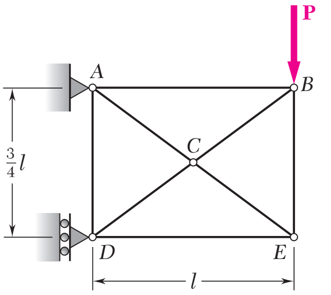

P
A
B
C
$\frac{3}{4}l$
D
E
l

Figura P11.121

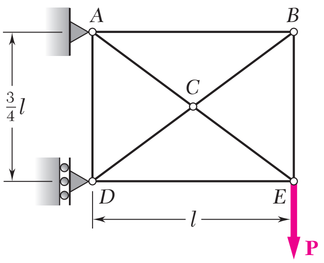

A
B
C
$\frac{3}{4}l$
D
E
l
P

Figura P11.122

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 11

En este capítulo se estudió la energía de deformación y la manera como puede usarse para calcular los esfuerzos y las deformaciones en estructuras sometidas a cargas estáticas y de impacto.

En la sección 11.2 se estudió una barra uniforme sujeta a una carga axial lentamente incrementada **P** (figura 11.1). Se observó que el área bajo el diagrama de carga-deformación (figura 11.3) representa el trabajo hecho por **P**. Este trabajo es igual a la *energía de deformación* de la barra asociada con la deformación causada por la carga **P**:

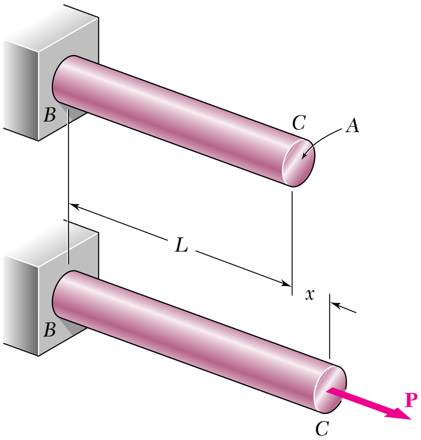


Figura 11.1

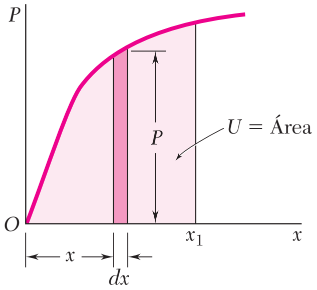


Figura 11.3

Energía de deformación

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \qquad (11.2)$$

Densidad de energía de deformación

Dado que el esfuerzo es uniforme en la barra, fue posible dividir la energía de deformación entre su volumen y obtener la energía de deformación por unidad de volumen o *densidad de energía de deformación* del material [sección 11.3]. Se encontró que:

$$\text{Densidad de energía de deformación} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x\,d\epsilon_x \qquad (11.4)$$

y se observó que la densidad de energía de deformación es igual al área bajo el diagrama esfuerzo-deformación del material (figura 11.6). Como se vio en la sección 11.4, la ecuación (11.4) es válida cuando los esfuerzos no se distribuyen de manera uniforme, pero la densidad de energía de deformación varía de un punto a otro. Si el material carece de descargado, hay una deformación permanente ϵ_p y sólo la densidad de energía de deformación correspondiente al área triangular se recupera, el resto de la energía se disipa en forma de calor durante la deformación del material.

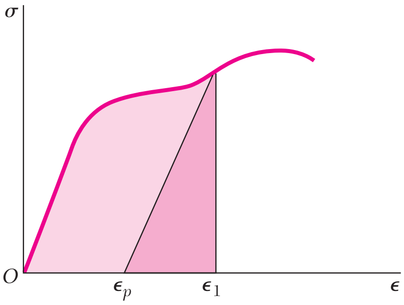


Figura 11.6

Módulo de tenacidad

El área bajo el diagrama completo de esfuerzo-deformación se definió como *módulo de tenacidad* y es una medida de la energía total que puede adquirir el material.

Si el esfuerzo normal σ, permanece dentro del límite proporcional del material, la densidad de energía de deformación u se expresa como

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Módulo de resiliencia

El área bajo la curva de esfuerzo-deformación desde cero deformación hasta el esfuerzo de fluencia ϵ_Y (figura 11.9) es el *módulo de resiliencia* del material y representa la energía por unidad de volumen que el material puede absorber sin fluir. Se escribió

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \tag{11.8}$$

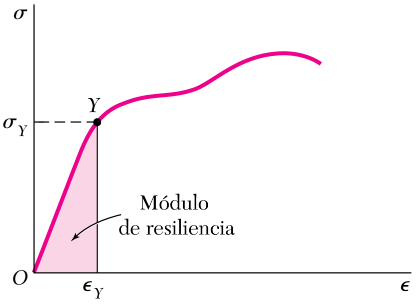


Figura 11.9

En la sección 11.4 se aplicó la energía de deformación asociada con *esfuerzos normales*. Se analizó que si una barra de longitud L y *sección transversal variable de área A* se somete en su extremo a una carga axial céntrica **P**, la energía de deformación de la barra es

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE}\,dx \tag{11.13}$$

Energía de deformación bajo carga axial

Si la barra es de *sección transversal uniforme* de área A, la energía de deformación es

$$U = \frac{P^2L}{2AE} \tag{11.14}$$

Energía de deformación debida a flexión

Igualmente se concluyó que la energía de deformación asociada con esfuerzos normales, para una viga con cargas transversales (figura 11.15), es

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \tag{11.17}$$

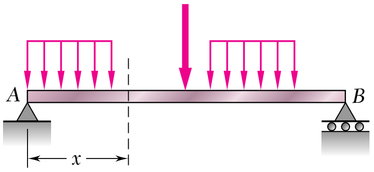


Figura 11.15

donde M es el momento flector y EI la rigidez flexional de la viga.

Energía de deformación debido a esfuerzos cortantes

La energía de deformación asociada con *esfuerzos cortantes* se consideró en la sección 11.5. Se observó que la densidad de energía de deformación para un material a cortante puro es

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{11.19}$$

donde τ_{xy} es el esfuerzo cortante y G el módulo de rigidez del material.

Energía de deformación por torsión

Para un eje de longitud L y sección transversal uniforme sometido en sus extremos a pares de magnitud T (figura 11.19) la energía de deformación era

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.22}$$

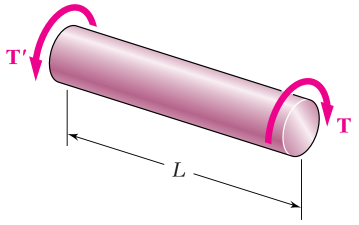


Figura 11.19

en donde J es el momento polar de inercia del área de la sección transversal del eje.

Estado general de esfuerzos

En la sección 11.6 se aplicó la energía de deformación de un material elástico isotrópico bajo un estado general de esfuerzo y se expresó la densidad de energía de deformación, en un punto dado, en función de los esfuerzos principales σ_a, σ_b y σ_c en ese punto:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu\,(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)\right] \quad (11.27)$$

La densidad de energía de deformación en un punto dado se dividió en dos partes: u_ν, asociada con un cambio de volumen en ese punto y u_d, asociada con la distorsión del material en el mismo punto. Se escribió $u = u_\nu + u_d$, donde

$$u_\nu = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \quad (11.32)$$

y

$$u_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2\right] \quad (11.33)$$

Se dedujo el criterio de la máxima energía de distorsión usando la expresión para u_d, que se utilizó en la sección 7.7 para predecir si un material dúctil fluiría bajo un estado de esfuerzo plano conocido.

Carga de impacto

Carga estática equivalente

En la sección 11.7 se tuvo en cuenta la *carga de impacto* de una estructura elástica golpeada por una masa con velocidad dada. Se supuso que la energía cinética de la masa se transfiere totalmente a la estructura y se definió como *carga estática equivalente* a la que produciría las mismas deformaciones y esfuerzos que los realizados por la carga de impacto.

Luego de analizar algunos ejemplos, se observó que una estructura diseñada para soportar de manera efectiva una carga de impacto debe formarse de tal manera que los esfuerzos estén distribuidos homogéneamente a través de la estructura y que el material utilizado tenga un bajo módulo de elasticidad y un alto límite de fluencia [sección 11.8].

Elementos sometidos a carga única

En la sección 11.9 se consideró la energía de deformación de elementos estructurados sometidos a *carga única*. En el caso de la viga y carga de la figura 11.27, se encontró que la energía de deformación de la viga es

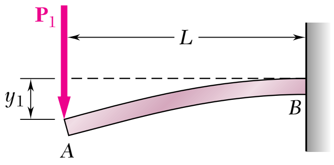


Figura 11.27

$$U = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \quad (11.46)$$

Como el trabajo realizado por la fuerza **P** es igual a $\frac{1}{2}P_1 y_1$, se equiparó dicho trabajo a la energía de deformación y se determinó la deflexión y_1 en el punto de aplicación de la carga [véase sección 11.10 y ejemplo 11.10].

El método descrito está limitado a las estructuras bajo una fuerza única concentrada y a la determinación de la deflexión en el punto de aplicación de la fuerza. En las siguientes secciones del capítulo, se presentó un método más general, utilizable para calcular deflexiones en varios puntos de estructuras sometidas a varias cargas.

Teorema de Castigliano

En la sección 11.11 se analizó la energía de deformación de una estructura con varias cargas y en la sección 11.12 se introdujo el *teorema de Castigliano*, que establece la igualdad entre la deflexión x_j, del punto de aplicación de una carga $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$, y la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a $\mathbf{P}_j$. Resultó

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

También se estableció que podía aplicarse el teorema de Castigliano para calcular la *pendiente* de una viga en el punto de aplicación de un par $\mathbf{M}_j$ escribiendo

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{11.68}$$

y también el *ángulo de torsión* en una sección de un eje donde se ha aplicado un par de torsión $\mathbf{T}_j$,

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{11.69}$$

En la sección 11.13 se aplicó el teorema de Castigliano para calcular deflexiones y pendientes en diferentes partes de una estructura dada. El uso de variables "ficticias" permitió incluir puntos donde no actuaban fuerzas. Igualmente se observó que el cálculo de una deflexión x_j se facilitaba si la derivación con respecto a la carga P_j se realizaba antes de la integración. En el caso de una viga, recordando la ecuación (11.17), resultó

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}\,dx \tag{11.70}$$

De manera análoga, para una armadura con n elementos, la deflexión x_j del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$ se escribió como

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.72}$$

Estructuras indeterminadas

El capítulo concluyó [sección 11.14] con la aplicación del teorema de Castigliano al análisis de *estructuras estáticamente indeterminadas* [véase problema modelo 11.7 y los ejemplos 11.15 y 11.16].

PROBLEMAS DE REPASO

11.123 La barra *AB* está hecha de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 65$ ksi y su módulo de elasticidad es $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se sabe que la barra puede adquirir una energía de deformación de 60 in. · lb cuando se aplica la carga axial **P**, determine el factor de seguridad de la barra respecto de la deformación permanente.

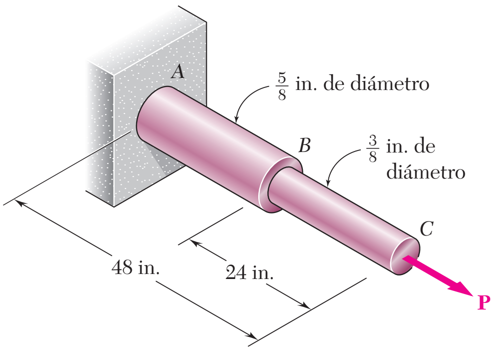


Figura P11.123

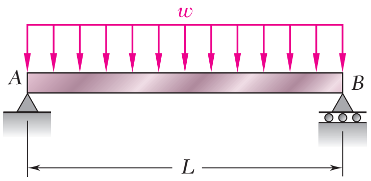


Figura *P11.124*

11.124 Determine la energía de deformación de la viga prismática *AB* para la carga que se muestra en la figura. Considere sólo el efecto de los esfuerzos normales.

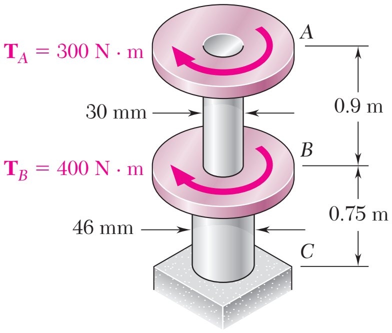


Figura P11.125

11.125 En el ensamble mostrado en la figura, se ejercen los pares de torsión $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ sobre los discos *A* y *B*, respectivamente. Si se sabe que ambos ejes son sólidos y están hechos de aluminio ($G = 73$ GPa), determine la energía de deformación total adquirida por el ensamble.

11.126 Un solo pasador *B* de acero de 6 mm de diámetro se utiliza para conectar las tiras de acero *DE* a dos tiras de aluminio, cada una de las cuales mide 20 mm de ancho y 5 mm de espesor. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible para el pasador en *B* es $\sigma_{\text{perm}} = 85$ MPa, determine, para la carga mostrada en la figura, la máxima energía de deformación que puede asimilar el ensamble de tiras.

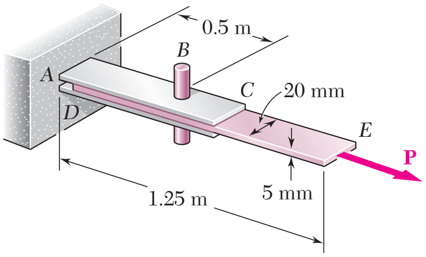


Figura *P11.126*

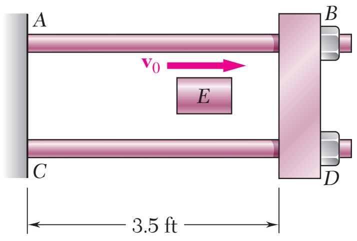


Figura P11.127

11.127 El bloque cilíndrico *E* tiene una velocidad $v_0 = 16$ ft/s cuando golpea el yugo *BD* que se encuentra unido a las barras *AB* y *CD* de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro. Si se sabe que las barras están hechas de un acero con $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el peso del bloque *E* para el cual se tiene un factor de seguridad de cinco respecto de la deformación permanente de las barras.

11.128 Un bloque de peso *W* está en contacto con una viga en algún punto dado *D* y se suelta. Demuestre que la deflexión máxima resultante en el punto *D* es dos veces mayor que la deflexión debida a una carga estática *W* que se aplicará en *D*.

11.129 La barra de acero *ABC* de 12 mm de diámetro se ha doblado en la forma que se aprecia en la figura. Si se sabe que $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa, determine la deflexión en el extremo *C* ocasionada por la fuerza de 150 N.

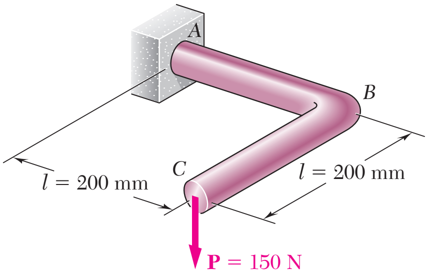


Figura P11.129

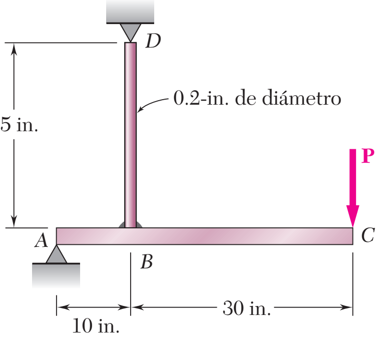


Figura *P11.130*

11.130 La barra de acero *ABC* tiene una sección transversal cuadrada de 0.75 in. por lado y está sujeta a una carga **P** de 50 lb. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la deflexión del punto *C*.

11.131 Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura está hecho de acero; el área de la sección transversal del elemento *BC* es de 800 mm², y todas las áreas de las otras secciones transversales son de 400 mm². Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión del punto *D* causada por la carga de 60 kN.

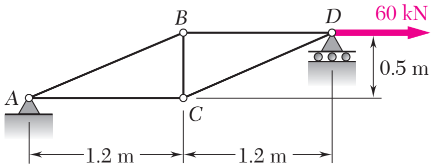


Figura P11.131

11.132 Se ha soldado un disco de radio *a* al extremo *B* del eje de acero sólido *AB*. Luego se enrolló un cable alrededor del disco y se aplica una fuerza **P** al extremo *C* del cable. Si se sabe que el radio del eje es *r* y se desprecian las deformaciones del disco y del cable, demuestre que la deflexión del punto *C* ocasionada por la aplicación de **P** es

$$\delta_C = \frac{PL^2}{3EI}\left(1 + 1.5\,\frac{Er^2}{GL^2}\right)$$

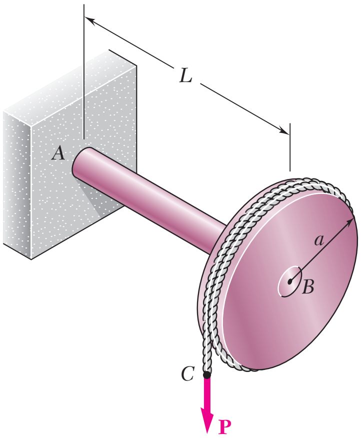


Figura P11.132

11.133 Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la deflexión del punto *D*.

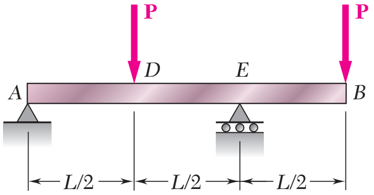


Figura *P11.133*

11.134 Tres barras, cada una con la misma rigidez a la flexión *EI*, se sueldan para formar el bastidor *ABCD*. Para la carga que se muestra en la figura, determine el ángulo formado por el bastidor en el punto *D*.

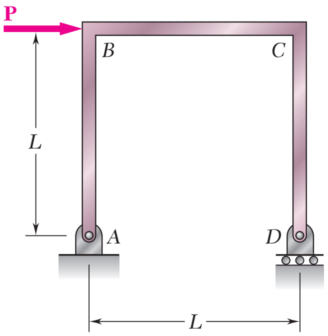


Figura P11.134

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para resolverse con la ayuda de una computadora.

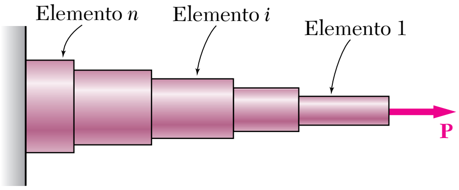


Figura P11.C1

11.C1 Una barra que consta de n elementos, cada uno homogéneo y de sección uniforme, se somete a una carga **P** en su extremo libre. La longitud del elemento i es L_i, y su diámetro d_i. *a*) Llamando E al módulo de elasticidad del material, escriba un programa para computadora que determine la energía de deformación adquirida por la barra y el alargamiento medido en el extremo libre. *b*) Utilice este programa para resolver los problemas 11.9 y 11.10.

11.C2 Se sueldan dos platinas de 0.75 × 6 in. a una viga W8 × 18 de acero laminado, como se ilustra en la figura. El bloque F de 1 500 lb es descargado desde una altura $h = 2$ in. sobre la viga. *a*) Escriba un programa de cómputo para calcular el esfuerzo normal máximo en secciones transversales justo a la izquierda de D y en el centro de la viga, para valores de a desde 0 a 60 in. en intervalos de 5 in. *b*) De los valores considerados en la parte *a*, elija la distancia a para la cual el máximo esfuerzo normal es el más pequeño posible. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

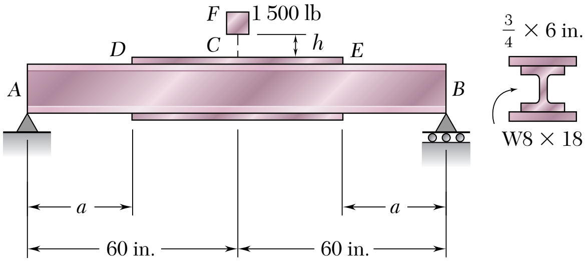


Figura P11.C2

11.C3 El bloque D de 16 kg se deja caer desde una altura h sobre el extremo libre de la barra de acero AB. Para el acero usado $\sigma_{\text{perm}} = 120$ MPa y $E = 200$ GPa. *a*) Escriba un programa que calcule la máxima altura h permisible para valores de la longitud L de 100 mm a 1.2 m en intervalos de 100 mm. *b*) De los valores de L considerados en la parte *a* elija la longitud correspondiente a la máxima altura permisible.

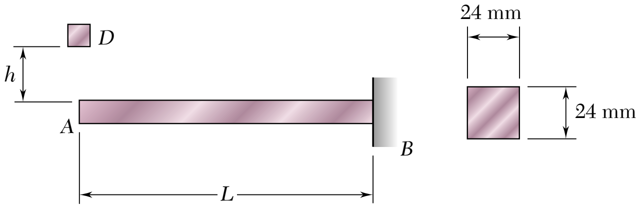


Figura P11.C3

11.C4 El bloque D de masa $m = 8$ kg se deja caer desde una altura $h = 750$ mm sobre la viga de acero laminado AB. Si $E = 200$ GPa, escriba un programa para computadora que calcule la deflexión máxima en el punto E y el máximo esfuerzo normal en la viga para valores de a de 100 a 900 mm en intervalos de 100 mm.

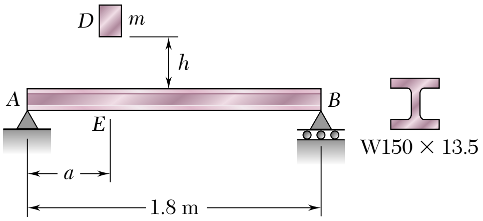


Figura P11.C4

11.C5 Las barras de acero AB y BC son de acero para el que $\sigma_Y = 300$ MPa y $E = 200$ GPa. *a*) Escriba un programa para computadora que calcule la máxima energía de deformación que puede adquirir el ensamble sin que se cause deformación permanente, para valores de a de 0 a 6 m, usando incrementos de 1 m. *b*) Para cada valor de a considerado, calcule el diámetro de una barra uniforme de 6 m de longitud de la misma masa que el ensamble original, y la máxima energía de deformación que podría adquirir dicha barra uniforme sin que se cause deformación permanente.

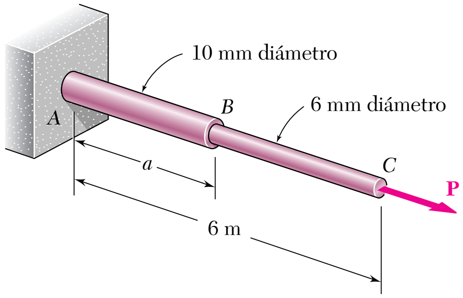


Figura P11.C5

11.C6 Un clavadista salta de una altura de 20 in. del extremo C de un trampolín que tiene la sección transversal uniforme que se muestra en la figura. Escriba un programa de cómputo que calcule, para valores de a de 10 a 50 in. con incrementos de 10 in., *a*) la deflexión máxima del punto C, *b*) el momento flector máximo en el trampolín, *c*) la carga estática equivalente. Suponga que las piernas del clavadista permanecen rígidas y considere $E = 1.8 \times 10^6$ psi.

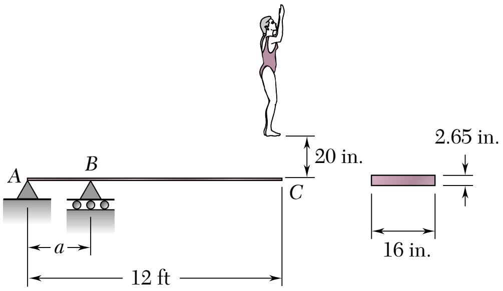


Figura P11.C6

Apéndices

APÉNDICE A Momentos de áreas 736
APÉNDICE B Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería 746
APÉNDICE C Propiedades de perfiles laminados de acero† 750
APÉNDICE D Deflexiones y pendientes de vigas 762
APÉNDICE E Fundamentos de la certificación en ingeniería en Estados Unidos 763

---

† Cortesía del American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

APÉNDICE

A

Momentos de áreas

A.1 PRIMER MOMENTO DE UN ÁREA: CENTROIDE DE UN ÁREA

Sea un área A en el plano xy (figura A.1). Si x y y son las coordenadas de un elemento de área dA, definimos el *primer momento del área A con respecto al eje x* como la integral

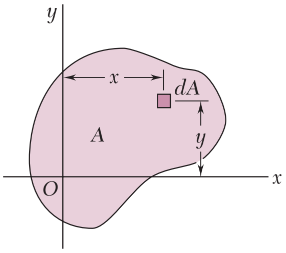


Figura A.1

$$Q_x = \int_A y\, dA \tag{A.1}$$

Análogamente, el *primer momento del área A con respecto al eje y* es la integral

$$Q_y = \int_A x\, dA \tag{A.2}$$

Observe que cada una de estas integrales puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo de la posición de los ejes. Si se usan unidades SI, los primeros momentos Q_x y Q_y se expresan en m^3 o mm^3; en unidades usuales en Estados Unidos se expresan en ft^3 o $\mathrm{in.}^3$.

El *centroide del área A* se define como el punto C de coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ (figura A.2) que satisfacen las relaciones

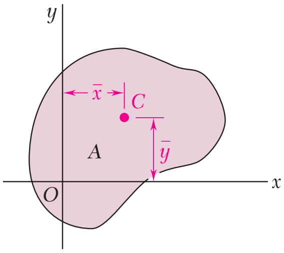


Figura A.2

$$\int_A x\, dA = A\bar{x} \qquad \int_A y\, dA = A\bar{y} \tag{A.3}$$

Comparando las ecuaciones (A.1) y (A.2) con las ecuaciones (A.3) se nota que los primeros momentos del área A pueden expresarse como los productos del área por las coordenadas de su centroide:

$$Q_x = A\bar{y} \qquad Q_y = A\bar{x} \tag{A.4}$$

Cuando un área posee un *eje de simetría*, el primer momento del área con respecto a su eje es cero. Ciertamente, considerando el área A de la figura A.3, simétrica con respecto al eje y se observa que a todo elemento dA de abscisa x corresponde un elemento de área dA' con abscisa $-x$. Se sigue que la integral en la ecuación (A.2) es cero y que $Q_y = 0$. Se sigue también, de la primera de las relaciones (A.3), que $\bar{x} = 0$. Por lo tanto, si un área posee un eje de simetría, su centroide estará en ese eje.

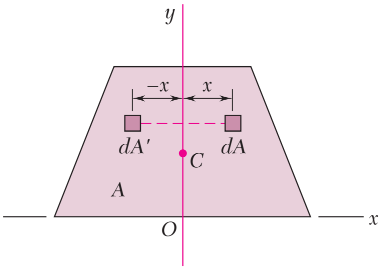
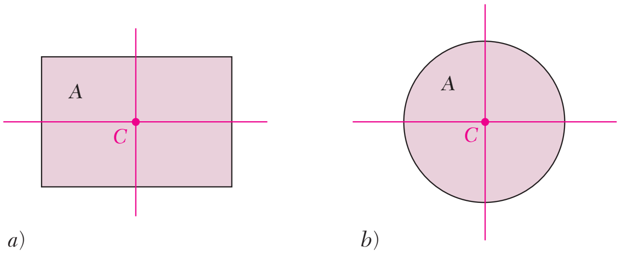


Figura A.3



a) b)

Figura A.4

Como un rectángulo posee dos ejes de simetría (figura A.4*a*), el centroide C de un área rectangular coincide con su centro geométrico. Análogamente, el centroide de un círculo coincide con el centro del círculo (figura A.4*b*).

Cuando un área posee un *centro de simetría O*, el primer momento del área con respecto a cualquier eje en O, es cero. Considerando el área A de la figura A.5, se observa que a todo elemento dA de coordenadas x y y corresponde un elemento dA' de coordenadas $-x$ y $-y$. Se tiene que las integrales en las ecuaciones (A.1) y (A.2) son ambas cero y que $Q_x = Q_y = 0$. También se tiene de las ecuaciones (A.3) que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, esto es, el centroide del área coincide con su centro de simetría.

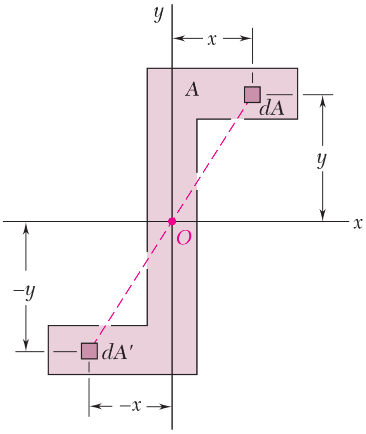


Figura A.5

Cuando el centroide C de un área puede localizarse por simetría, el primer momento de esa área con respecto a cualquier eje dado se calcula a partir de las ecuaciones (A.4). Por ejemplo, en el caso del rectángulo de la figura A.6, tenemos

$$Q_x = A\bar{y} = (bh)(\tfrac{1}{2}h) = \tfrac{1}{2}bh^2$$

y

$$Q_y = A\bar{x} = (bh)(\tfrac{1}{2}b) = \tfrac{1}{2}b^2h$$

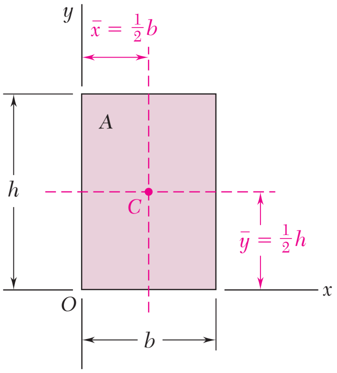


Figura A.6

En la mayoría de los casos, sin embargo, es necesario efectuar las integraciones indicadas en las ecuaciones (A.1) a (A.3) para determinar los primeros momentos y los centroides de un área dada. Aunque cada integral involucrada es realmente doble, en muchas aplicaciones es posible elegir elementos del área dA en la forma de delgadas tiras horizontales o verticales que reducen los cálculos a integrales de una sola variable. Esto se ilustra en el ejemplo A.01. Centroides de áreas comunes se indican en la cubierta posterior de este libro.

EJEMPLO A.01

Para el área triangular de la figura A.7, determine, *a*) el primer momento Q_x del área con respecto al eje x, *b*) la ordenada $\bar{y}$ del centroide del área.

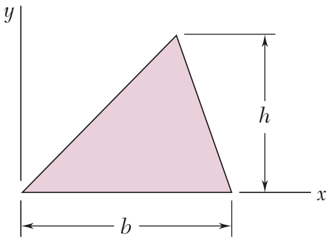


Figura A.7

a) Primer momento Q_x. Se elige como elemento de área una tira horizontal de longitud u y espesor dy, y notamos que todos los puntos del elemento están a la misma distancia y del eje x (figura A.8). Por triángulos semejantes:

$$\frac{u}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad u = b\frac{h - y}{h}$$

y

$$dA = u\,dy = b\frac{h - y}{h}\,dy$$

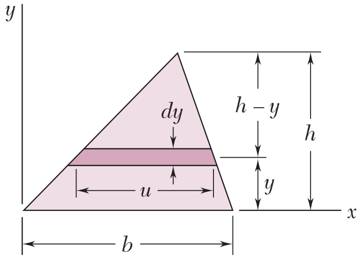


Figura A.8

El primer momento del área con respecto al eje x es:

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_0^h yb\frac{h - y}{h}\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)\,dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h \qquad Q_x = \tfrac{1}{6}bh^2$$

b) Ordenada del centroide. Recordando la primera de las ecuaciones (A.4) y como $A = \frac{1}{2}bh$,

$$Q_x = A\bar{y} \qquad \tfrac{1}{6}bh^2 = (\tfrac{1}{2}bh)\bar{y}$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

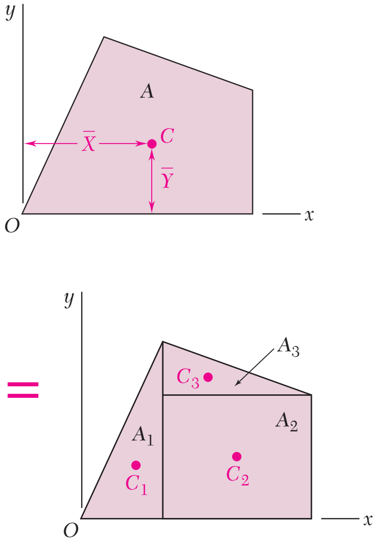


Figura A.9

A.2 DETERMINACIÓN DEL PRIMER MOMENTO Y CENTROIDE DE UN ÁREA COMPUESTA

Considere un área A, tal como el área trapezoidal de la figura A.9, que pueda dividirse en formas geométricas simples. Como se vio en la sección anterior, el primer momento Q_x del área con respecto al eje x es la integral $\int y\,dA$, que se extiende sobre el área A. Dividiendo A en componentes, A_1, A_2, A_3, se escribe

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,dA + \int_{A_3} y\,dA$$

o, recordando la segunda de las ecuaciones (A.3)

$$Q_x = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3$$

en donde $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ y $\bar{y}_3$ son las ordenadas de los centroides de las áreas componentes. Extendiendo estos resultados a un número arbitrario de áreas componentes y notando que una expresión similar puede obtenerse para Q_y, se escribe

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i \qquad Q_y = \sum A_i \bar{x}_i \tag{A.5}$$

Para obtener las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ del centroide C del área compuesta A, se sustituye $Q_x = A\bar{Y}$ y $Q_y = A\bar{X}$ en las ecuaciones (A.5). Se tiene

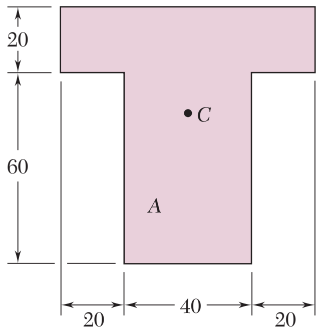
$$A\bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i \qquad A\bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i$$

Resolviendo para $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ y recordando que el área A es la suma de las áreas componentes A_i, se escribe

$$\bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} \tag{A.6}$$

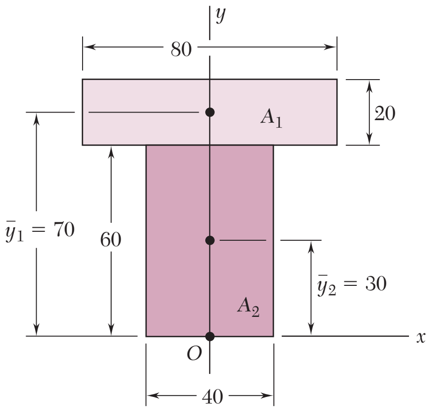
EJEMPLO A.02

Localice el centroide C del área A mostrada en la figura A.10.



Dimensiones en mm

Figura A.10



Dimensiones en mm

Figura A.11

Eligiendo el sistema de coordenadas de la figura A.11, se observa que el centroide C debe estar en el eje y puesto que este eje es de simetría; así, $\bar{X} = 0$.

Dividiendo A en sus componentes A_1 y A_2, se usa la segunda de las ecuaciones (A.6) para determinar la ordenada $\bar{Y}$ del centroide. El cálculo se realiza mejor en una tabla.

	Área, mm^2	**$\bar{y}_i$, mm**	**$A_i\bar{y}_i$, mm^3**
A_1	$(20)(80) = 1\,600$	70	112×10^3
A_2	$(40)(60) = 2\,400$	30	72×10^3
	$\sum_i A_i = 4\,000$		$\sum_i A_i\bar{y}_i = 184 \times 10^3$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 46 \text{ mm}$$

EJEMPLO A.03

Refiriéndose al área A del ejemplo A.02, considere el eje horizontal x' que pasa por el centroide C (el *eje centroidal*). Si A' es la porción de A localizada sobre el eje (figura A.12), determine el primer momento de A' con respecto al eje x'.

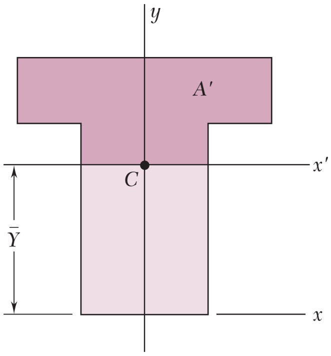


Figura A.12

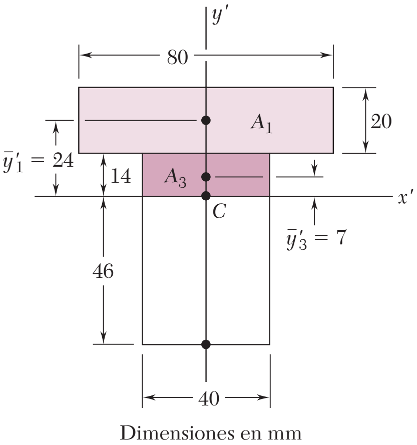


Figura A.13

Solución. Se divide el área A' en sus componentes A_1 y A_3 (figura A.13). Recordando del ejemplo A.02 que C se localiza 46 mm sobre la base de la orilla inferior de A, se determinan las coordenadas $\bar{y}'_1$ y $\bar{y}'_3$ de A_1 y A_3 y se expresa el primer momento $Q'_{x'}$ de A' con respecto a x' como sigue:

$$
\begin{aligned}
Q'_{x'} &= A_1\bar{y}'_1 + A_3\bar{y}'_3 \\
&= (20 \times 80)(24) + (14 \times 40)(7) = 42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3
\end{aligned}
$$

Solución alternativa. Se nota primero que como el centroide C de A está en el eje x' el primer momento $Q_{x'}$ del *área total* A con respecto a su eje es cero:

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Llamando A'' la porción de A por debajo del eje x' y por $Q''_{x'}$ su primer momento con respecto a ese eje, se tiene

$$Q_{x'} = Q'_{x'} + Q''_{x'} = 0 \qquad \text{o} \qquad Q'_{x'} = -Q''_{x'}$$

que muestra que los primeros momentos de A' y A'' son de igual magnitud y de signo contrario. Refiriéndose a la figura A.14, se escribe

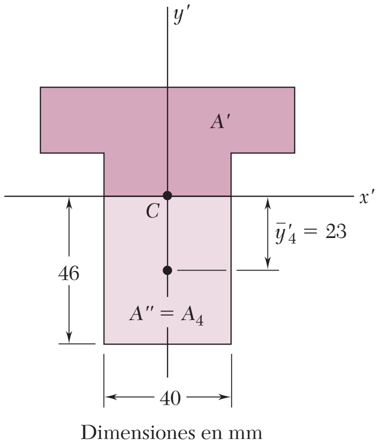


Figura A.14

$$Q''_{x'} = A_4\bar{y}'_4 = (40 \times 46)(-23) = -42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

y

$$Q'_{x'} = -Q''_{x'} = +42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

A.3 SEGUNDO MOMENTO O MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA; RADIO DE GIRO

Considere de nuevo un área A en el plano xy (figura A.1) y el elemento de área dA de coordenadas x y y. El *segundo momento* o *momento de inercia* del área A con respecto al eje x, y el segundo momento, o momento de inercia, de A con respecto al eje y se define como

$$I_x = \int_A y^2\, dA \qquad I_y = \int_A x^2\, dA \tag{A.7}$$

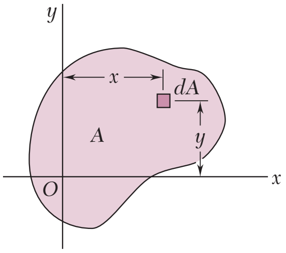


Figura A.1 (repetida)

Estas integrales son los *momentos rectangulares de inercia*, ya que se calculan de las coordenadas rectangulares del elemento dA. Mientras cada integral es realmente una integral doble, es posible en muchos casos elegir elementos de área dA en la forma de delgadas tiras horizontales o verticales de tal manera que se reduzca a una integral simple. Esto se ilustra en el ejemplo A.04.

Se define ahora el *momento polar de inercia* del área A con respecto al punto O (figura A.15) como la integral

$$J_O = \int_A \rho^2\, dA \tag{A.8}$$

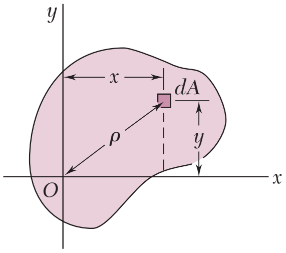


Figura A.15

en donde ρ es la distancia de O al elemento dA. Mientras esta integral es nuevamente una integral doble, es posible en el caso de un área circular elegir elementos del área dA en la forma de anillos circulares y reducir el cálculo de J_O a una integración única (véase ejemplo A.05).

Se nota, de las ecuaciones (A.7) y (A.8), que los momentos de inercia de un área son cantidades positivas. En el sistema SI, los momentos de inercia se expresan en m^4 o mm^4; en el sistema de unidades utilizado en Estados Unidos, se expresan en ft^4 o in.^4.

Se puede establecer una importante relación entre el momento polar de inercia J_O de un área dada y los momentos de inercia I_x e I_y de la misma área. Como $\rho^2 = x^2 + y^2$, se escribe

$$J_O = \int_A \rho^2\, dA = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \int_A y^2\, dA + \int_A x^2\, dA$$

o

$$J_O = I_x + I_y \tag{A.9}$$

El *radio de giro* de un área A con respecto al eje x se define como la cantidad r_x, que satisface la relación

$$I_x = r_x^2 A \tag{A.10}$$

donde I_x es el momento de inercia de A con respecto al eje x. Resolviendo la ecuación (A.10) para r_x, se tiene

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{A.11}$$

De manera similar es posible definir los radios de giro con respecto al eje y y al origen O. Se escribe

$$I_y = r_y^2 A \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{A.12}$$

$$J_O = r_O^2 A \qquad r_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{A.13}$$

Sustituyendo J_O, I_x e I_y en términos de los correspondientes radios de giro en la ecuación (A.9), se observa que

$$r_O^2 = r_x^2 + r_y^2 \tag{A.14}$$

EJEMPLO A.04

Para el área rectangular de la figura A.16, halle *a*) el momento de inercia I_x del área con respecto al eje centroidal x, *b*) el radio de giro correspondiente r_x.

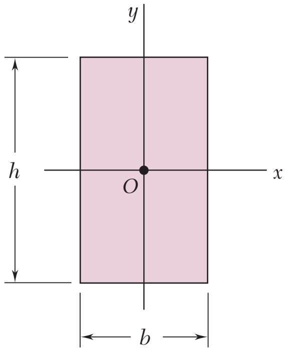


Figura A.16

a) Momento de inercia I_x. Se elige como elemento de área una tira horizontal de longitud b y espesor dy (figura A.17). Como todos los puntos de la tira tienen la misma distancia y a partir del eje x su momento de inercia con respecto al eje x es

$$dI_x = y^2\, dA = y^2(b\, dy)$$

Integrando entre $y = -h/2$ a $y = +h/2$, se tiene

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2(b\, dy) = \tfrac{1}{3}b[y^3]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}b\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)$$

o

$$I_x = \tfrac{1}{12}bh^3$$

b) Radio de giro r_x. De la ecuación (A.10) se tiene

$$I_x = r_x^2 A \qquad \tfrac{1}{12}bh^3 = r_x^2(bh)$$

y, despejando a r_x,

$$r_x = h/\sqrt{12}$$

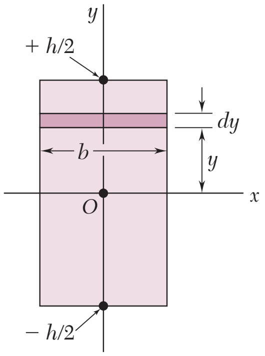


Figura A.17

EJEMPLO A.05

Para la sección circular de la figura A.18, determínese *a*) el momento polar de inercia J_O, *b*) los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y.

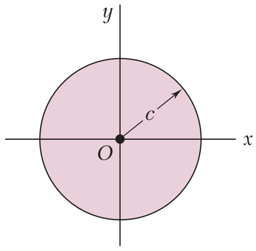


Figura A.18

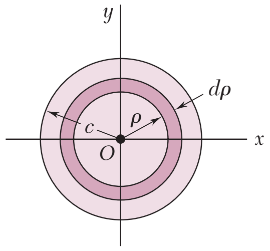


Figura A.19

a) Momento polar de inercia. Se elige como el elemento de área un anillo de radio ρ y espesor $d\rho$ (figura A.19). Como todos los puntos del anillo tienen la misma distancia ρ al origen, el momento polar de inercia del anillo será:

$$dJ_O = \rho^2\, dA = \rho^2(2\pi\rho\, d\rho)$$

Integrando en ρ de 0 a c tenemos

$$J_O = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3\, d\rho$$

$$J_O = \tfrac{1}{2}\pi c^4$$

b) Momentos rectangulares de inercia. Por simetría tenemos $I_x = I_y$. Recordando la ecuación (A.9), se escribe

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \tfrac{1}{2}\pi c^4 = 2I_x$$

y, entonces

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi c^4$$

Los resultados obtenidos y los momentos de inercia de otras figuras geométricas comunes, se listan en una tabla en la cubierta posterior del libro.

A.4 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Considere el momento de inercia I_x de un área con respecto a un eje arbitrario x (figura A.20). Si y es la distancia de un elemento de área dA a ese eje, recordamos de la sección A.3 que

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

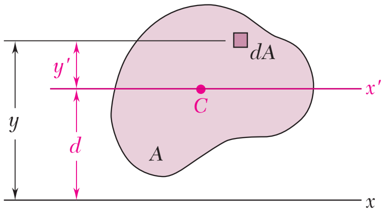


Figura A.20

Se dibuja ahora el *eje centroidal* x', es decir, el eje paralelo al eje x que pasa por el centroide C del área. Si y' es la distancia de dA a dicho eje, se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los dos ejes. Sustituyendo por y en la integral de I_x, se escribe:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2\, dA + 2d \int_A y'\, dA + d^2 \int_A dA \tag{A.15}$$

La primera integral en la ecuación (A.15) representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del área con respecto al eje centroidal x'. La segunda integral representa el primer momento $Q_{x'}$ del área con respecto al eje x' y es igual a cero ya que el centroide del área C se sitúa en ese eje. Recordando de la sección A.1 que:

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Finalmente se observa que la última integral en la ecuación (A.15) es igual al área total A. Entonces:

$$\boxed{I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2} \tag{A.16}$$

Esta ecuación expresa que el momento de inercia I_x de un área con respecto a un eje arbitrario x es igual al momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del área con respecto al eje centroidal x' paralelo al eje x *más* el producto Ad^2 del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este resultado es el *teorema de los ejes paralelos*. Hace posible determinar el momento de inercia de un área con respecto a un eje dado, cuando se conoce el momento de inercia con respecto a un eje centroidal x' de la misma dirección. También, hace posible conocer el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ de un área A con respecto a un eje centroidal x' cuando el momento de inercia I_x de A con respecto a un eje paralelo es conocido, *restando* de I_x el producto Ad^2. Debe notarse que el teorema de ejes paralelos puede usarse *sólo si uno de los ejes involucrados es un eje centroidal.*

Una ecuación similar puede deducirse para relacionar el momento polar de inercia J_O con respecto a un punto arbitrario O y el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C. Si d es la distancia entre O y C, se escribe

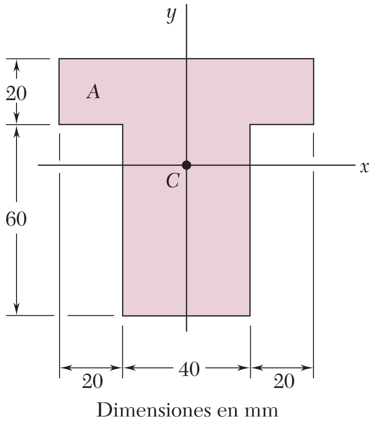
$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{A.17}$$

A.5 DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA COMPUESTA

Considere un área compuesta A hecha de varios componentes A_1, A_2, etc. Como la integral que representa el momento de inercia de A puede dividirse en integrales que se extienden sobre A_1, A_2,... el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtendrá sumando los momentos de inercia de las áreas A_1, A_2, etc., con respecto al mismo eje. El momento de inercia de un área hecha de varias de las formas comunes, que se muestra en la tabla de la cubierta de este libro, se obtiene de las fórmulas dadas en dicha tabla. Antes de añadir los momentos de las áreas componentes, sin embargo, el teorema de los ejes paralelos debe usarse para transferir cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en el ejemplo A.06.

EJEMPLO A.06

Determine el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área mostrada con respecto al eje centroidal x (figura A.21).

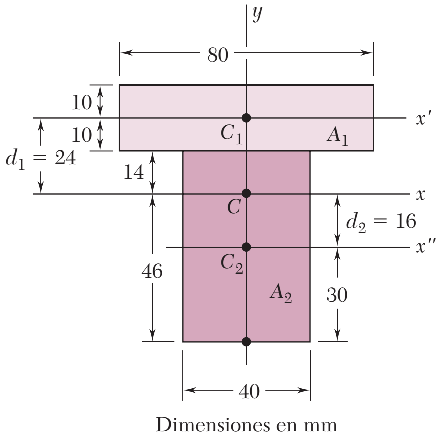


Dimensiones en mm

Figura A.21

Localización del centroide. Primero debe localizarse el centroide C del área. Sin embargo, esto ya se hizo en el ejemplo A.02 para el área dada. Recordamos de dicho ejemplo que C está localizado a 46 mm por encima de la base del área A.

Cálculo del momento de inercia. Se divide el área A en rectángulos A_1 y A_2 (figura A.22) y se calcula el momento de inercia de cada área con respecto al eje x.



Dimensiones en mm

Figura A.22

Área rectangular A_1. Para obtener el momento de inercia $(I_x)_1$ de A_1 con respecto al eje x, se calcula primero el momento de A_1, *con respecto a su eje centroidal x'*. Recordando la ecuación deducida en la parte *a* del ejemplo A.04 para el momento centroidal de un área rectangular, se tiene

$$(\bar{I}_{x'})_1 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(80\text{ mm})(20\text{ mm})^3 = 53.3 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, se transfiere el momento de inercia de A_1 de su eje centroidal x' al eje paralelo x:

$$\begin{aligned}(I_x)_1 = (\bar{I}_{x'})_1 + A_1d_1^2 &= 53.3 \times 10^3 + (80 \times 20)(24)^2\\ &= 975 \times 10^3\text{ mm}^4\end{aligned}$$

Área rectangular A_2. Calculando el momento de inercia de A_2 con respecto a su eje centroidal x'', y usando el teorema de los ejes paralelos para transferirlo al eje x, se tiene

$$\begin{aligned}(\bar{I}_{x''})_2 &= \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(40)(60)^3 = 720 \times 10^3\text{ mm}^4\\ (I_x)_2 &= (\bar{I}_{x''})_2 + A_2d_2^2 = 720 \times 10^3 + (40 \times 60)(16)^2\\ &= 1\,334 \times 10^3\text{ mm}^4\end{aligned}$$

Área total A. Sumando los valores obtenidos anteriormente, para los momentos de inercia A_1 y A_2 con respecto al eje x, se encuentra el momento de inercia $\bar{I}_x$ de toda el área.

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= (I_x)_1 + (I_x)_2 = 975 \times 10^3 + 1\,334 \times 10^3\\ \bar{I}_x &= 2.31 \times 10^6\text{ mm}^4\end{aligned}$$

Apéndice B. Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería^{1,5} (Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Material	Peso específico lb/in.^{3}	Resistencia última			Cedencia^3		Módulo de elasticidad, 10^6 psi	Módulo de rigidez, 10^6 psi	Coeficiente de expansión, 10^{-6}/°F	Ductilidad, porcentaje de elongación en 2 in.
		Tensión, ksi	Compresión,^{2} ksi	Cortante, ksi	Tensión, ksi	Cortante, ksi				
Acero										
Estructural (ASTM-A36)	0.284	58			36	21	29	11.2	6.5	21
Alta resistencia-baja aleación										
ASTM-A709 Grado 50	0.284	65			50		29	11.2	6.5	21
ASTM-A913 Grado 65	0.284	80			65		29	11.2	6.5	17
ASTM-A992 Grado 50	0.284	65			50		29	11.2	6.5	21
Templado										
ASTM-A709 Grado 100	0.284	110			100		29	11.2	6.5	18
Inoxidable AISI 302										
Laminado en frío	0.286	125			75		28	10.8	9.6	12
Recocido	0.286	95			38	22	28	10.8	9.6	50
Acero de refuerzo										
Resistencia media	0.283	70			40		29	11	6.5	
Alta resistencia	0.283	90			60		29	11	6.5	
Fundición:										
Fundición gris										
4.5% C, ASTM A-48	0.260	25	95	35			10	4.1	6.7	0.5
Hierro fundido										
2% C, 1% Si, ASTM A-47	0.264	50	90	48	33		24	9.3	6.7	10
Aluminio										
Aleación 1100-H14 (99% Al)	0.098	16		10	14	8	10.1	3.7	13.1	9
Aleación 2014-T6	0.101	66		40	58	33	10.9	3.9	12.8	13
Aleación 2024-T4	0.101	68		41	47		10.6		12.9	19
Aleación 5456-H116	0.095	46		27	33	19	10.4		13.3	16
Aleación 6061-T6	0.098	38		24	35	20	10.1	3.7	13.1	17
Aleación 7075-T6	0.101	83		48	73		10.4	4	13.1	11
Cobre										
Libre de oxígeno (99.9% Cu)										
Recocido	0.322	32		22	10		17	6.4	9.4	45
Endurecido	0.322	57		29	53		17	6.4	9.4	4
Latón amarillo (65% Cu, 35% Zn)										
Laminado en frío	0.306	74		43	60	36	15	5.6	11.6	8
Recocido	0.306	46		32	15	9	15	5.6	11.6	65
Latón rojo (85% Cu, 15% Zn)										
Laminado en frío	0.316	85		46	63		17	6.4	10.4	3
Recocido	0.316	39		31	10		17	6.4	10.4	48
Estaño bronce (88 Cu, 8 Sn, 4 Zn)	0.318	45			21		14		10	30
Manganeso bronce (63 Cu, 25 Zn, 6 Al, 3 Mn, 3 Fe)	0.302	95			48		15		12	20
Aluminio bronce (81 Cu, 4 Ni, 4 Fe, 11 Al)	0.301	90	130		40		16	6.1	9	6

(*La tabla continúa en la página 748*)

Apéndice B. Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5] (Unidades SI)

		Resistencia última			Cedencia[3]					
Material	**Densidad, kg/m^3**	**Tensión, MPa**	**Compresión,[2] MPa**	**Cortante, MPa**	**Tensión, MPa**	**Cortante, MPa**	**Módulo de elasticidad, GPa**	**Módulo de rigidez, GPa**	**Coeficiente de expansión térmica, 10^{-6}/°C**	**Ductilidad, porcentaje de elongación en 50 mm**
Acero										
Estructural (ASTM-A36)	7 860	400			250	145	200	77.2	11.7	21
Alta resistencia-aleación baja										
ASTM-A709 Grado 345	7 860	450			345		200	77.2	11.7	21
ASTM-A913 Grado 450	7 860	550			450		200	77.2	11.7	17
ASTM-A992 Grado 345	7 860	450			345		200	77.2	11.7	21
Templado										
ASTM-A709 Grado 690	7 860	760			690		200	77.2	11.7	18
Inoxidable, AISI 302										
Laminado en frío	7 920	860			520		190	75	17.3	12
Recocido	7 920	655			260	150	190	75	17.3	50
Acero de refuerzo										
Resistencia media	7 860	480			275		200	77	11.7	
Alta resistencia	7 860	620			415		200	77	11.7	
Fundición										
Fundición gris										
4.5% C, ASTM A-48	7 200	170	655	240			69	28	12.1	0.5
Hierro fundido										
2% C, 1% Si, ASTM A-47	7 300	345	620	330	230		165	65	12.1	10
Aluminio										
Aleación 1100-H14 (99% Al)	2 710	110		70	95	55	70	26	23.6	9
Aleación 2014-T6	2 800	455		275	400	230	75	27	23.0	13
Aleación 2024-T4	2 800	470		280	325		73		23.2	19
Aleación 5456-H116	2 630	315		185	230	130	72		23.9	16
Aleación 6061-T6	2 710	260		165	240	140	70	26	23.6	17
Aleación 7075-T6	2 800	570		330	500		72	28	23.6	11
Cobre										
Libre de oxígeno (99.9% Cu)										
Recocido	8 910	220		150	70		120	44	16.9	45
Endurecido	8 910	390		200	265		120	44	16.9	4
Latón amarillo (65% Cu, 35% Zn)										
Laminado en frío	8 470	510		300	410	250	105	39	20.9	8
Recocido	8 470	320		220	100	60	105	39	20.9	65
Latón rojo (85% Cu, 15% Zn)										
Laminado en frío	8 740	585		320	435		120	44	18.7	3
Recocido	8 740	270		210	70		120	44	18.7	48
Estaño bronce (88 Cu, 8 Sn, 4 Zn)	8 800	310			145		95		18.0	30
Manganeso bronce (63 Cu, 25 Zn, 6 Al, 3 Mn, 3 Fe)	8 360	655			330		105		21.6	20
Aluminio bronce (81 Cu, 4 Ni, 4 Fe, 11 Al)	8 330	620	900		275		110	42	16.2	6

(*La tabla continúa en la página 749*)

Apéndice B. Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5] (Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Continuación de la página 746

Material	Peso específico lb/in.^{3}	Resistencia última			Cedencia[3]		Módulo de elasticidad, 10^6 psi	Módulo de rigidez, 10^6 psi	Coeficiente de expansión, 10^{-6}/°F	Ductilidad, porcentaje de elongación en 2 in.
		Tensión, ksi	Compresión,[2] ksi	Cortante, ksi	Tensión, ksi	Cortante, ksi				
Aleaciones de magnesio										
AZ80 (Forjado)	0.065	50		23	36		6.5	2.4	14	6
AZ31 (Extrusión)	0.064	37		19	29		6.5	2.4	14	12
Titanio										
Aleación (6% Al, 4% V)	0.161	130			120		16.5		5.3	10
Aleación monel 400(Ni-Cu)										
En frío	0.319	98			85	50	26		7.7	22
Recocida	0.319	80			32	18	26		7.7	46
Cuproníquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recocido	0.323	53			16		20	7.5	9.5	35
Trabajado en frío	0.323	85			79		20	7.5	9.5	3
Madera,[4] secada al aire										
Pino-Douglas	0.017	15	7.2	1.1			1.9	.1	Varía	
Picea, Sitka	0.015	8.6	5.6	1.1			1.5	.07	1.7 a 2.5	
Pino de hoja corta	0.018		7.3	1.4			1.7			
Pino blanco	0.014		5.0	1.0			1.5			
Pino Ponderosa	0.015	8.4	5.3	1.1			1.3			
Roble blanco	0.025		7.4	2.0			1.8			
Roble rojo	0.024		6.8	1.8			1.8			
Abeto occidental	0.016	13	7.2	1.3			1.6			
Nogal de corteza fibrosa	0.026		9.2	2.4			2.2			
Secoya	0.015	9.4	6.1	0.9			1.3			
Concreto										
Resistencia media	0.084		4.0				3.6		5.5	
Alta resistencia	0.084		6.0				4.5		5.5	
Plásticos										
Nylon, tipo 6/6 (moldeado)	0.0412	11	14		6.5		0.4		80	50
Policarbonato	0.0433	9.5	12.5		9		0.35		68	110
Poliéster, PBT (termoplástico)	0.0484	8	11		8		0.35		75	150
Poliéster elastomérico	0.0433	6.5		5.5			0.03			500
Poliestireno	0.0374	8	13		8		0.45		70	2
Vinilo, PVC rígido	0.0520	6	10		6.5		0.45		75	40
Caucho	0.033	2							90	600
Granito (promedio)	0.100	3	35	5			10	4	4	
Mármol (promedio)	0.100	2	18	4			8	3	6	
Arenisca (promedio)	0.083	1	12	2			6	2	5	
Cristal, 98% de sílice	0.079		7				9.6	4.1	44	

---

[1] Las propiedades de los metales varían ampliamente con la composición, el tratamiento térmico y el trabajado mecánico.

[2] Para materiales dúctiles la resistencia a compresión se supone igual a la resistencia a tensión.

[3] *Offset* 0.2%.

[4] Las propiedades de la madera son para carga paralela a la fibra.

[5] Véase también *Mark's Mechanical Engineering Handbook*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1996; *Annual Book of ASTM*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pa.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Metals Park, Ohio; y *Aluminum Design Manual*, The Aluminum Association, Washington, D.C.

Apéndice B. Propiedades típicas de materiales seleccionados usados en ingeniería[1,5] (Unidades SI)

Continuación de la página 747

Material	Densidad, kg/m^3	Resistencia última			Cedencia[3]		Módulo de elasticidad, GPa	Módulo de rigidez, GPa	Coeficiente de expansión térmica, 10^{-6}/°C	Ductilidad, porcentaje de elongación en 50 mm
		Tensión, MPa	Compresión,[2] MPa	Cortante, MPa	Tensión, MPa	Cortante, MPa				
Aleaciones de magnesio										
AZ80 (Forjado)	1 800	345		160	250		45	16	25.2	6
AZ31 (Extrusión)	1 770	255		130	200		45	16	25.2	12
Titanio										
Aleación (6% Al, 4% V)	4 730	900			830		115		9.5	10
Aleación monel 400(Ni-Cu)										
En frío	8 830	675			585	345	180		13.9	22
Recocida	8 830	550			220	125	180		13.9	46
Cuproníquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recocido	8 940	365			110		140	52	17.1	35
Trabajado en frío	8 940	585			545		140	52	17.1	3
Madera[4] secada al aire										
Pino-Douglas	470	100	50	7.6			13	0.7	Varía	
Picea, Sitka	415	60	39	7.6			10	0.5	3.0 a 4.5	
Pino de hoja corta	500		50	9.7			12			
Pino blanco	390		34	7.0			10			
Pino Ponderosa	415	55	36	7.6			9			
Roble blanco	690		51	13.8			12			
Roble rojo	660		47	12.4			12			
Abeto occidental	440	90	50	10.0			11			
Nogal de corteza fibrosa	720		63	16.5			15			
Secoya	415	65	42	6.2			9			
Concreto										
Resistencia media	2 320		28				25		9.9	
Alta resistencia	2 320		40				30		9.9	
Plásticos										
Nylon, tipo 6/6, (moldeado)	1 140	75	95		45		2.8		144	50
Policarbonato	1 200	65	85		35		2.4		122	110
Poliéster PBT (termoplástico)	1 340	55	75		55		2.4		135	150
Poliéster elastomérico	1 200	45		40			0.2			500
Poliestireno	1 030	55	90		55		3.1		125	2
Vinilo, PVC rígido	1 440	40	70		45		3.1		135	40
Caucho	910	15							162	600
Granito (promedio)	2 770	20	240	35			70	4	7.2	
Mármol (promedio)	2 770	15	125	28			55	3	10.8	
Arenisca (promedio)	2 300	7	85	14			40	2	9.0	
Cristal, 98% sílice	2 190		50				65	4.1	80	

---

[1] Las propiedades de los metales varían ampliamente con la composición, el tratamiento térmico y el trabajado mecánico.

[2] Para materiales dúctiles la resistencia a compresión se supone igual a la resistencia a tensión.

[3] *Offset* 0.2%.

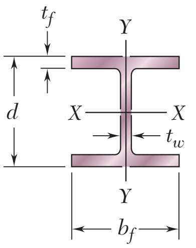
[4] Las propiedades de la madera son para carga paralela a la fibra.

[5] Véase también *Mark's Mechanical Engineering Handbook*, 10a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1996; *Annual Book of ASTM*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pa.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Metals Park, Ohio; y *Aluminum Design Manual*, The Aluminum Association, Washington, D.C.

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero (Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Perfiles W

(Perfiles de aleta ancha)



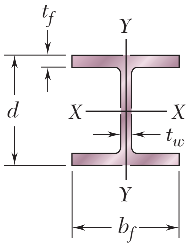
Designación†	Área A, in.^{2}	Altura d, in.	Aleta		Espesor del alma t_w, in.	Ej e X-X			Eje Y-Y		
			Ancho b_f, in.	Espesor t_f, in.		I_y, in.^{4}	S_y, in.^{3}	r_x, in.	I_y, in.^{4}	S_y, in.^{3}	r_y, in.
W36 × 300	88.3	36.74	16.655	1.680	0.945	20 300	1 110	15.2	1 300	156	3.83
135	39.7	35.55	11.950	0.790	0.600	7 800	439	14.0	225	37.7	2.38
W33 × 201	59.1	33.68	15.745	1.150	0.715	11 500	684	14.0	749	95.2	3.56
118	34.7	32.86	11.480	0.740	0.550	5 900	359	13.0	187	32.6	2.32
W30 × 173	50.8	30.44	14.985	1.065	0.655	8 200	539	12.7	598	79.8	3.43
99	29.1	29.65	10.450	0.670	0.520	3 990	269	11.7	128	24.5	2.10
W27 × 146	42.9	27.38	13.965	0.975	0.605	5 630	411	11.4	443	63.5	3.21
84	24.8	26.71	9.960	0.640	0.460	2 850	213	10.7	106	21.2	2.07
W24 × 104	30.6	24.06	12.750	0.750	0.500	3 100	258	10.1	259	40.7	2.91
68	20.1	23.73	8.965	0.585	0.415	1 830	154	9.55	70.4	15.7	1.87
W21 × 101	29.8	21.36	12.290	0.800	0.500	2 420	227	9.02	248	40.3	2.89
62	18.3	20.99	8.240	0.615	0.400	1 330	127	8.54	57.5	13.9	1.77
44	13.0	20.66	6.500	0.450	0.350	843	81.6	8.06	20.7	6.36	1.26
W18 × 106	31.1	18.73	11.200	0.940	0.590	1 910	204	7.84	220	39.4	2.66
76	22.3	18.21	11.035	0.680	0.425	1 330	146	7.73	152	27.6	2.61
50	14.7	17.99	7.495	0.570	0.355	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65
35	10.3	17.70	6.000	0.425	0.300	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W16 × 77	22.6	16.52	10.295	0.760	0.455	1 110	134	7.00	138	26.9	2.47
57	16.8	16.43	7.120	0.715	0.430	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
40	11.8	16.01	6.995	0.505	0.305	518	64.7	6.63	28.9	8.25	1.57
31	9.12	15.88	5.525	0.440	0.275	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
26	7.68	15.69	5.500	0.345	0.250	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W14 × 370	109	17.92	16.475	2.660	1.655	5 440	607	7.07	1 990	241	4.27
145	42.7	14.78	15.500	1.090	0.680	1 710	232	6.33	677	87.3	3.98
82	24.1	14.31	10.130	0.855	0.510	882	123	6.05	148	29.3	2.48
68	20.0	14.04	10.035	0.720	0.415	723	103	6.01	121	24.2	2.46
53	15.6	13.92	8.060	0.660	0.370	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
43	12.6	13.66	7.995	0.530	0.305	428	62.7	5.82	45.2	11.3	1.89
38	11.2	14.10	6.770	0.515	0.310	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
30	8.85	13.84	6.730	0.385	0.270	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
26	7.69	13.91	5.025	0.420	0.255	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08
22	6.49	13.74	5.000	0.335	0.230	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04

† Un perfil de aleta ancha se designa por la letra W seguida de la altura en in. y el peso en lb/ft.

(La tabla continúa en la página 752)

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero (Unidades SI)

Perfiles W
(Perfiles de aleta ancha)

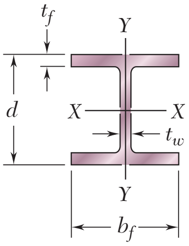


			Aleta			Eje X-X			Eje Y-Y		
Designación†	**Área A, mm²**	**Altura d, mm**	**Ancho b_f, mm**	**Espesor t_f, mm**	**Espesor del alma t_w, mm**	**I_x 10^6 mm⁴**	**S_x 10^3 mm³**	**r_x mm**	**I_y 10^6 mm⁴**	**S_y 10^3 mm³**	**r_y mm**
W920 × 446	57 000	933	423	42.70	24.0	8 470	18 200	385	540	2 550	97.3
201	25 600	903	304	20.10	15.2	3 250	7 200	356	94.4	621	60.7
W840 × 299	38 100	855	400	29.20	18.2	4 790	11 200	355	312	1 560	90.5
176	22 400	835	292	18.80	14.0	2 460	5 890	331	78.2	536	59.1
W760 × 257	32 600	773	381	27.10	16.6	3 420	8 850	324	250	1 310	87.6
147	18 700	753	265	17.00	13.2	1 660	4 410	298	52.9	399	53.2
W690 × 217	27 700	695	355	24.80	15.4	2 340	6 730	291	185	1 040	81.7
125	16 000	678	253	16.30	11.7	1 190	3 510	273	44.1	349	52.5
W610 × 155	19 700	611	324	19.00	12.7	1 290	4 220	256	108	667	74.0
101	13 000	603	228	14.90	10.5	764	2 530	242	29.5	259	47.6
W530 × 150	19 200	543	312	20.30	12.7	1 010	3 720	229	103	660	73.2
92	11 800	533	209	15.60	10.2	552	2 070	216	23.8	228	44.9
66	8 370	525	165	11.40	8.9	351	1 340	205	8.57	104	32.0
W460 × 158	20 100	476	284	23.90	15.0	796	3 340	199	91.4	644	67.4
113	14 400	463	280	17.30	10.8	556	2 400	196	63.3	452	66.3
74	9 450	457	190	14.50	9.0	333	1 460	188	16.6	175	41.9
52	6 630	450	152	10.80	7.6	212	942	179	6.34	83.4	30.9
W410 × 114	14 600	420	261	19.30	11.6	462	2 200	178	57.2	438	62.6
85	10 800	417	181	18.20	10.9	315	1 510	171	18.0	199	40.8
60	7 580	407	178	12.80	7.7	216	1 060	169	12.1	136	40.0
46.1	5 890	403	140	11.20	7.0	156	774	163	5.14	73.4	29.5
38.8	4 990	399	140	8.80	6.4	127	637	160	4.04	57.7	28.5
W360 × 551	70 100	455	418	67.60	42.0	2 260	9 930	180	825	3 950	108
216	27 600	375	394	27.70	17.3	712	3 800	161	283	1 440	101
122	15 500	363	257	21.70	13.0	365	2 010	153	61.5	479	63.0
101	12 900	357	255	18.30	10.5	302	1 690	153	50.6	397	62.6
79	10 100	354	205	16.80	9.4	227	1 280	150	24.2	236	48.9
64	8 140	347	203	13.50	7.7	178	1 030	148	18.9	186	48.2
57.8	7 220	358	172	13.10	7.9	161	899	149	11.1	129	39.2
44	5 730	352	171	9.80	6.9	122	693	146	8.18	95.7	37.8
39	4 980	353	128	10.70	6.5	102.0	578	143	3.75	58.6	27.4
32.9	4 170	349	127	8.50	5.8	82.7	474	141	2.91	45.8	26.4

† Un perfil de aleta ancha se designa por la letra W seguida de la altura nominal en mm y la masa en kilogramo por metro.

(*La tabla continúa en la página 753*)

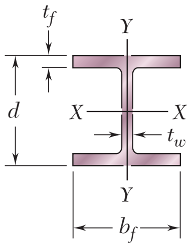
Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero
(Unidades utilizadas en Estados Unidos)
(Continuación de la página 750)



Perfiles W
(Perfiles de aleta ancha)

Designación†	Área A, in.^{2}	Altura d, in.	Aleta		Espesor del alma t_w, in.	Eje X-X			Eje Y-Y		
			Ancho b_f, in.	Espesor t_f, in.		I_x, in.^{4}	S_x, in.^{3}	r_x, in.	I_y, in.^{4}	S_y, in.^{3}	r_y, in.
W12 × 96	28.2	12.71	12.160	0.900	0.550	833	131	5.44	270	44.4	3.09
72	21.1	12.25	12.040	0.670	0.430	597	97.4	5.31	195	32.4	3.04
50	14.7	12.19	8.080	0.640	0.370	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
40	11.8	11.94	8.005	0.515	0.295	310	51.9	5.13	44.1	11.0	1.93
35	10.3	12.50	6.560	0.520	0.300	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
30	8.79	12.34	6.520	0.440	0.260	238	38.6	5.21	20.3	6.24	1.52
26	7.65	12.22	6.490	0.380	0.230	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
22	6.48	12.31	4.030	0.425	0.260	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.847
16	4.71	11.99	3.990	0.265	0.220	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
W10 × 112	32.9	11.36	10.415	1.250	0.755	716	126	4.66	236	45.3	2.68
68	20.0	10.40	10.130	0.770	0.470	394	75.7	4.44	134	26.4	2.59
54	15.8	10.09	10.030	0.615	0.370	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
45	13.3	10.10	8.020	0.620	0.350	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
39	11.5	9.92	7.985	0.530	0.315	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
33	9.71	9.73	7.960	0.435	0.290	170	35.0	4.19	36.6	9.20	1.94
30	8.84	10.47	5.810	0.510	0.300	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
22	6.49	10.17	5.750	0.360	0.240	118	23.2	4.27	11.4	3.97	1.33
19	5.62	10.24	4.020	0.395	0.250	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
15	4.41	9.99	4.000	0.270	0.230	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
W8 × 58	17.1	8.75	8.220	0.810	0.510	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
48	14.1	8.50	8.110	0.685	0.400	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08
40	11.7	8.25	8.070	0.560	0.360	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
35	10.3	8.12	8.020	0.495	0.310	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
31	9.13	8.00	7.995	0.435	0.285	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
28	8.25	8.06	6.535	0.465	0.285	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
24	7.08	7.93	6.495	0.400	0.245	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
21	6.16	8.28	5.270	0.400	0.250	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
18	5.26	8.14	5.250	0.330	0.230	61.9	15.2	3.43	7.97	3.04	1.23
15	4.44	8.11	4.015	0.315	0.245	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
13	3.84	7.99	4.000	0.255	0.230	39.6	9.91	3.21	2.73	1.37	0.843
W6 × 25	7.34	6.38	6.080	0.455	0.320	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
20	5.87	6.20	6.020	0.365	0.260	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
16	4.74	6.28	4.030	0.405	0.260	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.966
12	3.55	6.03	4.000	0.280	0.230	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
9	2.68	5.90	3.940	0.215	0.170	16.4	5.56	2.47	2.19	1.11	0.905
W5 × 19	5.54	5.15	5.030	0.430	0.270	26.2	10.2	2.17	9.13	3.63	1.28
16	4.68	5.01	5.000	0.360	0.240	21.3	8.51	2.13	7.51	3.00	1.27
W4 × 13	3.83	4.16	4.060	0.345	0.280	11.3	5.46	1.72	3.86	1.90	1.00

† Un perfil de aleta ancha se designa por la letra W seguida de la altura en in. y el peso en lb/ft.



Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades SI)

Continuación de la página 751

Perfiles W

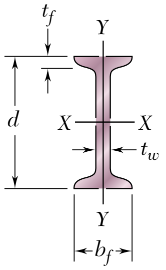
(Perfiles de aleta ancha)

Designación†	Área A, mm^2	Altura d, mm	Aleta		Espesor del alma t_w, mm	Eje X-X			Eje Y-Y		
			Ancho b_f, mm	Espesor t_f, mm		I_x 10^6 mm^4	S_x 10^3 mm^3	r_x mm	I_y 10^6 mm^4	S_y 10^3 mm^3	r_y mm
W310 × 143	18 200	323	309	22.9	14.0	348	2 150	138	113	731	78.8
107	13 600	311	306	17.0	10.9	248	1 590	135	81.2	531	77.3
74	9 480	310	205	16.3	9.4	165	1 060	132	23.4	228	49.7
60	7 590	303	203	13.1	7.5	129	851	130	18.3	180	49.1
52	6 670	318	167	13.2	7.6	119	748	134	10.3	123	39.3
44.5	5 690	313	166	11.2	6.6	99.2	634	132	8.55	103	38.8
38.7	4 940	310	165	9.7	5.8	85.1	549	131	7.27	88.1	38.4
32.7	4 180	313	102	10.8	6.6	65.0	415	125	1.92	37.6	21.4
23.8	3 040	305	101	6.7	5.6	42.7	280	119	1.16	23.0	19.5
W250 × 167	21 300	289	265	31.8	19.2	300	2 080	119	98.8	746	68.1
101	12 900	264	257	19.6	11.9	164	1 240	113	55.5	432	65.6
80	10 200	256	255	15.6	9.4	126	984	111	43.1	338	65.0
67	8 580	257	204	15.7	8.9	104	809	110	22.2	218	51.0
58	7 420	252	203	13.5	8.0	87.3	693	108	18.8	185	50.3
49.1	6 250	247	202	11.0	7.4	70.6	572	106	15.1	150	49.2
44.8	5 720	266	148	13.0	7.6	71.1	535	111	7.03	95.0	35.1
32.7	4 180	258	146	9.1	6.1	48.9	379	108	4.73	64.8	33.7
28.4	3 630	260	102	10.0	6.4	40.0	308	105	1.78	34.9	22.1
22.3	2 850	254	102	6.9	5.8	28.9	228	101	1.23	24.1	20.8
W200 × 86	11 000	222	209	20.6	13.0	94.7	853	92.4	31.4	300	53.2
71	9 100	216	206	17.4	10.2	76.6	709	91.7	25.4	247	52.8
59	7 560	210	205	14.2	9.1	61.1	582	89.9	20.4	199	51.9
52	6 660	206	204	12.6	7.9	52.7	512	89.0	17.8	175	51.7
46.1	5 860	203	203	11.0	7.2	45.5	448	87.9	15.3	151	51.1
41.7	5 310	205	166	11.8	7.2	40.9	399	87.8	9.01	109	41.2
35.9	4 580	201	165	10.2	6.2	34.4	342	86.7	7.64	92.6	40.8
31.3	4 000	210	134	10.2	6.4	31.4	299	88.6	4.1	61.2	32.0
26.6	3 390	207	133	8.4	5.8	25.8	249	87.2	3.3	49.6	31.2
22.5	2 860	206	102	8.0	6.2	20.0	194	83.6	1.42	27.8	22.3
19.3	2 480	203	102	6.5	5.8	16.6	164	81.8	1.15	22.5	21.5
W150 × 37.1	4 730	162	154	11.6	8.1	22.2	274	68.5	7.07	91.8	38.7
29.8	3 790	157	153	9.3	6.6	17.2	219	67.4	5.56	72.7	38.3
24.0	3 060	160	102	10.3	6.6	13.4	168	66.2	1.83	35.9	24.5
18.0	2 290	153	102	7.1	5.8	9.17	120	63.3	1.26	24.7	23.5
13.5	1 730	150	100	5.5	4.3	6.87	91.6	63.0	0.918	18.4	23.0
W130 × 28.1	3 580	131	128	10.9	6.9	10.9	166	55.2	3.81	59.5	32.6
23.8	3 010	127	127	9.1	6.1	8.80	139	54.1	3.11	49.0	32.1
W100 × 19.3	2 480	106	103	8.8	7.1	4.77	90.0	43.9	1.61	31.3	25.5

† Un perfil de aleta ancha se designa por la letra W seguida de la altura nominal en mm y la masa en kilogramos por metro.

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero (Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Formas S
(Formas normales estadounidenses)



			Aleta			Eje *X-X*			Eje *Y-Y*		
Designación†	Área *A*, in.^{2}	Altura *d*, in.	Ancho b_f, in.	Espesor t_f, in.	Espesor del alma t_w, in.	I_x, in.^{4}	S_x, in.^{3}	r_x, in.	I_y, in.^{4}	S_y, in.^{3}	r_y, in.
S24 × 121	35.6	24.50	8.050	1.090	0.800	3 160	258	9.43	83.3	20.7	1.53
106	31.2	24.50	7.870	1.090	0.620	2 940	240	9.71	77.1	19.6	1.57
100	29.3	24.00	7.245	0.870	0.745	2 390	199	9.02	47.7	13.2	1.27
90	26.5	24.00	7.125	0.870	0.625	2 250	187	9.21	44.9	12.6	1.30
80	23.5	24.00	7.000	0.870	0.500	2 100	175	9.47	42.2	12.1	1.34
S20 × 96	28.2	20.30	7.200	0.920	0.800	1 670	165	7.71	50.2	13.9	1.33
86	25.3	20.30	7.060	0.920	0.660	1 580	155	7.89	46.8	13.3	1.36
75	22.0	20.00	6.385	0.795	0.635	1 280	128	7.62	29.8	9.32	1.16
66	19.4	20.00	6.255	0.795	0.505	1 190	119	7.83	27.7	8.85	1.19
S18 × 70	20.6	18.00	6.251	0.691	0.711	926	103	6.71	24.1	7.72	1.08
54.7	16.1	18.00	6.001	0.691	0.461	804	89.4	7.07	20.8	6.94	1.14
S15 × 50	14.7	15.00	5.640	0.622	0.550	486	64.8	5.75	15.7	5.57	1.03
42.9	12.6	15.00	5.501	0.622	0.411	447	59.6	5.95	14.4	5.23	1.07
S12 × 50	14.7	12.00	5.477	0.659	0.687	305	50.8	4.55	15.7	5.74	1.03
40.8	12.0	12.00	5.252	0.659	0.462	272	45.4	4.77	13.6	5.16	1.06
35	10.3	12.00	5.078	0.544	0.428	229	38.2	4.72	9.87	3.89	0.980
31.8	9.35	12.00	5.000	0.544	0.350	218	36.4	4.83	9.36	3.74	1.00
S10 × 35	10.3	10.00	4.944	0.491	0.594	147	29.4	3.78	8.36	3.38	0.901
25.4	7.46	10.00	4.661	0.491	0.311	124	24.7	4.07	6.79	2.91	0.954
S8 × 23	6.77	8.00	4.171	0.425	0.441	64.9	16.2	3.10	4.31	2.07	0.798
18.4	5.41	8.00	4.001	0.425	0.271	57.6	14.4	3.26	3.73	1.86	0.831
S6 × 17.25	5.07	6.00	3.565	0.359	0.465	26.3	8.77	2.28	2.31	1.30	0.675
12.5	3.67	6.00	3.332	0.359	0.232	22.1	7.37	2.45	1.82	1.09	0.705
S5 × 10	2.94	5.00	3.004	0.326	0.214	12.3	4.92	2.05	1.22	0.809	0.643
S4 × 9.5	2.79	4.00	2.796	0.293	0.326	6.79	3.39	1.56	0.903	0.646	0.569
7.7	2.26	4.00	2.663	0.293	0.193	6.08	3.04	1.64	0.764	0.574	0.581
S3 × 7.5	2.21	3.00	2.509	0.260	0.349	2.93	1.95	1.15	0.586	0.468	0.516
5.7	1.67	3.00	2.330	0.260	0.170	2.52	1.68	1.23	0.455	0.390	0.522

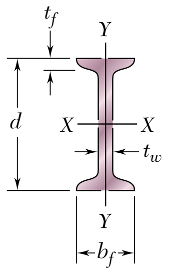
† Un perfil de aleta ancha se designa por la letra S seguida de la altura en in. y el peso en lb/ft.

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades SI)

Formas S

(Formas normales estadounidenses)



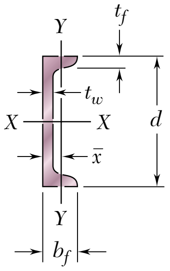
Designación†	Área A, mm^2	Altura d, mm	Aleta		Espesor del alma t_w, mm	Eje X-X			Eje Y-Y		
			Ancho b_f, mm	Espesor t_f, mm		I_x 10^6 mm^4	S_x 10^3 mm^3	r_x mm	I_y 10^6 mm^4	S_y 10^3 mm^3	r_y mm
S610 × 180	22 900	622	204	27.7	20.3	1 320	4 240	240	34.9	341	39.0
158	20 100	622	200	27.7	15.7	1 230	3 950	247	32.5	321	39.9
149	19 000	610	184	22.1	18.9	995	3 260	229	20.2	215	32.3
134	17 100	610	181	22.1	15.9	938	3 080	234	19.0	206	33.0
119	15 200	610	178	22.1	12.7	878	2 880	240	17.9	198	34.0
S510 × 143	18 200	516	183	23.4	20.3	700	2 710	196	21.3	228	33.9
128	16 400	516	179	23.4	16.8	658	2 550	200	19.7	216	34.4
112	14 200	508	162	20.2	16.1	530	2 090	193	12.6	152	29.5
98.3	12 500	508	159	20.2	12.8	495	1 950	199	11.8	145	30.4
S460 × 104	13 300	457	159	17.6	18.1	385	1 685	170	10.4	127	27.5
81.4	10 400	457	152	17.6	11.7	333	1 460	179	8.83	113	28.8
S380 × 74	9 500	381	143	15.6	14.0	201	1 060	145	6.65	90.8	26.1
64	8 150	381	140	15.8	10.4	185	971	151	6.15	85.7	27.1
S310 × 74	9 480	305	139	16.7	17.4	126	826	115	6.69	93.2	26.1
60.7	7 730	305	133	16.7	11.7	113	741	121	5.73	83.6	26.8
52	6 650	305	129	13.8	10.9	95.3	625	120	4.19	63.6	24.8
47.3	6 040	305	127	13.8	8.9	90.5	593	122	3.97	61.1	25.3
S250 × 52	6 670	254	126	12.5	15.1	61.2	482	95.8	3.59	55.7	22.9
37.8	4 820	254	118	12.5	7.9	51.1	402	103	2.86	47.5	24.1
S200 × 34	4 370	203	106	10.8	11.2	26.8	264	78.3	1.83	33.8	20.2
27.4	3 500	203	102	10.8	6.9	23.9	235	82.6	1.60	30.6	21.1
S150 × 25.7	3 270	152	91	9.1	11.8	10.8	142	57.5	1.00	21.3	17.2
18.6	2 370	152	85	9.1	5.8	9.11	120	62.0	0.782	18.0	18.0
S130 × 15	1 890	127	76	8.3	5.4	5.07	79.8	51.8	0.513	13.2	16.3
S100 × 14.1	1 800	102	71	7.4	8.3	2.82	55.3	39.6	0.383	10.5	14.4
11.5	1 460	102	68	7.4	4.9	2.53	49.6	41.6	0.328	9.41	14.8
S75 × 11.2	1 430	76	64	6.6	8.9	1.20	31.6	29.0	0.254	7.72	13.1
8.5	1 070	76	59	6.6	4.3	1.03	27.1	31.0	0.190	6.44	13.3

† Una viga normal estadounidense se designa por la letra S seguida de la altura nominal en mm y la masa en kilogramos por metro.

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero (Unidades utilizadas en Estados Unidos)

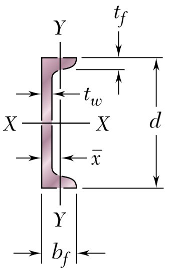
Formas C

(Canales estadounidenses normales)



			Aleta			Eje X-X			Eje Y-Y			
Designación†	**Área A, in.^{2}**	**Altura d, in.**	**Ancho b_f, in.**	**Espesor t_f, in.**	**Espesor del alma t_w, in.**	**I_x, in.^{4}**	**S_x, in.^{3}**	**r_x, in.**	**I_y, in.^{4}**	**S_y, in.^{3}**	**r_y, in.**	**x, in.**
C15 × 50	14.7	15.00	3.716	0.650	0.716	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867	0.798
40	11.8	15.00	3.520	0.650	0.520	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886	0.777
33.9	9.96	15.00	3.400	0.650	0.400	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904	0.787
C12 × 30	8.82	12.00	3.170	0.501	0.510	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763	0.674
25	7.35	12.00	3.047	0.501	0.387	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780	0.674
20.7	6.09	12.00	2.942	0.501	0.282	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799	0.698
C10 × 30	8.82	10.00	3.033	0.436	0.673	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669	0.649
25	7.35	10.00	2.886	0.436	0.526	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676	0.617
20	5.88	10.00	2.739	0.436	0.379	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692	0.606
15.3	4.49	10.00	2.600	0.436	0.240	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713	0.634
C9 × 20	5.88	9.00	2.648	0.413	0.448	60.9	13.5	3.22	2.42	1.17	0.642	0.583
15	4.41	9.00	2.485	0.413	0.285	51.0	11.3	3.40	1.93	1.01	0.661	0.586
13.4	3.94	9.00	2.433	0.413	0.233	47.9	10.6	3.48	1.76	0.962	0.669	0.601
C8 × 18.75	5.51	8.00	2.527	0.390	0.487	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599	0.565
13.75	4.04	8.00	2.343	0.390	0.303	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615	0.553
11.5	3.38	8.00	2.260	0.390	0.220	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625	0.571
C7 × 12.25	3.60	7.00	2.194	0.366	0.314	24.2	6.93	2.60	1.17	0.703	0.571	0.525
9.8	2.87	7.00	2.090	0.366	0.210	21.3	6.08	2.72	0.968	0.625	0.581	0.540
C6 × 13	3.83	6.00	2.157	0.343	0.437	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525	0.514
10.5	3.09	6.00	2.034	0.343	0.314	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529	0.499
8.2	2.40	6.00	1.920	0.343	0.200	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537	0.511
C5 × 9	2.64	5.00	1.885	0.320	0.325	8.90	3.56	1.83	0.632	0.450	0.489	0.478
6.7	1.97	5.00	1.750	0.320	0.190	7.49	3.00	1.95	0.479	0.378	0.493	0.484
C4 × 7.25	2.13	4.00	1.721	0.296	0.321	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450	0.459
5.4	1.59	4.00	1.584	0.296	0.184	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449	0.457
C3 × 6	1.76	3.00	1.596	0.273	0.356	2.07	1.38	1.08	0.305	0.268	0.416	0.455
5	1.47	3.00	1.498	0.273	0.258	1.85	1.24	1.12	0.247	0.233	0.410	0.438
4.1	1.21	3.00	1.410	0.273	0.170	1.66	1.10	1.17	0.197	0.202	0.404	0.436

† Un canal americano normal se designa por la letra C, seguida de la altura nominal en in. y el peso en lb/ft.



Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero (Unidades SI)

Formas C
(Canales americanos normales)

			Aleta			Eje X-X			Eje Y-Y			
Designación†	**Área A, mm^2**	**Altura d, mm**	**Ancho b_f, mm**	**Espesor t_f, mm**	**Espesor del alma t_w, mm**	**I_x 10^6 mm^4**	**S_x 10^3 mm^3**	**r_x mm**	**I_y 10^6 mm^4**	**S_y 10^3 mm^3**	**r_y mm**	**$\bar{x}$ mm**
C380 × 74	9 480	381	94	16.5	18.2	167	877	133	4.54	61.5	21.9	20.2
60	7 570	381	89	16.5	13.2	144	756	138	3.79	54.7	22.4	19.7
50.4	6 430	381	86	16.5	10.2	134	688	143	3.34	50.5	22.8	19.9
C310 × 45	5 690	305	80	12.7	13.0	67.2	441	109	2.09	33.2	19.2	17.0
37	4 720	305	77	12.7	9.8	59.7	391	112	1.83	30.5	19.7	17.0
30.8	3 920	305	74	12.7	7.2	53.4	350	117	1.57	27.7	20.0	17.4
C250 × 45	5 670	254	76	11.1	17.1	42.7	336	86.8	1.58	26.5	16.7	16.3
37	4 750	254	73	11.1	13.4	37.9	298	89.3	1.38	24.0	17.0	15.6
30	3 780	254	69	11.1	9.6	32.6	257	92.9	1.14	21.2	17.4	15.3
22.8	2 880	254	65	11.1	6.1	27.7	218	98.1	0.912	18.5	17.8	15.8
C230 × 30	3 800	229	67	10.5	11.4	25.4	222	81.8	0.997	19.1	16.2	14.7
22	2 840	229	63	10.5	7.2	21.2	185	86.4	0.796	16.5	16.7	14.9
19.9	2 530	229	61	10.5	5.9	19.8	173	88.5	0.708	15.4	16.7	15.0
C200 × 27.9	3 560	203	64	9.9	12.4	18.2	179	71.5	0.817	16.4	15.1	14.3
20.5	2 660	203	59	9.9	7.7	14.9	147	75.7	0.620	13.7	15.4	13.9
17.1	2 170	203	57	9.9	5.6	13.4	132	78.6	0.538	12.6	15.7	14.4
C180 × 18.2	2 310	178	55	9.3	8.0	10.0	112	65.8	0.470	11.2	14.3	13.1
14.6	1 850	178	53	9.3	5.3	8.83	99.2	69.1	0.400	10.2	14.7	13.7
C150 × 19.3	2 450	152	54	8.7	11.1	7.11	93.6	53.9	0.420	10.2	13.1	12.9
15.6	1 980	152	51	8.7	8.0	6.21	81.7	56.0	0.347	9.01	13.2	12.5
12.2	1 540	152	48	8.7	5.1	5.35	70.4	58.9	0.276	7.82	13.4	12.7
C130 × 13	1 710	127	48	8.1	8.3	3.70	58.3	46.5	0.264	7.37	12.4	12.2
10.4	1 310	127	47	8.1	4.8	3.25	51.2	49.8	0.229	6.74	13.2	13.0
C100 × 10.8	1 370	102	43	7.5	8.2	1.90	37.3	37.2	0.172	5.44	11.2	11.4
8.0	1 020	102	40	7.5	4.7	1.61	31.6	39.7	0.130	4.56	11.3	11.5
C75 × 8.9	1 130	76.2	40	6.9	9.0	0.850	22.3	27.4	0.122	4.25	10.4	11.3
7.4	936	76.2	37	6.9	6.6	0.751	19.7	28.3	0.0948	3.62	10.1	10.8
6.1	765	76.2	35	6.9	4.3	0.671	17.6	29.6	0.0765	3.16	10.0	10.8

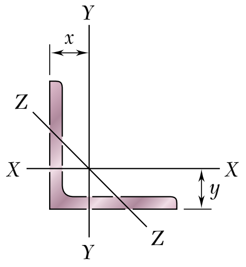
† Un canal de viga americano se designa por la letra C seguida de la altura nominal en milímetros y la masa en kilogramos por metro.

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero

(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

Ángulos

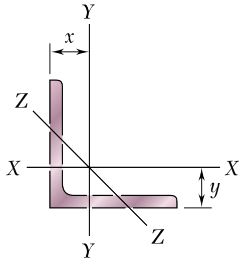
Piernas iguales



Tamaño y espesor, in.	**Peso por pie, lb/ft**	**Área, in.^{2}**	**Eje *X-X* y eje *Y-Y***				**Eje *Z-Z***
			***I*, in.^{4}**	***S*, in.^{3}**	***r*, in.**	***x* o *y*, in.**	***r*, in.**
L8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
¾	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58
½	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
L6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
¾	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17
⅝	24.2	7.11	24.2	5.66	1.84	1.73	1.18
½	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
⅜	14.9	4.36	15.4	3.53	1.88	1.64	1.19
L5 × 5 × ¾	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975
⅝	20.0	5.86	13.6	3.86	1.52	1.48	0.978
½	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
⅜	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990
L4 × 4 × ¾	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
⅝	15.7	4.61	6.66	2.40	1.20	1.23	0.779
½	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782
⅜	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
¼	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795
L3½ × 3½ × ½	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
⅜	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687
¼	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
L3 × 3 × ½	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
⅜	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587
¼	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592
L2½ × 2½ × ½	7.7	2.25	1.23	0.724	0.739	0.806	0.487
⅜	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487
¼	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491
3⁄16	3.07	0.902	0.547	0.303	0.778	0.694	0.495
L2 × 2 × ⅜	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389
¼	3.19	0.938	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391
⅛	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero
(Unidades SI)

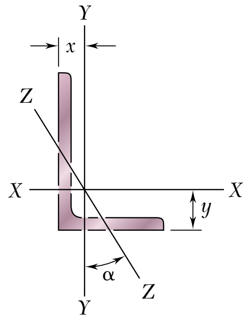
Ángulos
Piernas iguales



Tamaño y espesor, mm	Masa por metros, kg/m	Área, mm^2	Eje *X-X* y eje *Y-Y*				Eje *Z-Z*
			I 10^6 mm^4	*S* 10^3 mm^3	*r* mm	*x* o *y* mm	*r* mm
L203 × 203 × 25.4	75.9	9 670	36.9	258	61.8	60.0	39.7
19.0	57.9	7 350	28.9	199	62.7	57.8	40.0
12.7	39.3	4 990	20.2	137	63.6	55.5	40.4
L152 × 152 × 25.4	55.7	7 080	14.6	139	45.4	47.2	29.5
19.0	42.7	5 420	11.6	108	46.3	44.9	29.7
15.9	36.0	4 580	10.0	92.5	46.7	43.9	29.9
12.7	29.2	3 700	8.22	75.2	47.1	42.7	30.0
9.5	22.2	2 800	6.34	57.4	47.6	41.5	30.2
L127 × 127 × 19.0	35.1	4 470	6.54	74.0	38.3	38.6	24.7
15.9	29.8	3 790	5.66	63.2	38.6	37.5	24.8
12.7	24.1	3 060	4.68	51.7	39.1	36.5	25.0
9.5	18.3	2 320	3.63	39.6	39.6	35.3	25.1
L102 × 102 × 19.0	27.5	3 520	3.23	46.3	30.3	32.3	19.9
15.9	23.4	2 990	2.81	39.7	30.7	31.3	19.9
12.7	19.0	2 430	2.34	32.6	31.0	30.2	19.9
9.5	14.6	1 850	1.83	25.1	31.5	29.0	20.0
6.4	9.8	1 260	1.29	17.4	32.0	28.0	20.3
L89 × 89 × 12.7	16.5	2 100	1.52	24.5	26.9	26.9	17.4
9.5	12.6	1 600	1.19	18.8	27.3	25.8	17.4
6.4	8.6	1 100	0.845	13.1	27.7	24.6	17.6
L76 × 76 × 12.7	14.0	1 770	0.915	17.5	22.7	23.6	14.8
9.5	10.7	1 350	0.725	13.6	23.2	22.5	14.9
6.4	7.3	932	0.517	9.50	23.6	21.4	15.0
L64 × 64 × 12.7	11.4	1 460	0.524	12.1	18.9	20.6	12.5
9.5	8.7	1 130	0.419	9.40	19.3	19.4	12.5
6.4	6.1	778	0.302	6.62	19.7	18.4	12.6
4.8	4.6	591	0.235	5.09	19.9	17.8	12.7
L51 × 51 × 9.5	7.0	879	0.202	5.80	15.2	16.2	9.95
6.4	4.7	612	0.147	4.09	15.5	15.1	9.94
3.2	2.4	316	0.0806	2.17	16.0	13.9	10.1

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero
(Unidades utilizadas en Estados Unidos)

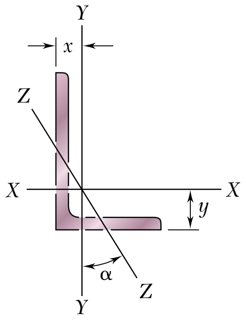
Ángulos
Piernas desiguales



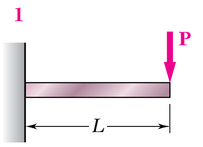
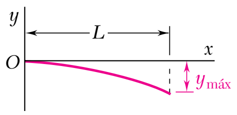
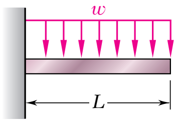
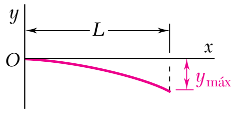
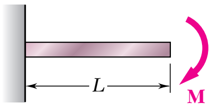
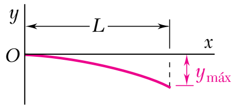
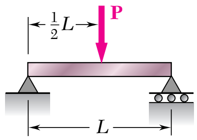
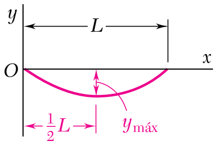
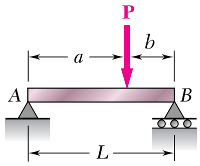
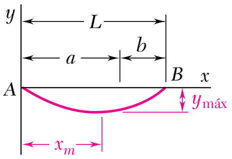
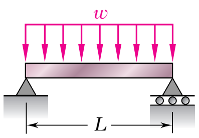
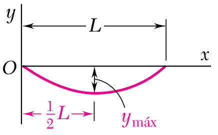
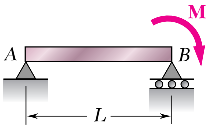
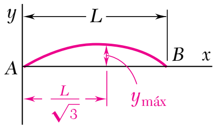
Tamaño y espesor, in.	Peso por ft, lb/ft.	Área, in.^{2}	Eje *X-X*				Eje *Y-Y*				Eje *Z-Z*	
			I_x, in.^{4}	S_x, in.^{3}	r_x, in.	y, in.	I_y, in.^{4}	S_y, in.^{3}	r_y, in.	x, in.	r_z, in.	tan α
L8 × 6 × 1	44.2	13.0	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
¾	33.8	9.94	63.4	11.7	2.53	2.56	30.7	6.92	1.76	1.56	1.29	0.551
½	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.558
L6 × 4 × ¾	23.6	6.94	24.5	6.25	1.88	2.08	8.68	2.97	1.12	1.08	0.860	0.428
½	16.2	4.75	17.4	4.33	1.91	1.99	6.27	2.08	1.15	0.987	0.870	0.440
⅜	12.3	3.61	13.5	3.32	1.93	1.94	4.90	1.60	1.17	0.941	0.877	0.446
L5 × 3 × ½	12.8	3.75	9.45	2.91	1.59	1.75	2.58	1.15	0.829	0.750	0.648	0.357
⅜	9.8	2.86	7.37	2.24	1.61	1.70	2.04	0.888	0.845	0.704	0.654	0.364
¼	6.6	1.94	5.11	1.53	1.62	1.66	1.44	0.614	0.861	0.657	0.663	0.371
L4 × 3 × ½	11.1	3.25	5.05	1.89	1.25	1.33	2.42	1.12	0.864	0.827	0.639	0.543
⅜	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551
¼	5.8	1.69	2.77	1.00	1.28	1.24	1.36	0.599	0.896	0.736	0.651	0.558
L3½ × 2½ × ½	9.4	2.75	3.24	1.41	1.09	1.20	1.36	0.760	0.704	0.705	0.534	0.486
⅜	7.2	2.11	2.56	1.09	1.10	1.16	1.09	0.592	0.719	0.660	0.537	0.496
¼	4.9	1.44	1.80	0.755	1.12	1.11	0.777	0.412	0.735	0.614	0.544	0.506
L3 × 2 × ½	7.7	2.25	1.92	1.00	0.924	1.08	0.672	0.474	0.546	0.583	0.428	0.414
⅜	5.9	1.73	1.53	0.781	0.940	1.04	0.543	0.371	0.559	0.539	0.430	0.428
¼	4.1	1.19	1.09	0.542	0.957	0.993	0.392	0.260	0.574	0.493	0.435	0.440
L2½ × 2 × ⅜	5.3	1.55	0.912	0.547	0.768	0.831	0.514	0.363	0.577	0.581	0.420	0.614
¼	3.62	1.06	0.654	0.381	0.784	0.787	0.372	0.254	0.592	0.537	0.424	0.626

Apéndice C. Propiedades de perfiles laminados de acero
(Unidades SI)

Ángulo
Piernas desiguales



			Eje *X-X*				Eje *Y-Y*				Eje *Z-Z*	
Tamaño y espesor, mm	**Masa por metro, kg/m**	**Área, mm^2**	**I_x 10^6 mm^4**	**S_x 10^3 mm^3**	**r_x mm**	**y mm**	**I_y 10^6 mm^4**	**S_y 10^3 mm^3**	**r_y mm**	**x mm**	**r_z mm**	**tan α**
L203 × 152 × 25.4	65.5	8 370	33.5	247	63.3	67.4	16.0	145	43.7	41.9	32.4	0.541
19.0	50.1	6 380	26.2	190	64.1	65.1	12.7	113	44.6	39.6	32.7	0.551
12.7	34.1	4 350	18.4	131	65.0	62.7	8.96	78.1	45.4	37.3	33.0	0.556
L152 × 102 × 19.0	35.0	4 470	10.1	102	47.5	52.5	3.65	49.0	28.6	27.5	21.9	0.435
12.7	24.0	3 060	7.20	70.8	48.5	50.3	2.64	34.4	29.4	25.3	22.2	0.446
9.5	18.2	2 320	5.56	54.0	49.0	49.1	2.06	26.4	29.8	24.1	22.4	0.452
L127 × 76 × 12.7	19.0	2 420	3.93	47.6	40.3	44.4	1.06	18.6	20.9	19.0	16.3	0.355
9.5	14.5	1 840	3.06	36.6	40.8	43.3	0.841	14.5	21.4	17.8	16.6	0.362
6.4	9.8	1 260	2.14	25.2	41.2	42.1	0.598	10.1	21.8	16.6	16.8	0.369
L102 × 76 × 12.7	16.4	2 100	2.12	31.1	31.8	33.9	1.00	18.1	21.8	20.9	16.2	0.536
9.5	12.6	1 600	1.66	24.0	32.2	32.8	0.792	14.1	22.2	19.8	16.3	0.545
6.4	8.6	1 100	1.17	16.6	32.6	31.6	0.564	9.83	22.6	18.6	16.5	0.552
L89 × 64 × 12.7	13.9	1 780	1.36	23.3	27.6	30.6	0.581	12.7	18.1	18.1	13.7	0.491
9.5	10.7	1 360	1.07	18.0	28.0	29.5	0.463	9.83	18.5	16.9	13.8	0.503
6.4	7.3	938	0.759	12.5	28.4	28.3	0.333	6.91	18.8	15.8	13.9	0.512
L76 × 51 × 12.7	11.5	1 450	0.795	16.4	23.4	27.4	0.283	7.84	14.0	14.9	10.9	0.420
9.5	8.8	1 120	0.632	12.7	23.8	26.2	0.228	6.11	14.3	13.7	10.9	0.434
6.4	6.1	772	0.453	8.90	24.2	25.1	0.166	4.32	14.7	12.6	11.1	0.446
L64 × 51 × 9.5	7.9	1 000	0.388	9.10	19.5	21.3	0.217	5.99	14.7	14.8	10.8	0.610
6.4	5.4	695	0.280	6.39	20.1	20.2	0.158	4.24	15.1	13.7	10.8	0.621

Viga y carga	Curva elástica	Deflexión máxima	Pendiente en el extremo	Ecuación de la curva elástica
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y=\frac{P}{6EI}(x^3-3Lx^2)$
2 		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y=-\frac{w}{24EI}(x^4-4Lx^3+6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y=-\frac{M}{2EI}x^2$
4 	 y L x O $\frac{1}{2}L$ $y_{máx}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm\frac{PL^2}{16EI}$	Para $x\leq\frac{1}{2}L$: $y=\frac{P}{48EI}(4x^3-3L^2x)$
5 	 y L a b B x A $y_{máx}$ x_m	Para $a>b$: $-\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ con $x_m=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$	$\theta_A=-\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_B=+\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	Para $x<a$: $y=\frac{Pb}{6EIL}[x^3-(L^2-b^2)x]$ Para $x=a$: $y=-\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 	 y L x O $\frac{1}{2}L$ $y_{máx}$	$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\frac{wL^3}{24EI}$	$y=-\frac{w}{24EI}(x^4-2Lx^3+L^3x)$
7 	 y L A B x $\frac{L}{\sqrt{3}}$ $y_{máx}$	$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A=+\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B=-\frac{ML}{3EI}$	$y=-\frac{M}{6EIL}(x^3-L^2x)$

APÉNDICE

E

Fundamentos de la certificación en ingeniería en Estados Unidos

En Estados Unidos se requiere que los ingenieros obtengan una licencia cuando su trabajo afecta en forma directa la salud, la seguridad o el bienestar públicos. Se intenta asegurar que los ingenieros alcancen un mínimo de calificación, la cual incluye competencia, habilidad, experiencia y carácter. El proceso de certificación incluye un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination*, sobre la experiencia profesional, y un segundo examen llamado *Principles and Practice of Engineering.* Quienes aprueban estos exámenes obtienen la certificación de *Ingeniero Profesional.* Los exámenes se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying.*

El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen de tensión abarca los contenidos de un programa normal de licenciatura en ingeniería, lo que incluye *Mecánica de materiales.* Los temas que se incluyen en dicho examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas, con referencia a las secciones del libro donde aparecen. También se incluyen problemas que pueden resolverse para repasar el material.

Esfuerzos (1.3-1.8; 1.11-1.12)
Problemas: 1.3, 1.7, 1.32, 1.40

Deformaciones (2.2-2.3; 2.5-2.6; 2.8-2.11; 2.14-2.15)
Problemas: 2.6, 2.19, 2.41, 2.50, 2.62, 2.69

Torsión (3.2-3.6; 3.13)
Problemas: 3.5, 3.27, 3.36, 3.52, 3.134, 3.138

Flexión (4.2-4.6; 4.12)
Problemas: 4.9, 4.22, 4.37, 4.48, 4.101, 4.108

Diagramas de momentos flector y cortante (5.2-5.3)
Problemas: 5.6, 5.8, 5.43, 5.49

Esfuerzos normales en vigas (5.1-5.3)
Problemas: 5.17, 5.22, 5.54, 5.58

Cortante (6.2-6.4; 6.6-6.7)
Problemas: 6.3, 6.12, 6.30, 6.36

Transformación de esfuerzos y deformaciones (7.2-7.4; 7.7-7.9)
Problemas: 7.8, 7.18, 7.34, 7.39, 7.81, 7.85, 7.101, 7.104

Deflexión de vigas (9.2-9.4; 9.7)
Problemas: 9.7, 9.10, 9.66, 9.75

Columnas (10.2-10.4)
Problemas: 10.11, 10.26, 10.28

Energía de deformación (11.2-11.4)
Problemas: 11.10, 11.13, 11.18

Crédito de fotografías

Página 1: © Construction Photography/CORBIS; p. 7: © Vince Streano/CORBIS; p. 10: © John DeWolf.

Página 46: © Construction Photography/CORBIS; p. 50: © John DeWolf; p. 51: Cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.; p. 51: © John DeWolf; p. 52: © John DeWolf; p. 53: © John DeWolf.

Página 131: © Brownie Harris/CORBIS; p. 132: © 2008 Ford Motor Company y Wieck Media Services, Inc.; p. 144: © John DeWolf; p. 150: Cortesía de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.

Página 208: © Lawrence Manning/CORBIS; p. 209: Cortesía de Flexifoil; p. 210: © Tony Freeman/Editor de fotografía; p. 218: © Peter Vandermark/Stock Boston; p. 233: © Kevin R. Morris/CORBIS; p. 260: © Tony Freeman/Editor de fotografía; p. 260: © John DeWolf.

Página 307: Cortesía de Christoph Kreutzenbeck/Demag Cranes; p. 308: © David Papazian/CORBIS; p. 355: Colección Godden, National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley.

Página 371: Colección Godden, National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley; p. 373: © John DeWolf; p. 390: Cortesía de Nucor-Yamato Steel Cornpany; p. 390: Cortesía de Leavitt Tube Company.

Página 422: NASA, fotografía de Tony Landis; p. 425: © John DeWolf; p. 425: © Spencer C. Grant/Editor de fotografía; p. 462: © Nancy D. Antonio; p. 462: © Spencer C. Grant/Editor de fotografía.

Página 495: © Mark Read/CORBIS.

Página 529: © Construction Photography/CORBIS; p. 536: Royalty-Free/CORBIS; p. 549: © John DeWolf; p. 560: © John DeWolf; p. 569: Cortesía de Aztec Galvenizing Services; p. 584: Royalty-Free/CORBIS.

Página 606: Cortesía de Fritz Engineering Laboratory; p. 608: © John DeWolf; p. 638: Colección Godden, National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley; p. 638: © Peter Marlow/Magnum Photos.

Página 669: © Corbis Super RF/Alamy; p. 673: © Bruce Harmon/Gunderson Communications; p. 693: © Tony Freeman/Photo Edit Inc.; p. 697: Cortesía de LIER Laboratory, Francia.

Índice

Acción elástica, 115
Acero. *Vea también* Perfiles de acero laminado; Acero estructural
  esfuerzos en, 236
  propiedades de, 746-747
Acero en ángulo
  de piernas desiguales, 760-761
  de piernas iguales, 758-759
  propiedades del, 758-761
Acero estructural
  diseño de esfuerzo permisible, para columnas bajo una carga céntrica, 638-640
  diseño del factor de carga y resistencia, para columnas bajo una carga céntrica, 643
Aleación Monel 400, propiedades de la, 748-749
Aleaciones de magnesio, propiedades de las, 748-749
Aluminio
  diseño de columnas bajo una carga céntrica, 640-641
  propiedades del, 746-747
Análisis tridimensional de deformación, 475-478
Análisis y diseño de estructuras simples, 12-14
  determinación de los esfuerzos de apoyo, 14
  determinación del esfuerzo cortante, 13-14
  determinación del esfuerzo normal, 12-13
Análisis y diseño de vigas para flexión, 307-370
  diagramas de cortante y momento flector, 311-321, 363-364
  diseño de vigas prismáticas para flexión, 332-342, 363, 365
  introducción, 308-310
  problemas de computadora, 369-370
  problemas de repaso, 367-368
  relaciones entre carga, cortante y momento flector, 322-332, 364
  resumen, 363-366
  uso de funciones de singularidad para determinar cortante y momento flector en una viga, 343-354, 365-366
  vigas no prismáticas, 354-362, 366
Analogía de membrana, 187-188
Ángulo de giro, 134, 136, 177
  en el rango elástico, 150-153, 199
  mediante suma algebraica, 151
Áreas. *Vea* Momentos de área
Articulación plástica, 392
Asociación Estadounidense del Bosque y el Papel (*American Forest & Paper Association*), 641
Axisimetría de ejes circulares, 137, 186
Barras con sección transversal rectangular, torsión de, 187, 202

Cálculos, 15
  errores en los, 15
Cambios de temperatura, problemas que incluyen, 74-83, 123
Canal estándar americano de acero (perfiles C), 218, 378
  propiedades del, 756-757
Canales de acero con perfil estándar (perfiles C), 218, 378
  propiedades de los, 756-757
Cantidades sin dimensión, 50
Carga axial
  céntrica, 38
  deformaciones bajo, 61-69, 92-94
  distribución de esfuerzo y deformación bajo, 46-130
  esfuerzo cortante, 9-11, 39
  esfuerzo normal, 7-9, 38
  esfuerzo y distribución en, 129-130
  esfuerzos de apoyo en conexiones, 11, 39
  excéntrica, 38, 276-285, 301
  incrementada lentamente, 670
Carga axial excéntrica, 38, 211
  caso general de, 276-285, 301
  en un plano de simetría, 260-270, 300
Carga céntrica, 8, 260
  axial, 38
  diseño de columnas bajo, 636-651, 663
Carga crítica en columnas, 662
Carga de torsión, 501
Carga de trabajo, 28
Carga estática equivalente, 698, 728
Carga multiaxial, 95
  ley de Hooke generalizada, 85-87, 124
Carga permisible y esfuerzo permisible, 2
  esfuerzos cortantes, 147-149
  factor de seguridad, 28-29, 40
Cargas. *Vea también* Descargas
  asimétricas, 402-413, 416, 582-583, 600-601
  axiales, 7-11, 38-39, 46-130, 276-285, 301
  céntricas, 8, 38, 260, 636-651, 663
  combinadas, 508-520, 522, 590
  concentradas, 308
  condiciones generales de, 24-27, 40
  de extremo abierto, 366
  de impacto, 670, 693-694, 728

  de torsión, 501
  desconocidas, 71-72
  distribuidas, 308, 563, 590
  excéntricas, 210, 260-270, 276-285, 300-301, 625-636, 652-661, 663
  multiaxiales, 85-87, 124
  reacción redundante, 563, 590
  relación con el cortante, 322
  repetidas, 59-60, 122
  simétricas, 571-572, 600
  transversales, 210, 308, 532-533, 595
  últimas, 28, 30, 37, 643
  visualización, 221
Cargas asimétricas
  centro del cortante, 402-413, 416
  de elementos de pared delgada, 402-413
  distribución de esfuerzos a través de la sección, 405-406
  esfuerzos combinados, 406-408
  esfuerzos cortantes en aletas, 405
  esfuerzos cortantes en almas, 405
  esfuerzos debidos a la flexión, 406
  esfuerzos debidos a la torsión, 406
  sistema fuerza-par equivalente en el centro del cortante, 406
Cargas combinadas, esfuerzos bajo, 508-520, 522, 590
Cargas concentradas, 308
  sencillas, 696
Cargas de extremo abierto, equivalentes, 366
Cargas de impacto, 670, 693-694, 728
Cargas de reacción redundante, 563, 590
Cargas desconocidas, 71-72
Cargas distribuidas, 308, 563, 590
Cargas equivalentes de extremo abierto, 366
Cargas excéntricas, 210, 260
  columnas bajo, 625-636, 663
  diseño de columnas bajo, 652-661, 663
Cargas repetidas, fatiga por, 59-60, 122
Cargas simétricas, vigas en voladizo y vigas con, 571-572, 600
Cargas transversales, 210, 308
  deformaciones de una viga bajo, 39, 532-533, 595
Cargas últimas, 28, 30, 37, 643
Castigliano, Alberto, 711
Centro de simetría, 408, 737
Centro del cortante, 373, 392, 402-413, 416
  sistema fuerza-par equivalente en el, 406
Centroide, 223
  de un área, 736-738
  de un área compuesta, 738-740
Círculo de Mohr
  aplicación al análisis tridimensional de esfuerzo, 448-450
  creación del, 439, 442-443, 456, 464, 477
  para el esfuerzo plano, 424, 436-446, 473-475, 487, 490
  para la deformación plana, 425, 490-491
Clebsch, A., 347
Cobre, propiedades del, 746-747
Coeficientes de
  expansión térmica, 74, 123
  influencia, 709
Columnas, 606-668
  carga crítica, 662
  carga excéntrica, 625-636, 663
  diseño de, bajo una carga céntrica, 636-651, 663
  diseño de, bajo una carga excéntrica, 652-661, 663
  estabilidad de estructuras, 608-610
  extensión de la fórmula de Euler para columnas con otras condiciones de extremo, 614-625
  fórmula de Euler para columnas articuladas, 610-613, 662
  fórmula de la secante, 607, 625-636, 663
  introducción, 607
  longitud efectiva, 607, 663
  problemas de computadora, 667-668
  problemas de repaso, 664-666
  relación de esbeltez, 662
  resumen, 662-663
Componentes del esfuerzo, 2, 24-27
Comportamiento elástico contra plástico en un material, 57-59, 122
Compresión, 214
  módulo de, 88
Concentración de esfuerzos, 48, 107-108, 126, 167, 211, 234-243, 299
  en ejes circulares, 167-172, 200
Concepto de esfuerzo, 1-45
  problemas de computadora, 43-45
Concreto
  esfuerzo máximo en, 237
  propiedades del, 748-749
  vigas reforzadas de, 233
Condiciones de frontera, 534, 543-544, 552-554, 595
Consideraciones de diseño, 27-37. *Vea también* Análisis y diseño
  carga permisible y esfuerzo permisible, 28-29, 40
  de ejes de transmisión, 134, 165-166, 200, 500-508, 522
  de vigas prismáticas para flexión, 332-342, 363, 365
  determinación de la resistencia última de un material, 27-28
  especificaciones de, 30
  factor de seguridad, 28-29, 40
  factores de carga y resistencia, 30, 40, 334-336
  para cargas, 28
  para cargas de impacto, 695-696
  selección de un factor de seguridad apropiado, 29-30
Constantes de integración, determinación de, 537
Corchetes de Macaulay, 347
Cortante
  doble, 11
  horizontal, 375

  relación con el momento flector, 323-324
  relación con la carga, 322
  simple, 11, 39
Corte longitudinal en un elemento de viga con perfil arbitrario, 388-389, 415-416
Coulomb, Charles Augustin de, 453
Criterio de cedencia para materiales dúctiles bajo esfuerzo plano, 424, 451-453, 488
  criterio de energía de distorsión máxima, 452-453
  criterio de esfuerzo cortante máximo, 451-452
Criterio de Coulomb, 453
Criterio de energía de distorsión máxima, 424, 452-453, 456, 670
Criterio de fractura para materiales frágiles bajo esfuerzo plano, 424, 453-461, 489
  criterio de Mohr, 454-455
  criterio del esfuerzo normal máximo, 453-454
Criterio de Mohr, 424, 454-455, 489
Criterio del esfuerzo cortante máximo, 424, 430-431, 440, 450-452, 456, 489
Criterio del esfuerzo normal máximo, 424, 453-454
Cuproníquel, propiedades del, 748-749
Curva elástica
  determinación directa a partir de la distribución de carga, 538-539
  ecuación de la, 533-537, 542-543, 552-554, 596, 762
Curvatura anticlástica, 220, 299
Curvatura, 218
  anticlástica, 220, 299
  radio de, 211, 252

Deflexión de vigas, 63-64, 77-78, 529-605
  aplicación a vigas en voladizo y vigas con cargas simétricas, 571-572, 600
  aplicación de la superposición a vigas estáticamente indeterminadas, 560-568, 598
  aplicación de los teoremas de momento de área a vigas con cargas no simétricas, 582-583, 600-601
  bajo cargas transversales, 532-533, 595
  bajo una carga simple, 698-708
  condiciones de frontera, 595
  determinación directa de la curva elástica a partir de la distribución de carga, 538-539
  diagramas de momento flector por partes, 573-581, 600
  ecuación de la curva elástica, 533-537, 596
  introducción, 530-532
  máxima, 584-585, 601, 698, 701, 762
  mediante el método del trabajo-energía, 698-708
  método de superposición, 558-560, 598
  por el teorema de Castigliano, 712-719, 729
  problemas de computadora, 604-605
  problemas de repaso, 602-603
  resumen, 594-601
  teoremas del momento de área, 569-571, 598-599
  uso de funciones de singularidad para determinar, 549-558, 597
  uso de los teoremas del momento de área con vigas estáticamente indeterminadas, 586-594, 601
  vigas estáticamente indeterminadas, 540-549, 596-597
Deflexión máxima, 533, 584-585, 601, 701, 762
Deflexiones y pendientes de vigas, 564, 696, 762
Deformación absoluta máxima, 215
Deformación cortante máxima, 475, 478
Deformación lateral, 84, 124
Deformación máxima, 693
Deformación normal, 471
  bajo carga axial, 48-50, 121
Deformación permanente, 58, 111, 122
Deformación plana, 101
Deformación real, 86, 90
Deformación térmica, 123
Deformación total, 76
Deformaciones, 47, 77-78, 104, 157, 212, 540, 587. *Vea también* Deformaciones elásticas; Deformaciones plásticas; Distribución de esfuerzo y deformación bajo carga axial; Relaciones esfuerzo-deformación; Esfuerzo verdadero y deformación verdadera
  análisis de, 104
  análisis tridimensional de, 475-478
  bajo cargas axiales, 61-69, 92-94
  cálculo de, 15
  de una viga bajo cargas transversales, 532-533, 595
  distribución de, 175
  en un eje circular, 135-139, 198
  en un elemento simétrico en flexión pura, 213-215
  en una sección transversal, 220-229, 299
  laterales, 84, 124
  máximas, 693
  normales bajo carga axial, 48-50, 121
  permanentes, 211
  planas, 101
  reales, 86, 90
  térmicas, 123
  total, 76
Deformaciones cortantes, 89-92, 125, 471
  distribución de, 133-134, 138
Deformaciones elásticas, 216-219, 298-299
  bajo cargas axiales, 122
Deformaciones permanentes, 211
Deformaciones plásticas, 47-48, 58, 109-112, 114-115, 122, 126, 211, 243-245, 300, 392-401, 416
  de elementos con un solo plano de simetría, 250
  en ejes circulares, 134, 172-174, 180, 200
  módulo de ruptura, 201
Densidad de energía de transformación, 670, 683
  métodos de energía, 672-674, 726

Descarga, 115
  elástica, 181, 254
Desplazamiento relativo, 62
Desviación tangencial, 570
Deterioro, 29
Determinación
  de fuerzas, 104, 426
  de la curva elástica, 538-539
  de la resistencia última de un material, 27-28, 40
  de las constantes de integración, 537
  de los esfuerzos cortantes en una viga, 376-377, 415
  de los esfuerzos de apoyo, 14
  del esfuerzo cortante, 13-14
  del esfuerzo normal, 12-13
  del momento de inercia de un área compuesta, 744-745
  del primer momento, 738-740
Diagrama de cargas modificado, 350
Diagramas de
  carga, 350
  cortante, 311-321, 325-327, 335-336, 363-364
  cortante y momento flector, 311-321, 363-364, 573-581, 600
  cuerpo libre, 2, 15-16, 31-32, 38, 63-64
  relaciones esfuerzo-deformación, 47, 49-55, 121, 176, 693
Diagramas de momento flector, 310-321, 325-327, 363-364
  por partes, 531, 573-581, 600
Dilatación, 88, 124
  módulo volumétrico, 87-89, 124
Discontinuidad, 343
Diseño de columnas
  acero estructural, 638-640, 643
  bajo una carga céntrica, 636-651, 663
  bajo una carga excéntrica, 652-661, 663
  con el factor de diseño de carga y resistencia, 643
  de aluminio, 640-641
  madera, 641-642
  método de interacción, 653-654, 663
  método del esfuerzo permisible, 638-640, 652-653, 663
  para la máxima eficiencia, 618
Diseño del factor de carga y resistencia (LRFD), 30, 37, 40, 334-336. *Vea también* Carga permisible y esfuerzo permisible
Diseño eficiente para columnas, 618
Distribución de cargas, determinación directa de la curva elástica a partir de la, 538-539
Distribución de esfuerzo y deformación bajo carga axial, 46-130
  bajo el principio de Saint-Venant, 104-106, 126
  carga multiaxial, 85-87, 124
  cargas repetidas, fatiga, 59-60, 122
  comportamiento elástico contra plástico en un material, 57-59, 122
  concentración de esfuerzos, 107-108, 126
  deformación cortante, 89-92, 125
  deformación normal bajo, 48-50, 121
  deformaciones bajo, 61-69, 92-94, 122
  deformaciones plásticas, 109-112, 126
  dilatación, 124
  esfuerzo verdadero y deformación verdadera, 55-56
  esfuerzos residuales, 113-120, 126
  introducción, 47-48
  ley de Hooke, 56-57, 122
  módulo de rigidez, 125
  principio de Saint-Venant, 104-106, 126
  problemas de repaso, 127-129
  problemas estáticamente indeterminados, 70-73, 123
  problemas que incluyen cambios de temperatura, 74-83, 123
  relación de Poisson, 84-85, 124
  resumen, 121-126
Distribución de esfuerzos
  en una viga rectangular delgada, 380-387, 405, 415
  estáticamente indeterminada, 8
  sobre la sección, 405-406
Doble cortante, 11

Ecuaciones de
  equilibrio, 39
  estática, 143
  la curva elástica, 533-537, 542-543, 552-554, 596, 762
Eje centroidal, 740, 743-744
Ejes
  centroidal, 740, 743-744
  de simetría, 737
Ejes circulares
  como axisimétrico, 137, 186
  deformaciones en, 135-139, 172-174, 198, 200
  hechos de un material elastoplástico, 174-177, 201
Ejes de transmisión, 132
  diseño de, 134
Ejes estáticamente indeterminados, 153-164, 199
Ejes huecos de pared delgada, 189-197, 202
Elasticidad, módulo de, 47, 56-57, 122
Elementos
  con un solo plano de simetría, 250
  curvos, 285-297, 301
  de dos fuerzas, 2-4
  de pared delgada, 402-413, 416
  estabilidad de, 6
  hechos de un material elastoplástico, 246-249
  no circulares, 186-188, 202
  simétricos, 211-212, 298
Elementos curvos, flexión de, 285-297, 301
Elementos de pared delgada, esfuerzos cortantes en, 420-421
Elementos de viga
  corte sobre la cara horizontal de, 374-376, 414-415

  de perfil arbitrario, corte longitudinal en, 388-389, 415-116
Elementos simétricos, en flexión pura de, 211-215, 298
Elongación
  máxima, 111
  porcentual, 54
Energía cinética, 693
Energía de deformación elástica
  bajo cargas axiales, 675-676, 727
  bajo cargas transversas, 679
  en flexión, 676-677, 727
  en torsión, 678, 727
  para esfuerzos cortantes, 677-679, 727
  para esfuerzos normales, 674-677
Energía de deformación, 684, 694, 696, 702
  bajo carga axial, 675-676, 727
  bajo cargas transversas, 679
  en flexión, 676-677, 727
  en torsión, 678, 727
  para un estado general de esfuerzos, 680-692, 728
  y métodos de energía, 670-672, 726
Enunciados IF/THEN/ELSE, 348
Errores, 15
Escalas de
  deformación, 425
  longitud, 50
  presión, 462, 480
Esfuerzo absoluto máximo, 216
Esfuerzo céntrico, 656
Esfuerzo crítico, 612
Esfuerzo de flexión, 217
Esfuerzo de ingeniería, 55
Esfuerzo longitudinal, 462-463
Esfuerzo máximo, 695, 698, 701
Esfuerzo plano, 682
  transformación de, 470-472, 490
Esfuerzo uniaxial, 214
Esfuerzo verdadero y deformación verdadera, 55-56
Esfuerzos. *Vea también* Carga permisible y esfuerzo permisible; Distribución de esfuerzos; Esfuerzos principales; Esfuerzos cortantes
  análisis y diseño, 6
  aplicación al análisis y diseño de estructuras simples, 12-14
  bajo cargas combinadas, 508-520, 522
  bajo condiciones generales de carga, 40
  cálculo de, 15
  concepto de, 1-45
  consideraciones de diseño, 27-37
  críticos, 612
  de apoyo, 2, 11, 14, 39
  de flexión, 217
  debidos a la flexión, 406
  debidos a la torsión, 406
  determinación de, 104
  en acero, 236
  en el rango elástico, 139-149, 198-199
  en los elementos de una estructura, 5
  en recipientes a presión de pared delgada, 462-469
  en un eje, 134-136
  en un plano oblicuo bajo carga axial, 23-24, 40
  estado general de, 446-447, 488
  exactitud numérica, 15-22, 40
  ingeniería de, 55
  introducción, 2
  longitudinales, 462-463
  máximos, 695, 698, 701
  método para la solución de problemas, 14-15, 39
  normal, 2, 7-9, 16, 18, 38, 309, 446, 510, 513, 670, 700, 727
  problemas de repaso, 41-43
  repaso de métodos de estática, 2-4
  residual, 113-120, 126, 177-185, 202, 250-259
  resumen, 38-40
  uniaxiales, 214
  valor promedio de, 7, 38
Esfuerzos combinados, 406-408
Esfuerzos cortantes, 2, 9-11, 16, 26-27, 39, 309, 382-383, 405, 700. *Vea también* Criterio del esfuerzo cortante máximo
  cargas asimétricas de elementos de pared delgada, 402-413, 416
  componentes de, 26
  deformaciones plásticas, 392-401, 416
  determinación de, 13-14, 376-377, 415
  en aletas, 405
  en almas, 405
  en elementos de pared delgada, 390-392, 416
  en un eje circular, 139
  en una viga rectangular esbelta, 380-387, 415
  en vigas, 376-379, 415
  energía de deformación elástica para, 677-679, 727
  introducción, 371-373
  longitudinal, sobre un elemento de viga de forma arbitraria, 388-389, 415-416
  mínimos, 141, 143
  permisible, 147-149, 157
  problemas de computadora, 420-421
  problemas de repaso, 417-419
  promedio, 16, 39, 376, 415
  resumen, 414-416
  sobre la cara horizontal de un elemento de viga, 374-376, 414-415
Esfuerzos de apoyo, 2, 11, 14, 16, 39
  determinación de, 14
  en conexiones, 11, 39
  promedio, 23

Esfuerzos normales, 2, 7-9, 16, 18, 38, 211, 309, 446, 510, 513, 670, 700, 727. *Vea también* Criterio del esfuerzo normal máximo
  determinación de, 12-13
  energía de deformación elástica para, 674-677
Esfuerzos principales, 424, 447, 487
  bajo cargas combinadas, 508-520, 522
  bajo una carga dada, 495-528
  diseño de ejes de transmisión, 500-508, 522
  en una viga, 497-499, 521
  esfuerzo cortante máximo, 428-436, 487
  introducción, 496
  problemas de computadora, 526-528
  problemas de repaso, 523-525
  resumen, 521-522
Esfuerzos residuales, 48, 113-120, 126, 211, 250-259
  en ejes circulares, 134, 177-185, 200, 202
Esfuerzos y deformaciones en el rango elástico, 216-219, 298-299
  fórmula de flexión elástica, 298
Estabilidad de elementos, 6
Estabilidad de estructuras en columnas, 607-610
Estado de esfuerzo tridimensional, 424
Estática, 77-78
  ecuaciones de, 143
  repaso de métodos, 2-4
Estricción, 52-53
Estructuras estáticamente indeterminadas, métodos de energía para, 716-725, 729
Estructuras simples, análisis y diseño de, 12-14
Euler, Leonhard, 611
Exactitud numérica, 15-22, 40
Expansión térmica, coeficiente de, 74, 123

Factor de forma, 248
Factor de resistencia, 643. *Vea también* Diseño del factor de carga y resistencia
Factor de seguridad, 28-29, 40, 683. *Vea* Margen de seguridad
  selección del apropiado, 29-30
Fatiga por cargas repetidas, 47, 59-60, 122
Flexión. *Vea también* Flexión pura
  análisis y diseño de vigas para, 307-370
  de elementos curvos, 285-297, 301
  de elementos hechos con varios materiales, 230-233, 299
  esfuerzo debido a, 406, 512, 656
Flexión asimétrica, 211, 270-275, 301
Flexión pura, 208-306
  asimétrica, 270-275, 301
  carga axial excéntrica en un plano de simetría, 260-270, 300
  caso general de una carga axial excéntrica, 276-285, 30l
  concentraciones de esfuerzo, 234-243, 299
  de elementos curvos, 285-297, 301
  de elementos hechos de varios materiales, 230-233, 299
  deformaciones en un elemento simétrico, 213-215
  deformaciones en una sección transversal, 220-229, 299
  deformaciones plásticas, 243-245, 250, 300
  elemento simétrico en, 211-212, 298
  elementos hechos de un material elastoplástico, 246-249
  esfuerzos residuales, 250-259
  esfuerzos y deformaciones en el rango elástico, 216-219, 298-299
  introducción, 209-211
  problemas de computadora, 305-306
  problemas de repaso, 302-304
  resumen, 298-301
Flexión y torsión, 402, 407
Flujo cortante, 190, 373, 375, 391
Fórmula de Euler, 607, 611, 630
  extensión a columnas con otras condiciones de extremo, 614-625
  para columnas articuladas, 610-613, 662
Fórmula de flexión elástica, 217, 298
Fórmula de Gordon-Rankine, 637
Fórmula de interacción, 653-654
Fórmula secante, 607, 625-636, 628, 663
Fórmulas
  de Euler, 610-625, 630
  flexión elástica, 217, 298
  Gordon-Rankine, 637
  interacción, 653-654
  secante 607, 625-636, 663
  torsión elástica, 140
Fuerzas
  desconocidas, 39
  determinación de, 104, 426
Función escalón (STP), 345, 365
Funciones de singularidad, 310, 531
  aplicaciones a la programación de computadoras, 348
  cargas de extremo abierto equivalentes, 366
  función escalón, 365
  uso para determinar el momento cortante y flector en una viga, 343-354, 365-366
  uso para determinar la pendiente y la deflexión de una viga, 549-558, 597
Fundamentos de la certificación en ingeniería en Estados Unidos, 763-764

Giro
  permanente, 179, 181
  radio de, 741-743

Hertz (Hz), 165
Hierro fundido, propiedades del, 746-747

Hooke, Robert, 56
Hz. *Vea* Hertz

Inercia. *Vea* Momentos de inercia
Ingeniero Profesional, licencia como, 763
Instituto Estadounidense de la Construcción en Acero (*American Institute of Steel Construction*), 638, 643
Integración
  constantes de, 537
  métodos de, 604

Joule (J), 671

Lámina, 57, 96
Ley de Hooke, 98, 109, 125, 139, 174
  generalizada, 84-87, 124
  módulo de elasticidad, 56-57, 122
Límite de fatiga, 60
Límite de resistencia, 60, 122
Límite elástico, 57, 122
Límite proporcional, 56, 122
Longitud efectiva de columnas, 607, 663
LRFD. *Vea* Diseño del factor de carga y resistencia

Macaulay, W. H., 347
Madera
  diseño de columnas bajo una carga céntrica, 641-642
  propiedades de la, 748-749
Máquina de pruebas de torsión, 150
Margen de seguridad, 28
Materiales. *Vea también* Materiales anisotrópicos; Materiales frágiles; Materiales compuestos; Materiales dúctiles; Materiales elastoméricos; Materiales elastoplásticos; Materiales homogéneos; Materiales isotrópicos; Materiales ortotrópicos
  comportamiento elástico contra plástico de, 57-59, 122
  determinación de la resistencia última de, 27-28
  flexión de elementos hechos de varios, 230-233, 299
Materiales anisotrópicos, 57
Materiales compuestos, 211
  reforzados con fibras, relaciones esfuerzo-deformación para, 95-104, 126
Materiales compuestos reforzados con fibras, relaciones esfuerzo deformación para, 95-104, 122, 126
Materiales dúctiles, 47, 51, 121
  bajo esfuerzo plano, criterio de cedencia para, 451-453, 488
Materiales elastoméricos, 103
Materiales elastoplásticos, 109, 126, 211, 246-247, 300
  ejes circulares hechos de, 174-177, 201
  elementos hechos de, 246-249
Materiales frágiles, 47, 51, 121
  bajo esfuerzo plano, criterio de fractura para, 453-461, 489
  falla súbita de, 29
Materiales homogéneos, 84
Materiales isotrópicos, 57, 84
Materiales ortotrópicos, 48, 96
Materiales usados en ingeniería, 746-749
  acero, 746-747
  aleación Monel 400, 748-749
  aleaciones de magnesio, 748-749
  aluminio, 746-747
  cobre, 746-747
  concreto, 748-749
  cuproníquel, 748-749
  hierro fundido, 746-747
  madera, 748-749
  plásticos, 748-749
  titanio, 748-749
Matriz, 57, 95
Maxwell, James Clerk, 710
Mediciones de deformación, roseta de deformación, 478-485, 490
Método de interacción, diseño de columnas bajo una carga excéntrica, 653-654, 663
Método del esfuerzo permisible, 222
  diseño de columnas bajo una carga excéntrica, 652-653, 663
Métodos de
  estática, repaso de, 2-4
  integración, 604
  solución de problemas, 14-15, 39
  superposición, 558-560, 598
Métodos de energía, 669-733
  carga estática equivalente, 728
  cargas de impacto, 693-694, 728
  deflexión bajo una carga simple mediante el método de trabajo-energía, 698-708
  deflexiones mediante el teorema de Castigliano, 712-715, 729
  densidad de energía de deformación, 672-674, 726
  diseño para cargas de impacto, 695-696
  energía de deformación, 670-672, 726
  energía de deformación elástica para esfuerzos cortantes, 677-679, 727
  energía de deformación elástica para esfuerzos normales, 674-677
  energía de deformación para un estado general de esfuerzo, 680-692, 728
  estructuras estáticamente indeterminadas, 716-725, 729
  introducción, 670
  módulo de resiliencia, 727
  módulo de tenacidad, 726-727

- problemas de computadora, 732-733
- problemas de repaso, 730-731
- resumen, 726-729
- teorema de Castigliano, 711-712, 729
- trabajo y energía bajo una carga simple, 696-698, 728-729
- trabajo y energía bajo varias cargas, 709-711

Módulo de
- compresión, 88
- elasticidad, 47, 56-57, 122
- resiliencia, 670, 673-674, 727
- rigidez, 48, 91, 96, 125
- ruptura, 174, 201, 245
- sección elástica, 217, 249, 299
- sección plástica, 248-249
- tenacidad, 670, 673, 726-727
- Young, 56

Módulo volumétrico, 48, 87-89, 124
Mohr, Otto, 436, 454
Momento de inercia centroidal, 223, 389, 395, 497
Momento elástico máximo, 211
Momento flector, 211, 222, 252
- relación a cortante, 323-324

Momento plástico, 253, 300
Momentos de áreas, 736-745
- centroide de un área, 736-738
- centroide de un área compuesta, 738-740
- determinación del momento de inercia de un área compuesta, 744-745
- determinación del primer momento, 738-740
- primer momento de un área, 736-738
- radio de giro, 741-743
- segundo momento o momento de inercia de un área, 741-743
- teorema de los ejes paralelos, 743-744

Momentos de inercia, 222. *Vea también* Momento flector
- centroidal, 223, 389, 395, 497
- de un área compuesta, determinación, 744-745
- polar, 155, 741

Momentos polares de inercia, 155, 741

National Council of Examiners for Engineering and Surveying, 763
National Design Specification for Wood Construction, 641
Núcleo elástico, radio de, 177

Pa. *Vea* Pascales
Par de torsión elástico
- fórmulas para el, 140
- máximo, 175

Par de torsión máximo, 175
Par de torsión plástico, 175
Paralelepípedos
- oblicuos, 89
- rectangulares, 86

Pares de torsión, 132. *Vea también* Par de torsión elástico; Par de torsión plástico
- internos, 141, 153
- máximos permisibles, 141, 156

Pascales (Pa), 5
Perfil estándar americano de acero (perfil S), 218, 378
- propiedades del, 754-755

Perfiles C. *Vea* Canales de acero de perfil estándar
Perfiles de acero con aleta ancha (perfiles W), propiedades de, 750-753
Perfiles de acero laminado, 750-761
- ángulos, 758-761
- canales estándar americano, 756-757
- perfiles de aleta ancha, 750-753
- perfiles estándar americano, 754-755

Plano de simetría, deformaciones plásticas de elementos con un solo, 250
Plano oblicuo, esfuerzos sobre un, 2, 40
Plásticos, propiedades de los, 748-749
Poisson, Siméon Denis, 84
Potencia, 165
Presión hidrostática, 88
Primer momento, 375, 736-740
- determinación del, 738-740

Principio de Saint-Venant, 104-106, 126, 138, 221, 276, 381, 499, 509, 532
Principios y Práctica de la Ingeniería, 763
Problemas de computadora
- análisis y diseño de vigas para flexión, 369-370
- aplicación de funciones de singularidad para determinar momentos cortante y flector en una viga, 348
- carga axial, 129-130
- columnas, 667-668
- concepto de esfuerzo, 43-45
- deflexión de vigas, 604-605
- esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada, 420-421
- esfuerzos principales bajo una carga dada, 526-528
- flexión pura, 305-306
- métodos de energía, 732-733
- torsión, 205-207
- transformaciones de esfuerzos y deformaciones, 493-494

Problemas de repaso
- análisis y diseño de vigas para flexión, 367-368
- cargas axiales, 127-129
- columnas, 664-666
- concepto de esfuerzo, 41-43
- deflexión de vigas, 602-603
- esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada, 417-419

esfuerzos principales bajo una carga dada, 523-525
flexión pura, 302-304
métodos de energía, 730-731
torsión, 203-205
transformaciones de esfuerzo y deformación, 491-493
Problemas estáticamente determinados, 309, 363, 534
Problemas estáticamente indeterminados, 47, 70-73, 123, 212, 309, 531
de primer grado, 541, 587, 596, 598
de segundo grado, 541, 587, 597-598
distribución de esfuerzos, 8
ejes, 134-135, 153-164, 198-199
método de superposición, 71-73
uso de los teoremas del momento de área con, 586-594, 601
vigas, 540-549, 596-597
Propiedades de
materiales selectos usados en ingeniería, 746-749
perfiles de acero laminado, 502-503, 750-761
Prueba de tensión, 50
Punto de cedencia mínima, 53
Punto de cedencia superior, 53
Puntos de cedencia, superior e inferior, 53

Radio de curvatura, 211, 252
permanente, 254
Radio de giro, 741-743
Rango elástico, 216
ángulo de giro, 150-153, 199
Reacciones redundantes, 71
Recipientes a presión de pared delgada, 425, 489
Recipientes cilíndricos a presión de pared delgada, esfuerzos en, 489
Recipientes esféricos a presión de pared delgada, 489
Relación de esbeltez, 612, 645, 662
Relación de Poisson, 47, 84-85, 96, 124
Relaciones esfuerzo-deformación, 172. *Vea también* Esfuerzo verdadero y deformación verdadera
diagramas de, 47, 49-55, 121, 176, 693
para materiales compuestos reforzados con fibras, 95-104, 126
Resiliencia, módulo de, 670, 673-674, 727
Resistencia. *Vea también* Resistencia última de un material
a la cedencia, 52, 121, 683
a la ruptura, 52
constante, 310, 354, 366
Resistencia última de un material, 2, 52
determinación de la, 27-28, 40
Rigidez
en flexión, 534, 572, 595
módulo de, 48, 91, 96, 125
Rigidez de flexión, 534, 572, 595
Roseta de deformación, 425, 478-485, 490
Rotación, velocidad de, 165
Ruptura, módulo de, 174, 201, 245

Saint-Venant, Adhémar Barré de, 106
Sección transversal, deformación en una, 220-229, 299
Secciones no circulares, 189
Segundo momento de áreas, 741-743
Simetría
centro de, 408, 737
eje de, 737
Sistema equivalente fuerza-par en el centro del cortante, 406
Sistema fuerza-par en el centro del cortante, equivalente, 406
Solución de problemas, método de, 14-15, 39
Superficie neutra, 214, 216, 286, 298
Superficies de apoyo, 11, 39
Superposición
aplicación a vigas estáticamente indeterminadas, 560-568, 598
método de, 71-73, 263, 278, 292, 409, 598
principio de, 86

Tangente de referencia, 571, 577, 582-583, 588, 600
Tenacidad, módulo de, 670, 673, 726-727
Tensión, 214
Tensores diagonales, 46
Teorema de Castigliano, 670, 711-712, 729
deflexiones por el, 712-719
Teorema de los ejes paralelos, 743-744
Teorema del primer momento de área, 531, 569, 574-577, 584, 599
Teorema del segundo momento de área, 531, 570, 574-577, 599
Teorema recíproco de Maxwell, 710
Teoremas del momento de área, 569-571, 587, 594, 598-599
aplicación a vigas con cargas asimétricas, 582-583, 600-601
uso con vigas estáticamente indeterminadas, 586-594, 601
Termoelasticidad, 58
Titanio, propiedades del, 748-749
Torsión, 131-207. *Vea también* Ángulo de torsión; Torsión permanente
de barras con sección transversal rectangular, 202
de elementos no circulares, 186-188, 202
deformaciones plásticas en ejes circulares, 172-174, 200
esfuerzos debidos a la, 406, 512
introducción, 132-134
módulo de ruptura en, 174
problemas de computadora, 205-207
problemas de repaso, 203-205
resumen, 198-202

Trabajo
  elemental, 671
  total, 671
Trabajo y energía
  bajo una sola carga, 696-698, 728-729
  bajo varias cargas, 709-711
  principio de, 701-702
Transformaciones de esfuerzo y deformación, 422-494
  análisis tridimensional de la deformación, 475-478
  aplicación del círculo de Mohr al análisis tridimensional del esfuerzo, 448-450
  círculo de Mohr para esfuerzo plano, 436-446, 473-475, 487, 490
  criterio de cedencia para materiales dúctiles bajo esfuerzo plano, 451-453, 488
  criterios de fractura para materiales frágiles bajo esfuerzo plano, 453-461, 489
  de esfuerzo plano, 425-427, 470-472, 486, 490
  esfuerzo cortante máximo, 428-436, 487
  esfuerzos en recipientes de pared delgada a presión, 462-469
  esfuerzos principales, 487
  estado general de esfuerzos, 446-447, 488
  introducción, 423-425
  mediciones de transformación, 478-485, 490
  problemas de computadora, 493-494
  problemas de repaso, 491-493
  resumen, 486-490
Trayectorias de esfuerzos, 499

Valor promedio de esfuerzos, 7, 38
Velocidad de rotación, 165
Vigas. *Vea también* Análisis y diseño de vigas para flexión
  de resistencia constante, 366
  esfuerzos cortantes en, 420-421
  estáticamente indeterminadas, 540-549, 596-597
  no prismáticas, 310, 354-362, 366
Vigas de acero con perfil estándar (perfiles S), 218, 378
  propiedades de las, 754-755
Vigas en voladizo, 534, 571, 600
  y vigas con cargas simétricas, 571-572, 600
Vigas no prismáticas, 310, 354-362, 366
  vigas de resistencia constante, 366
Vigas rectangulares, esbeltas, distribución de esfuerzos en, 380-387, 415

Winkler, E., 285

Young, Thomas, 56

Respuestas a los problemas

En las siguientes páginas se encuentran las respuestas a los problemas cuyo número está en redondas. Las respuestas a los problemas con números en tipo cursivo no se incluyen en el presente listado.

CAPÍTULO 1

1.1 28.2 kips.

1.2 *a)* 12.73 ksi. *b)* −2.83 ksi.

1.3 $d_1 = 22.6$ mm; $d_2 = 15.96$ mm.

1.4 *a)* 35.7 MPa. *b)* 42.4 MPa.

1.7 *a)* 101.6 MPa. *b)* −21.7 MPa.

1.8 33.1 kN.

1.11 13.58 ksi.

1.12 0.400 in^2.

1.13 *a)* 17.86 kN. *b)* −41.4 MPa.

1.14 −4.97 MPa.

1.15 292 mm.

1.16 889 psi.

1.18 67.9 kN.

1.19 8.33 in.

1.20 63.3 mm.

1.21 *a)* 3.33 MPa. *b)* 525 mm.

1.23 *a)* 23.0 MPa. *b)* 24.1 MPa. *c)* 21.7 MPa.

1.25 *a)* 444 psi. *b)* 7.50 in. *c)* 2 400 psi.

1.26 *a)* 9.94 ksi. *b)* 6.25 ksi.

1.27 *a)* 80.8 MPa. *b)* 127.0 MPa. *c)* 203 MPa.

1.29 $\sigma = 70.0$ psi; $\tau = 40.4$ psi.

1.31 $\sigma = 489$ kPa; $\tau = 489$ kPa.

1.32 *a)* 12.60 kN. *b)* 560 kPa.

1.33 *a)* 180.0 kips. *b)* 45°. *c)* −2.5 ksi. *d)* −5.0 ksi.

1.35 833 kN.

1.36 −21.6 MPa; 7.87 MPa.

1.37 15.08 kN.

1.38 3.45.

1.40 2.35.

1.41 1.279 in.

1.43 146.8 mm.

1.44 3.40.

1.47 *a)* 3.68. *b)* 1.392 in. *c)* 3.07 in.

1.48 3.68 kips.

1.49 3.02.

1.51 3.14 kips.

1.53 1.683 kN.

1.54 2.06 kN.

1.55 3.72 kN.

1.56 3.97 kN.

1.57 *a)* 362 kg. *b)* 1.718.

1.58 *a)* 629 lb. *b)* 1.689.

1.59 *a)* 11.09 ksi. *b)* −12.00 ksi.

1.60 *a)* 14.64 ksi. *b)* −9.96 ksi.

1.61 *a)* 8.92 ksi. *b)* 22.4 ksi. *c)* 11.21 ksi.

1.63 *a)* 94.1 MPa. *b)* 44.3 MPa.

1.65 11.98 kN.

1.67 *a)* 49.9 mm. *b)* 257 mm.

1.68 $21.3° \leq \theta \leq 32.3°$.

1.70 $L_{\text{mín}} = \sigma_{\text{perm}} d/4\tau_{\text{perm}}$.

1.C2 *c)* 16 mm $\leq d \leq$ 22 mm. *d)* 18 mm $\leq d \leq$ 22 mm.

1.C3 *c)* 0.70 in. $\leq d \leq$ 1.10 in. *d)* 0.85 in. $\leq d \leq$ 1.25 in.

1.C4 *b)* Para $\beta = 38.66°$, $\tan \beta = 0.8$; *BD* es perpendicular a *BC*.
c) *F.S.* = 3.58 Para $\alpha = 26.6°$; **P** es perpendicular a la línea *AC*.

1.C5 *b)* *El elemento de la figura P 1.29, para* $\alpha = 60°$*:*
(1) 70.0 psi; (2) 40.4 psi; (3) 2.14; (4) 5.30; (5) 2.14.
El elemento de la figura P 1.31, para $\alpha = 45°$*:*
(1) 489 kPa; (2) 489 kPa; (3) 2.58; (4) 3.07; (5) 2.58.

1.C6 *d)* $P_{\text{perm}} = 5.79$ kN; el esfuerzo en los eslabones es crítico.

CAPÍTULO 2

2.1 73.7 GPa.

2.3 *a)* 6.91 mm. *b)* 160.0 MPa.

2.5 *a)* 17.25 MPa. *b)* 2.82 mm.

2.6 *a)* 5.32 mm. *b)* 1.750 m.

2.7 *a)* 9.09 ksi. *b)* 1.760.

2.8 *a)* 2.45 kN. *b)* 50.0 mm.

2.10 9.77 mm.

2.11 $d_{\text{mín}} = 0.1701$ in., $L_{\text{mín}} = 36.7$ in.

2.13 0.429 in.

2.14 1.988 kN.

2.15 *a)* 5.62×10^{-3} in. *b)* 8.52×10^{-3} in. ↓. *c)* 16.30 ksi.

2.16 *a)* 9.53 kips. *b)* 1.254×10^{-3} in.

2.19 *a)* 32.8 kN. *b)* 0.0728 mm ↓.

2.20 *a)* 0.01819 mm ↑. *b)* 0.0919 mm ↓.

2.21 $\delta_{AB} = -2.11$ mm, $\delta_{AD} = 2.03$ mm.

2.23 30.0 kips.

2.24 *a)* 46.3 in. *b)* 31.6 kips.

2.25 *a)* 80.4 μm ↑. *b)* 209 μm ↓. *c)* 390 μm ↓.

2.27 0.1095 mm ↓.

2.28 $x < 92.6$ mm.

2.29 *a)* $\delta = \rho g L^2/2E$. *b)* $F = \frac{1}{2}W$.

2.30 $\delta_A = Ph/\pi Eab \downarrow$.

2.35 *a)* $\sigma_s = -18.01$ ksi, $\sigma_a = -6.27$ ksi. *b)* -6.21×10^{-3} in.
2.36 *a)* 23.9 kips. *b)* 14.50 kips.
2.37 $\sigma_s = 67.1$ MPa, $\sigma_c = 8.38$ MPa.
2.38 3 330 kN.
2.39 *a)* 0.0762 mm. *b)* $\sigma_{AB} = 30.5$ MPa, $\sigma_{EF} = 38.1$ MPa.
2.41 *a)* en *A*: 62.8 kN ⟵; en *E*: 37.2 kN ⟵. *b)* 46.3 μm ⟶.
2.42 *a)* en *A*: 45.5 kN ⟵; en *E*: 54.5 kN ⟵. *b)* 48.8 μm ⟶.
2.43 *a)* en *A*: 14.72 kips ⟶; en *D*: 12.72 kips ⟵. *b)* -1.574×10^{-3} in.
2.44 *a)* en *A*: 9.03 kips ⟶; en *D*: 7.03 kips ⟵. *b)* -241×10^{-6} in.
2.46 $T_A = \frac{1}{10}P$, $T_B = \frac{1}{5}P$, $T_C = \frac{3}{10}P$, $T_D = \frac{2}{5}P$.
2.47 -8.15 MPa.
2.48 -56.2 MPa.
2.50 75.4°C.
2.51 142.6 kN.
2.52 *a)* $\sigma_{AB} = -10.72$ ksi, $\sigma_{BC} = -24.1$ ksi. *b)* $\delta_B = 9.88 \times 10^{-3}$ in. ↓.
2.54 *a)* -17.91 ksi. *b)* -2.42 ksi.
2.55 *a)* 21.4°C. *b)* 3.68 MPa.
2.56 5.70 kN.
2.58 *a)* 201.6°F. *b)* 18.0107 in.
2.59 *a)* 52.3 kips. *b)* 9.91×10^{-3} in.
2.62 $E = 205$ MPa; $\upsilon = 0.455$; $G = 70.3$ MPa.
2.63 *a)* 1.324×10^{-3} in. *b)* -99.3×10^{-6} in. *c)* -12.41 in. *d)* -12.41×10^{-6} in^2.
2.64 *a)* -41.2×10^{-3} in. *b)* 2.06×10^{-3} in. *c)* 85.9×10^{-6} in.
2.65 422 kN.
2.67 *a)* 5.13×10^{-3} in. *b)* -0.570×10^{-3} in.
2.68 *a)* 7 630 lb. compresión. *b)* 4 580 lb. compresión.
2.69 *a)* 0.0754 mm. *b)* 0.1028 mm. *c)* 0.1220 mm.
2.70 *a)* -63.0 MPa. *b)* -13.50 mm^2. *c)* -540 mm^3.
2.75 0.0187 in.
2.76 $a = 0.818$ in; $b = 2.42$ in.
2.77 1.091 mm ↓.
2.78 302 kN.
2.81 *a)* 262 mm. *b)* 21.4 mm.
2.82 $G = 1.080$ MPa; $\tau = 431$ kPa.
2.83 *a)* 588×10^{-6} in. *b)* 33.2×10^{-3} in^3. *c)* 0.0294%.
2.84 *a)* $\Delta h = -0.0746$ mm; $\Delta V = -143.9$ mm^3. *b)* $\Delta h = -0.0306$ mm; $\Delta V = -521$ mm^3.
2.86 *a)* 16.55×10^{-6} in^3. *b)* 16.54×10^{-6} in^3.
2.88 3.00.
2.89 *a)* 0.0303 mm. *b)* $\sigma_x = 40.6$ MPa; $\sigma_y = \sigma_z = 5.48$ MPa.
2.90 *a)* $\sigma_x = 44.6$ MPa; $\sigma_y = 0$; $\sigma_z = 3.45$ MPa. *b)* -0.0129 mm.
2.95 0.874 in.
2.96 *a)* 0.425 in. *b)* 7.23 kips.
2.97 *a)* 12 mm. *b)* 62.1 kN.
2.98 *a)* 134.7 MPa. *b)* 135.3 MPa.
2.99 *a)* 92.3 kN, 0.791 mm. *b)* 180.0 kN, 1.714 mm.
2.100 189.6 MPa.
2.101 2.65 kips, 0.1117 in.
2.102 3.68 kips, 0.1552 in.
2.105 176.7 kN, 3.84 mm.
2.106 176.7 kN, 3.16 mm.
2.107 *a)* 0.292 mm. *b)* $\sigma_{AC} = 250$ MPa, $\sigma_{CB} = -307$ MPa. *c)* 0.027 mm.
2.108 *a)* 990 kN. *b)* $\sigma_{AC} = 250$ MPa, $\sigma_{CB} = -316$ MPa. *c)* 0.031 mm.
2.111 *a)* 112.1 kips. *b)* 82.9 ksi. *c)* 0.00906 in.
2.112 *a)* 0.0309 in. *b)* 64.0 ksi. *c)* 0.00387 in.
2.113 *a)* *AD*: 250 MPa, *BE*: 124.3 MPa. *b)* 0.622 mm ↓.
2.114 *a)* *AD*: 233 MPa, *BE*: 250 MPa. *b)* 1.322 mm ↓.
2.115 *a)* *AD*: -4.70 MPa, *BE*: 19.34 MPa. *b)* 0.0967 mm ↓.
2.116 *a)* -36.0 ksi. *b)* 15.84 ksi.
2.117 *a)* *AC*: -150.0 MPa, *CB*: -250 MPa. *b)* 0.1069 mm ⟶.
2.118 *a)* $AC = 56.5$ MPa, *CB*: 94.1 MPa. *b)* 0.0424 mm ⟶.
2.119 *a)* 0.1042 mm. *b)* *AC*: -65.2 MPa, *CB*: -65.2 MPa.
2.120 *a)* 0.00788 mm. *b)* *AC*: -6.06 MPa, *CB*: -6.06 MPa.
2.123 *a)* 915°F. *b)* 1759°F.
2.124 1.219 in.
2.125 4.67°C.
2.127 3.51 kips.
2.131 $\sigma_s = -9.47$ MPa, $\sigma_c = 0.391$ MPa.
2.132 105.6×10^3 lb/in.
2.133 41.7 kN.
2.135 *a)* $A\sigma_Y/\mu g$. *b)* EA/L.
2.C1 *Prob. 2.126: a)* 11.90×10^{-3} in. ↓. *b)* 5.66×10^{-3} in. ↑.
2.C3 *Prob. 2.60: a)* -116.2 MPa. *b)* 0.363 mm.
2.C5 $r = 0.25$ in.: 3.89 kips
$r = 0.75$ in.: 2.78 kips
2.C6 *a)* -0.40083. *b)* -0.10100. *c)* -0.00405

CAPÍTULO 3

3.1 87.7 MPa.
3.2 133.8 kN · m.
3.3 12.44 ksi.
3.5 *a)* 125.7 N · m. *b)* 181.4 N · m.
3.6 *a)* 70.7 MPa. *b)* 35.4 MPa. *c)* 6.25%.
3.8 7.95 kip · in.
3.9 *a)* 56.6 MPa. *b)* 36.6 MPa.
3.11 *a)* 81.2 MPa. *b)* 64.5 MPa. *c)* 23.0 MPa.
3.13 *a)* 8.35 ksi. *b)* 5.94 ksi.
3.14 *a)* 1.292 in. *b)* 1.597 in.
3.15 *a)* 1.503 in. *b)* 1.853 in.
3.16 9.16 kip · in.
3.19 *a)* 50.3 mm. *b)* 63.4 mm.
3.20 *a)* 15.18 mm. *b)* 132.5 N · m.
3.21 *a)* 2.39 in. *b)* 1.758 in.
3.23 *a)* 45.1 mm. *b)* 65.0 mm.
3.24 1.129 kN · m.
3.26 *a)* 1.442 in. *b)* 1.233 in.
3.27 *a)* 20.1 mm. *b)* 26.9 mm. *c)* 36.6 mm.
3.28 *a)* 55.0 MPa. *b)* 45.3 MPa. *c)* 47.7 MPa.
3.29 1.000, 1.025, 1.120, 1.200, 1.000.
3.30 *a)* $(T/w) = (c_1^2 + c_2^2)\tau_{\text{perm}}/2\rho g c_2$. *b)* $(T/w) = (T/w)_0(1 + c_1^2/c_2^2)$.
3.31 *a)* 2.19 kN · m. *b)* 9.11°.
3.33 9.38 ksi.

3.34 0.491 in.
3.36 *a*) 8.87°. *b*) 0.450°.
3.37 *a*) 14.43°. *b*) 46.9°.
3.38 6.02°.
3.40 3.77°.
3.41 12.22°.
3.42 13.23°.
3.44 53.8°.
3.45 36.1 mm.
3.46 22.5 mm.
3.47 1.285 in.
3.48 1.483 in.
3.49 62.9 mm.
3.50 42.1 mm.
3.53 *a*) 17.45 MPa. *b*) 27.6 MPa. *c*) 2.05°.
3.54 *a*) 688 N · m. *b*) 2.35°.
3.57 $\tau_{AB} = 9.95$ ksi, $\tau_{CD} = 1.849$ ksi.
3.58 $\tau_{AB} = 1.086$ ksi, $\tau_{CD} = 6.98$ ksi.
3.59 12.24 MPa.
3.60 0.241 in.
3.61 *a*) $\tau_{\text{máx}} = T/2\pi t r^2$ en $\rho = r_1$.
3.62 *a*) 82.5 MPa. *b*) 0.273°.
3.64 *a*) 9.51 ksi. *b*) 4.76 ksi.
3.65 *a*) 46.9 MPa. *b*) 23.5 MPa.
3.66 *a*) 20.1 mm. *b*) 15.94 mm.
3.68 *a*) 18.80 kW. *b*) 24.3 MPa.
3.69 *a*) 51.7 kW. *b*) 6.17°.
3.71 *a*) 2.92 ksi. *b*) 1.148°.
3.72 $t = 8$ mm.
3.74 30.4 Hz.
3.76 *a*) 0.799 in. *b*) 0.947 in.
3.77 *a*) 4.08 ksi. *b*) 6.79 ksi.
3.78 *a*) 16.02 Hz. *b*) 27.2 Hz.
3.79 1 917 rpm.
3.80 50.0 kW.
3.83 23.4 mm.
3.86 63.5 kW.
3.87 5.1 mm.
3.88 42.6 Hz.
3.89 *a*) 203 N · m. *b*) 165.8 N · m.
3.90 42.8 hp.
3.91 *a*) 2.61 ksi. *b*) 2.01 ksi.
3.92 *a*) 9.64 kN · m. *b*) 9.91 kN · m.
3.93 2 230 lb · in.
3.94 *a*) 19.10 ksi, 1.000 in. *b*) 20.0 ksi, 0.565 in.
3.96 13.32 mm.
3.98 *a*) 2.47°. *b*) 4.34°.
3.99 *a*) 6.72°. *b*) 18.71°.
3.100 *a*) 8.17 mm. *b*) 42.1°.
3.101 *a*) 18 ksi. *b*) 15.63°.
3.103 *a*) 1.126 ϕ_Y. *b*) 1.587 ϕ_Y. *c*) 2.15 ϕ_Y.
3.105 *a*) 977 N · m. *b*) 8.61 mm.
3.106 *a*) 11.71 kN · m, 3.44°. *b*) 14.12 kN · m, 4.81°.
3.107 *a*) 8.02°. *b*) 14.89 kN · m.
3.108 *a*) 0.997 in. *b*) 3.70 in.
3.109 *a*) 85.9 kip · in. *b*) 2.48 in.
3.112 *a*) 1.876 kN · m. *b*) 17.19°.
3.113 *a*) 1.900 kN · m. *b*) 17.19°.
3.114 5.63 ksi.
3.115 14.62°.
3.118 *a*) 33.5 MPa en $\rho = 16$ mm. *b*) 1.032°.
3.119 *b*) $0.221\ \tau_Y c^3$.
3.120 3.10° para la carga invertida, 4.04° para la carga original.
3.121 *a*) 189.2 N · m, 9.05°. *b*) 228 N · m, 7.91°.
3.122 *a*) 74.0 MPa, 9.56°. *b*) 61.5 MPa, 6.95°.
3.123 *a*) 12.48 kip · in, 0.908°. *b*) 10.13 kip · in, 0.942°.
3.124 *a*) 4.21 ksi, 0.509°. *b*) 5.19 ksi, 0.651°.
3.125 59.2 MPa.
3.126 5.07 MPa.
3.129 *a*) 29.8 mm. *b*) 30.4 mm. *c*) 27.6 mm.
3.130 *a*) 382 mm. *b*) 283 mm. *c*) 429 mm.
3.131 *a*) 4.57 kip · in. *b*) 4.31 kip · in. *c*) 5.77 kip · in.
3.132 *a*) 10.91 in. *b*) 8.07 in. *c*) 12.24 in.
3.135 *a*) 8.66 ksi. *b*) 8.51°.
3.136 *a*) 70.8 N · m. *b*) 8.77°.
3.137 *a*) 4.57 ksi. *b*) 2.96 ksi. *c*) 5.08°.
3.138 *a*) 925 N · m. *b*) 5.77°.
3.141 8.47 MPa en los puntos *a* y *b*.
3.142 4.73 MPa en el punto *a*; 9.46 MPa en el punto *b*.
3.143 7.34 kip · ft.
3.144 8.45 N · m.
3.145 1.735 in.
3.147 *a*) $T = T_0(1 - e/t)$. *b*) 10%, 50%, 90%.
3.148 *a*) 12.76 MPa. *b*) 5.40 kN · m.
3.150 *a*) $\tau_{prom}/\tau_m = \phi_2/\phi_1 = 1 + t^2/4c_m^2$. *b*) 0.25%, 1%, 4%.
3.151 *a*) El eje *AB*. *b*) 8.49 ksi.
3.153 *a*) 199.5 N · m. *b*) 10.40°.
3.156 39.3 MPa.
3.159 934 rpm.
3.160 1.221.
3.162 0.944.
3.C1 *Prob. 3.35: a*) 1.384°. *b*) 3.22°.
3.C3 *Prob. 3.155: a*) $T_A = 1105$ N · m; $T_C = 295$ N · m *b*) 45.0 MPa. *c*) 27.4 MPa.
3.C5 *a*) −3.282%. *b*) −0.853%. *c*) −0.138%. *d*) −0.00554%.
3.C6 *a*) −1.883%. *b*) −0.484%. *c*) −0.078%. *d*) −0.00313%.

CAPÍTULO 4

4.1 *a*) −6.52 ksi. *b*) 9.78 ksi.
4.3 5.28 kN · m.
4.4 4.51 kN · m.
4.5 129.6 kN · m.
4.6 34.2 kN · m.
4.7 8.82 ksi, −14.71 ksi.
4.9 73.2 MPa, −102.4 MPa.
4.11 2.17 kips.
4.12 2.89 kips.
4.13 58.8 kN.
4.15 42.9 kip · in.
4.16 106.1 N · m.
4.18 3.79 kN · m.
4.20 4.63 kip · in.
4.21 65.1 ksi.

4.22 *a)* 250 lb · in. *b)* 151.0 in.
4.23 *a)* 965 MPa. *b)* 20.5 N · m.
4.25 *a)* 75.0 MPa, 26.7 m. *b)* 125.0 MPa, 9.60 m.
4.27 0.950.
4.28 0.949.
4.29 *a)* 139.6 m. *b)* 481 m.
4.30 *a)* 1 007 in. *b)* 3 470 in. *c)* 0.01320°.
4.31 *a)* 334 ft. *b)* 0.0464°.
4.32 *a)* $(\sigma_x)_{\text{máx}}\,(y^2 - c^2)/2\rho c$. *b)* $-(\sigma_x)_{\text{máx}}\,c/2\rho$.
4.33 2.22 kN · m.
4.35 1.933 kN · m.
4.37 330 kip · in.
4.38 195.6 kip · in.
4.39 *a)* 44.5 MPa. *b)* −80.1 MPa.
4.40 *a)* 51.2 MPa. *b)* −119.5 MPa.
4.41 *a)* −1.921 ksi. *b)* 12.73 ksi.
4.43 23.6 m.
4.44 18.45 m.
4.45 692 ft.
4.47 32.4 kip · ft.
4.48 *a)* 212 MPa. *b)* −15.59 MPa.
4.49 *a)* 210 MPa. *b)* −14.08 MPa.
4.51 *a)* 29.0 ksi. *b)* −1.163 ksi.
4.53 *a)* 1 674 mm^2. *b)* 90.8 kN · m.
4.55 *a)* 29.6 MPa (aluminio), 26.7 MPa (latón), 17.78 MPa (acero). *b)* 88.6 m.
4.56 *a)* 38.7 MPa (acero), 7.74 MPa (aluminio), 3.87 MPa (latón). *b)* 203 m.
4.57 *a)* 7.70 ksi. *b)* 19.37 ksi.
4.58 *a)* 5.91 ksi. *b)* 21.2 ksi.
4.59 *a)* 6.15 MPa. *b)* −8.69 MPa.
4.61 *a)* 4.17 kip · in. *b)* 4.63 kip · in.
4.62 *a)* 10.77 ksi. *b)* 8.64 ksi.
4.64 *a)* 704 N · m. *b)* 580 N · m.
4.66 *a)* 1.25 kN · m. *b)* 1.53 kN · m.
4.67 *a)* 38.4 N · m. *b)* 52.8 N · m.
4.68 *a)* 57.6 N · m. *b)* 83.2 N · m.
4.69 *a)* 0.0258 in. *b)* 0.0793 in.
4.71 *a)* 0.521 in. *b)* 17.50 ft.
4.73 *a)* 19.44 kN · m. *b)* 28.1 kN · m.
4.74 *a)* 10.08 kN · m. *b)* 16.12 kN · m.
4.75 *a)* 322 kip · in. *b)* 434 kip · in.
4.76 *a)* 308 kip · in. *b)* 406 kip · in.
4.77 *a)* 29.2 kN · m. *b)* 1.500.
4.79 *a)* 462 kip · in. *b)* 1.435.
4.80 *a)* 420 kip · in. *b)* 1.364.
4.82 911 N · m.
4.84 48.6 kN · m.
4.85 111.0 kip · in.
4.86 211.5 kip · in.
4.87 120 MPa.
4.88 145.7 MPa.
4.89 *a)* −11.87 ksi. *b)* 18.26 ksi.
4.90 *a)* −13.36 ksi. *b)* 15.27 ksi.
4.91 *a)* 106.7 MPa. *b)* −31.15 mm, 0, 31.15 mm. *c)* 24.1 m.
4.95 *a)* 292 MPa. *b)* 7.01 mm.
4.97 *a)* 43 ksi. *b)* 10.75 kip · in.
4.99 *a)* $\sigma_A = \sigma_B = -1.875$ ksi. *b)* $\sigma_A = -3.59$ ksi, $\sigma_B = 1.094$ ksi.
4.100 *a)* $\sigma_A = \sigma_B = -1.875$ ksi. *b)* $\sigma_A = -2.97$ ksi, $\sigma_B = 1.719$ ksi.
4.101 *a)* $-2P/\pi r^2$. *b)* $-5P/\pi r^2$.
4.103 *a)* 112.8 MPa. *b)* −96.0 MPa.
4.105 *a)* 288 lb. *b)* 209 lb.
4.106 *a)* −79.6 MPa. *b)* −139.3 MPa. *c)* −152.3 MPa.
4.107 14.40 kN.
4.108 16.04 mm.
4.110 0.455 in.
4.113 *a)* 52.7 MPa. *b)* −67.2 MPa. *c)* 11.20 mm arriba de *D*.
4.114 *a)* 1 125 kN. *b)* 817 kN.
4.116 23.0 kips.
4.118 *a)* 40.3 kN. *b)* 56.3 mm desde la cara izquierda.
4.119 *a)* 69.6 kN. *b)* 41.9 mm desde la cara izquierda.
4.120 2.09 kips.
4.121 $P = 44.2$ kips, $Q = 57.3$ kips.
4.122 *a)* 30 mm. *b)* 94.5 kN.
4.125 *a)* 150 mm. *b)* −10 MPa.
4.126 *a)* −2.80 MPa. *b)* 0.452 MPa. *c)* 2.80 MPa.
4.127 *a)* 7.57 ksi. *b)* −2.03 ksi. *c)* −7.57 ksi.
4.129 *a)* 0.321 ksi. *b)* −0.107 ksi. *c)* 0.427 ksi.
4.131 *a)* 65.8 MPa. *b)* −164.5 MPa. *c)* −65.8 MPa.
4.132 *a)* 57.3°. *b)* 75.1 MPa.
4.134 *a)* 18.28°. *b)* 13.59 ksi.
4.135 *a)* 27.5°. *b)* $\sigma_D = 5.07$ ksi.
4.136 *a)* 32.9°. *b)* $\sigma_E = 61.4$ MPa.
4.137 −2.32 ksi.
4.138 113.0 MPa.
4.140 *a)* $\sigma_A = 41.7$ psi, $\sigma_B = 292$ psi. *b)* Interseca a *AB* en 0.500 in. de *A* e interseca a *BD* 0.750 in. de *D*.
4.141 *a)* $\sigma_A = -62.5$ psi, $\sigma_B = -271$ psi. *b)* No interseca a *AB*. Interseca *BD* a 0.780 in. a *B*.
4.142 *a)* $\sigma_A = 31.5$ MPa, $\sigma_B = -10.39$ MPa *b)* 94.0 mm arriba del punto *A*.
4.144 36.8 mm.
4.146 29.1 kip · in.
4.148 733 N · m.
4.149 1.323 kN · m.
4.150 900 N · m.
4.151 4.70°.
4.156 *a)* −5.62 ksi. *b)* 5.27 ksi.
4.157 $\sigma_A = -5.40$ ksi, $\sigma_B = 4.12$ ksi.
4.158 $\sigma_A = -65.1$ MPa, $\sigma_B = 39.7$ MPa.
4.160 60.9 mm.
4.162 *a)* −82.4 MPa. *b)* 36.6 MPa.
4.163 655 lb.
4.166 *a)* 3.06 ksi. *b)* −2.81 ksi. *c)* 0.529 ksi.
4.167 *a)* −64.1 MPa. *b)* 65.2 MPa.
4.168 *a)* −106.1 MPa. *b)* 38.9 MPa.
4.169 *a)* −45.2 MPa. *b)* 17.40 MPa.
4.170 *a)* −43.3 MPa. *b)* 14.43 MPa.
4.171 *a)* 16.05 ksi. *b)* −9.84 ksi.
4.172 *a)* 7.07 ksi. *b)* −3.37 ksi.
4.174 *a)* 63.9 MPa. *b)* −52.6 MPa.
4.176 *a)* −6.71 ksi. *b)* 3.24 ksi.

4.177 *a)* -3.65 ksi. *b)* 3.72 ksi.
4.184 259 kip · in.
4.186 *a)* 193.3 ksi. *b)* 0.0483 lb · in.
4.187 887 N · m.
4.189 *a)* 4.87 ksi. *b)* 5.17 ksi.
4.190 *a)* 56.7 kN · m. *b)* 20.0 m.
4.192 *a)* $-P/2at$. *b)* $2\ P/at$. *c)* $-P/2at$.
4.193 *a)* 57.8 MPa. *b)* -56.8 MPa. *c)* 25.9 MPa.
4.195 5.22 MPa, -12.49 MPa.
4.C1 *a = 4 mm:* $\sigma_a = 50.6$ MPa, $\sigma_s = 107.9$ MPa; *a = 14 mm:* $\sigma_a = 89.7$ MPa, $\sigma_s = 71.8$ MPa. *a)* 111.6 MPa. *b)* 6.61 mm.
4.C3 $\beta = 30°$: $\sigma_A = -7.83$ ksi, $\sigma_B = -5.27$ ksi, $\sigma_C = 7.19$ ksi, $\sigma_D = 5.91$ ksi; $\beta = 120°$: $\sigma_A = 1.557$ ksi, $\sigma_B = 6.01$ ksi, $\sigma_C = -2.67$ ksi, $\sigma_D = -4.89$ ksi.
4.C4 $r_1/h = 0.529$ para 50% de aumento en $\sigma_{\text{máx}}$.
4.C5 *Prob. 4.8:* 15.40 ksi; -10.38 ksi.
4.C6 $y_Y = 0.8$ *in.:* 76.9 kip · in., 552 in.; $y_Y = 0.2$ *in.:* 95.5 kip · in., 138.1 in.
4.C7 $a = 0.2$ *in.:* -7.27 ksi, $a = 0.8$ *in.:* -6.61 ksi. Para $a = 0.625$ in., $\sigma = -6.51$ ksi.

CAPÍTULO 5

5.1 *a)* $|V|_{\text{máx}} = wL/2$, $|M|_{\text{máx}} = wL^2/8$. *b)* $V = w(L/2 - x)$, $M = w(Lx - x^2)/2$.
5.2 *a)* y *b)* $(0 < x < a)$, $V = Pb/L$, $M = Pbx/L$; $(a < x < L)$, $V = -Pa/L$, $M = Pa(L - x)/L$.
5.3 *a)* y *b)* $(0 < x < a)$, $V = -P$, $M = -Px$; $(a < x < 2a)$, $V = -2P$, $M = -2Px + Pa$.
5.4 *a)* $|V|_{\text{máx}} = w_0L/2$, $|M|_{\text{máx}} = w_0L^2/6$. *b)* $V = -w_0x^2/2L$, $M = -w_0x^3/6L$.
5.5 A a B: $V = P$, $M = Px$; B a C: $V = O$, $M = Pa$; C a D: $V = -P$, $M = P(L - x)$.
5.6 *a)* $|V|_{\text{máx}} = w(L - 2a)/2$, $|M|_{\text{máx}} = w(L^2/8 - a^2/2)$ *b)* A a B: $V = w(L - 2a)/2$, $M = w(L - 2a)x/2$; B a C: $V = w(L/2 - x)$, $M = w[(L - 2a)x - (x - a)^2]/2$. C a D: $V = -w(L - 2a)/2$, $M = w(L - 2a)(L - x)/2$.
5.7 *a)* 7.00 lb. *b)* 57.0 lb · in.
5.8 *a)* 42.0 kN. *b)* 27.0 kN · m.
5.9 *a)* 72.0 kN. *b)* 96.0 kN · m.
5.10 *a)* 30.0 kips. *b)* 90.0 kip · ft.
5.12 *a)* 3.45 kN. *b)* 1 125 N · m.
5.13 *a)* 900 N. *b)* 112.5 N · m.
5.15 1.013 ksi.
5.17 10.49 ksi.
5.18 139.0 MPa.
5.20 75.8 MPa.
5.21 $|V|_{\text{máx}} = 27.5$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 45.0$ kip · ft, $\sigma_{\text{máx}} = 14.14$ ksi.
5.22 $|V|_{\text{máx}} = 66.8$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 30.7$ kN · m, $\sigma_{\text{máx}} = 56.0$ MPa.
5.24 $|V|_{\text{máx}} = 342$ N, $|M|_{\text{máx}} = 51.6$ N · m, $\sigma_{\text{máx}} = 17.19$ MPa.
5.25 $|V|_{\text{máx}} = 5.77$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 25.0$ kip · ft, $\sigma_{\text{máx}} = 10.34$ ksi.
5.27 *a)* 10.67 kN. *b)* 9.52 MPa.
5.28 *a)* 866 mm. *b)* 99.2 MPa.
5.29 *a)* 819 mm. *b)* 89.5 MPa.
5.31 *a)* 3.09 ft. *b)* 12.95 ksi.
5.32 1.021 in.
5.33 *a)* 33.3 mm. *b)* 66.6 mm.
5.50 *a)* $V = w_0(L^2 - 3x^2)/6L$, $M = w_0(Lx - x^3/L)/6$. *b)* $0.0642\ w_0L^2$
5.52 *a)* $V = w_0(x - x^2/L)$, $M = w_0(x^2/2 - x^3/3L)$, $w_0L^2/6$. *b)* $V = w_0(x/2 - 3x^2/4L)$, $M = w_0(x^2/4 - x^3/4L)$, $w_0L^2/27$.
5.54 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 16.80$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 8.82$ kN · m. *b)* 73.5 MPa.
5.55 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 15.00$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 37.5$ kip · ft. *b)* 9.00 ksi.
5.56 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 128.0$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 89.6$ kN · m. *b)* 156.6 MPa.
5.58 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 30.6$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 60.0$ kip · ft. *b)* 21.6 ksi.
5.59 $|V|_{\text{máx}} = 6.50$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 5.04$ kN · m, 30.3 MPa.
5.60 $|V|_{\text{máx}} = 48.0$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 12.00$ kN · m, 61.9 MPa.
5.62 $P = 500$ N, $Q = 250$ N, $|V|_{\text{máx}} = 1\ 150$ N, $|M|_{\text{máx}} = 221$ N · m.
5.64 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 24.5$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 36.3$ kip · ft. *b)* 15.82 ksi.
5.65 $h = 173.2$ mm.
5.68 $h = 15.06$ in.
5.69 $h = 203$ mm.
5.70 $b = 48.0$ mm.
5.71 W16 × 40.
5.72 W27 × 84.
5.73 W250 × 28.4.
5.74 W530 × 66.
5.76 S20 × 66.
5.77 S510 × 98.3.
5.79 3/8 in.
5.80 $b = 11.74$ in.
5.81 C180 × 14.6.
5.82 L102 × 76 × 12.7, $t_{\text{mín}} = 12.7$ mm.
5.83 W610 × 101.
5.84 W24 × 68.
5.85 176.8 kN/m.
5.86 108.8 kN/m.
5.89 *a)* 1.485 kN/m. *b)* 1.935 m.
5.90 *a)* 4.01 kN. *b)* 3.27 m.
5.92 *a)* W16 × 40. *b)* W21 × 44. *c)* W14 × 30.
5.94 383 mm.
5.95 336 mm.
5.96 W27 × 84.
5.97 23.2%.
5.98 *a)* $V = -w_0x + w_0\langle x - a\rangle^1$, $M = -w_0x^2/2 + w_0\langle x - a\rangle^2/2$. *b)* $-3w_0a^2/2$.

5.100 *a)* $V = -w_0x + w_0x^2/2a - w_0\langle x - a\rangle^2/2a$,
$M = -w_0x^2/2 + w_0x^3/6a - w_0\langle x - a\rangle^3/6a$.
b) $-5w_0a^2/6$.

5.101 *a)* $V = 1.25\,P - P\langle x - a\rangle^0 - P\langle x - 2a\rangle^0$,
$M = 1.25\,Px - P\langle x - a\rangle^1 - P\langle x - 2a\rangle^1$.
b) $0.750\,Pa$.

5.102 *a)* $V = -w_0x + w_0\langle x - 2a\rangle^1 + 3w_0a/2$,
$M = -w_0x^2/2 + w_0\langle x - 2a\rangle^2/2 + 3w_0ax/2$.
b) $w_0a^2/2$.

5.104 *a)* $V = -P - P\langle x - 2L/3\rangle^0$,
$M = -Px + PL/3 - P\langle x - 2L/3\rangle^1$
$- PL\langle x - 2L/3\rangle^0/3$.
b) $-4PL/3$.

5.105 *a)* $V = -P\langle x - a\rangle^0, M = -P\langle x - a\rangle^1 - Pa\langle x - a\rangle^0$.
b) $-Pa$.

5.106 *a)* $V = 40 - 48\langle x - 1.5\rangle^0 - 60\langle x - 3.0\rangle^0$
$+ 60\langle x - 3.6\rangle^0$ kN,
$M = 40x - 48\langle x - 1.5\rangle^1$
$- 60\langle x - 3.0\rangle^1 + 60\langle x - 3.6\rangle^1$ kN · m.
b) 60.0 kN · m.

5.107 *a)* $V = -3 + 9.75\langle x - 3\rangle^0 - 6\langle x - 7\rangle^0$
$- 6\langle x - 11\rangle^0$ kips,
$M = -3x + 9.75\langle x - 3\rangle^1$
$- 6\langle x - 7\rangle^1 - 6\langle x - 11\rangle^1$ kip · ft.
b) 21.0 kip · ft.

5.108 *a)* $V = -1.5x + 3\langle x - 0.8\rangle^0 + 3\langle x - 3.2\rangle^0$ kN,
$M = -0.75x^2 + 3\langle x - 0.8\rangle^1 + 3\langle x - 3.2\rangle^1$ kN · m.
b) 600 N · m.

5.109 *a)* $V = 13 - 3x + 3\langle x - 3\rangle^1 - 8\langle x - 7\rangle^0$
$- 3\langle x - 11\rangle^1$ kips,
$M = 13x - 1.5x^2 + 1.5\langle x - 3\rangle^2$
$- 8\langle x - 7\rangle^1 - 1.5\langle x - 11\rangle^2$ kip · ft.
b) 41.5 kip · ft.

5.110 *a)* $V = 30 - 24\langle x - 0.75\rangle^0 - 24\langle x - 1.5\rangle^0$
$- 24\langle x - 2.25\rangle^0 + 66\langle x - 3\rangle^0$ kN,
$M = 30x - 24\langle x - 0.75\rangle^1 - 24\langle x - 1.5\rangle^1$
$- 24\langle x - 2.25\rangle^1 + 66\langle x - 3\rangle^1$ kN · m
b) 87.7 MPa.

5.114 *a)* 80.0 kip · ft en el punto *C*. *b)* W14 × 30.

5.115 *a)* 121.5 kip · ft en 6.00 ft de *A*. *b)* W16 × 40.

5.116 *a)* 0.872 kN · m en 2.09 m de *A*. *b)* $h = 130$ mm.

5.118 $|V|_{\text{máx}} = 35.6$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 25.0$ kN · m.

5.119 $|V|_{\text{máx}} = 89.0$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 178.0$ kN · m.

5.121 $|V|_{\text{máx}} = 10.75$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 52.5$ kip · ft.

5.122 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 13.80$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 16.16$ kN · m.
b) 83.3 MPa.

5.123 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 40.0$ kN, $|M|_{\text{máx}} = 30.0$ kN · m.
b) 40.0 MPa.

5.124 *a)* $|V|_{\text{máx}} = 3.84$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 3.80$ kip · ft.
b) 0.951 ksi.

5.126 *a)* $h = h_0[x(L - x)/L^2]^{1/2}$.
b) 4.44 kip/in.

5.127 *a)* $h = h_0(x/L)^{1/2}$. *b)* 20.0 kips.

5.128 *a)* $h = h_0(2x/L)^{1/2}$ Para $0 < x < L/2$.
b) 60.0 kN.

5.131 *a)* $h = h_0(x/L)^{3/2}$. *b)* 167.7 mm.

5.132 $l_1 = 6.00$ ft, $l_2 = 4.00$ ft.

5.134 $l = 1.800$ m.

5.135 $l = 1.900$ m.

5.137 $d = d_0[4x(L - x)/L^2]^{1/2}$

5.138 *a)* $b = b_0(1 - x/L)$.
b) 20.8 mm.

5.140 *a)* 155.2 MPa. *b)* 142.4 MPa.

5.142 *a)* 7.35 ft. *b)* 11.55 in.

5.143 193.8 kN.

5.144 *a)* 152.6 MPa. *b)* 133.6 MPa.

5.145 *a)* 4.49 m. *b)* 211 mm.

5.146 *a)* 24.0 ksi. *b)* 29.3 ksi.

5.148 *a)* $x_m = 15.00$ in. *b)* 320 lb/in.

5.149 *a)* $x_m = 30.0$ in. *b)* 12.8 kips.

5.151 *a)* $x_m = 0.240$ m. *b)* 150.0 kN/m.

5.152 *a)* 85.0 N. *b)* 21.3 N · m.

5.154 *a)* 600 N. *b)* 180 N · m.

5.155 $|V|_{\text{máx}} = 8.00$ kips, $|M|_{\text{máx}} = 16.00$ kip · ft, 6.98 ksi.

5.158 $d = 216$ mm.

5.160 7.32 kN.

5.161 *a)* $V = 40 - 20\langle x - 2\rangle^0 - 20\langle x - 4\rangle^0 - 20\langle x - 6\rangle^0$ kips,
$M = 40x - 20\langle x - 2\rangle^1 - 20\langle x - 4\rangle^1$
$- 20\langle x - 6\rangle^1$ kip · ft.
b) 120.0 kip · ft.

5.163 *a)* $b = b_0(1 - x/L)^2$. *b)* 160.0 lb/in.

5.C1 *Prob. 5.18:* en $x = 2$ m: $V = 0$,
$M = 104.0$ kN · m, $\sigma = 139.0$ MPa.

5.C4 *Para $x = 13.5$ ft:* $M_1 = 131.25$ kip · ft;
$M_2 = 156.25$ kip · ft; $M_C = 150.0$ kip · ft.

5.C5 *Prob. 5.72:* $V_A = 48$ kips, $M_B = 320.6$ kip · ft.

5.C6 *Prob. 5.112:* $V_A = 29.5$ kN, $M_{\text{máx}} = 28.3$ kN · m,
en 1.938 m de *A*.

CAPÍTULO 6

6.1 *a)* 1.387 kN. *b)* 380 kPa.

6.2 *a)* 155.8 N. *b)* 329 kPa.

6.3 326 lb.

6.5 11.54 kips.

6.7 193.5 kN.

6.8 217 kN.

6.9 *a)* 8.97 MPa. *b)* 8.15 MPa.

6.11 *a)* 13.32 ksi. *b)* 12.07 ksi.

6.12 *a)* 3.17 ksi. *b)* 2.40 ksi.

6.13 177.9 kN.

6.15 300 kips.

6.16 178.7 kN.

6.18 14.05 in.

6.19 *a)* 320 mm. *b)* 97.7 mm.

6.21 *a)* 31.0 MPa. *b)* 23.2 MPa.

6.22 *a)* 1.745 ksi. *b)* 2.82 ksi.

6.23 32.7 MPa.

6.24 3.21 ksi.

6.25 1.500.

6.27 1.333.

6.29 1.672 in.

6.31 189.6 lb.

6.32 *a)* 239 N. *b)* 549 N.

6.34 *a)* 146.1 kN/m. *b)* 19.99 MPa.

6.35 *a)* 5.51 ksi. *b)* 5.51 ksi.

6.37 $\tau_a = 1.167$ ksi, $\tau_b = 0.513$ ksi, $\tau_c = 4.03$ ksi, $\tau_d = 8.40$ ksi.

6.39 $\tau_a = 33.7$ MPa, $\tau_b = 75.0$ MPa, $\tau_c = 43.5$ MPa.

6.40 $\tau_a = 75.0$ MPa, $\tau_b = 58.0$ MPa, $\tau_c = 15.13$ MPa.

6.41 *a)* 4.55 MPa. *b)* 3.93 MPa.

6.42 *a)* 41.3 mm. *b)* 3.98 MPa.

6.43 20.6 MPa.

6.44 20.1 ksi.

6.45 83.3 MPa.

6.46 53.9 kips.

6.48 *a)* 50.9 MPa. *b)* 62.4 MPa.

6.49 $q_{\text{soldadura}} = 266$ kN/m, $q_m = 848$ kN/m.

6.51 *a)* 2.08. *b)* 2.10.

6.52 *a)* 2.25. *b)* 2.12.

6.53 *a)* $V \operatorname{sen} \theta / \pi r_m t$.

6.54 0.774 in.

6.57 *a)* 0.888 ksi. *b)* 1.453 ksi.

6.59 *a)* 2.59 ksi. *b)* 967 psi.

6.61 $3(b^2 - a^2)/[6(a + b) + h]$.

6.62 1.250 a.

6.63 0.345 a.

6.64 0.714 a.

6.67 *a)* 29.4 mm. *b)* 104.1 MPa (máximo).

6.68 *a)* 19.06 mm. *b)* 59.0 MPa (máximo).

6.69 0.433 in.

6.70 20.2 mm.

6.71 0.482 in.

6.72 6.14 mm.

6.75 2.37 in.

6.76 2.21 in.

6.77 0, 40.0 mm.

6.78 75.0 mm.

6.81 *a)* $V = 500$ lb, $M_0 = 398$ lb · in. *b)* 2 980 psi.

6.82 *a)* $V = 500$ lb, $M_0 = 398$ lb · in. *b)* 6 090 psi.

6.85 $\tau_m = P/at$.

6.86 $\tau_m = 1.333\ P/at$.

6.87 *a)* 144.6 N · m. *b)* 65.9 MPa.

6.88 *a)* 144.6 N · m. *b)* 106.6 MPa.

6.89 92.6 lb.

6.91 *a)* 17.63 MPa. *b)* 13.01 MPa.

6.92 *a)* 1.313 ksi. *b)* 2.25 ksi.

6.94 *a)* 379 kPa. *b)* 0.

6.96 0.371 in.

6.97 *a)* 23.2 MPa. *b)* 35.2 MPa.

6.98 *a)* 10.22 mm. *b)* 81.1 MPa (máximo)

6.100 1.265 in.

6.C1 *a)* $h = 173.2$ mm. *b)* $h = 379$ mm.

6.C2 *a)* $L = 37.5$ in.; $b = 1.250$ in.
b) $L = 70.3$ in.; $b = 1.172$ in.
c) $L = 59.8$ in.; $b = 1.396$ in.

6.C3 *Prob. 6.10: a)* 920 kPa. *b)* 765 kPa.

6.C4 *a)* $\tau_{\text{máx}} = 2.03$ ksi; $\tau_B = 1.800$ ksi. *b)* 194 psi.

6.C5 *Prob. 6.66: a)* 2.67 in. *b)* $\tau_B = 0.917$ ksi;
$\tau_D = 3.36$ ksi; $\tau_{\text{máx}} = 4.28$ ksi.

CAPÍTULO 7

7.1 $\sigma = -49.2$ MPa, $\tau = 2.41$ MPa.

7.2 $\sigma = 5.49$ ksi, $\tau = 11.83$ ksi.

7.3 $\sigma = 14.19$ MPa, $\tau = 15.19$ MPa.

7.4 $\sigma = -0.078$ ksi, $\tau = 8.46$ ksi.

7.5 *a)* −37.0°, 53.0°. *b)* −13.60 MPa, −86.4 MPa.

7.8 *a)* 18.4°, 108.4°. *b)* 33.0 MPa, 3.00 MPa.

7.9 *a)* 8.0°, 98.0°. *b)* 36.4 MPa, −50.0 MPa.

7.10 *a)* 14.0°, 104.0°. *b)* 17.00 ksi, −4.00°.

7.11 *a)* −31.0°, 59.0°. *b)* 8.50 ksi, 1.500 ksi.

7.12 *a)* −26.6°, 63.4°. *b)* 15.00 MPa, 18.00 MPa.

7.14 *a)* 9.02 ksi; −13.02 ksi; 3.80 ksi.
b) 5.34 ksi; −9.34 ksi; −9.06 ksi.

7.16 *a)* −2.40 ksi; 10.40 ksi; 0.15 ksi.
b) 1.95 ksi; 6.05 ksi; 6.07 ksi.

7.17 *a)* 520 psi. *b)* −300 psi.

7.18 *a)* −0.250 MPa. *b)* −2.43 MPa.

7.20 $\sigma = -4.76$ ksi, $\tau = -0.467$ ksi.

7.22 16.58 kN.

7.23 73.9 MPa, −9.53 MPa; 41.7 MPa.

7.24 6.45 MPa, −140.0 MPa; 73.3 MPa.

7.25 *a)* 17.4°, 107.4°; −20.8 ksi, 2.04 ksi.
b) 11.43 ksi.

7.26 *a)* −17.0°, 73.0°; 205 psi, 2 190 psi.
b) 1 196 psi.

7.27 205 MPa.

7.29 *a)* −2.89 MPa. *b)* 12.77 MPa, 1.226 MPa.

7.55 24.6°, 114.6°; 145.8 MPa, 54.2 MPa.

7.56 33.7°, 123.7°; 24.0 ksi, −2.00 ksi.

7.57 0, 90.0°; σ_0, $-\sigma_0$.

7.58 0, 90.0°; 1.732 σ_0, −1.732 σ_0.

7.61 $-5.2° \leq \theta \leq 132.0°$.

7.62 $16.5° \leq \theta \leq 110.1°$.

7.63 *a)* 33.7°, 123.7°. *b)* 18.00 ksi. *c)* 6.50 ksi.

7.65 *b)* $|\tau_{xy}| = \sqrt{\sigma_x \sigma_y - \sigma_{\text{máx}} \sigma_{\text{mín}}}$.

7.66 *a)* 8.60 ksi. *b)* 10.80 ksi.

7.68 *a)* 94.3 MPa. *b)* 105.3 ksi.

7.69 *a)* 100.0 MPa. *b)* 110.0 MPa.

7.70 *a)* 39.0 MPa. *b)* 54.0 MPa. *c)* 42.0 MPa.

7.71 *a)* 39.0 MPa. *b)* 45.0 MPa. *c)* 39.0 MPa.

7.72 *a)* 18.50 ksi. *b)* 13.00 ksi. *c)* 11.00 ksi.

7.74 *a)* 40.0 MPa. *b)* 72.0 MPa.

7.75 *a)* 8.00 ksi. *b)* 4.50 ksi.

7.76 1.000 ksi; 7.80 ksi.

7.78 −60.0 MPa a 60.0 MPa.

7.80 *a)* 45.7 MPa. *b)* 92.9 MPa.

7.81 *a)* 1.228. *b)* 1.098. *c)* fluencia.

7.82 *a)* 1.083. *b)* fluencia. *c)* fluencia.

7.83 *a)* 1.279. *b)* 1.091. *c)* fluencia.

7.84 *a)* 1.149. *b)* fluencia. *c)* fluencia.

7.85 52.9 kips.

7.86 63.0 kips.

7.89 ruptura.

7.90 sin ruptura.

7.91 ruptura.

7.92 ruptura.

7.94 $\tau_0 = \pm 49.1$ MPa.

7.95 $\tau_0 = \pm 50.0$ MPa.

7.96 196.9 N · m.

7.98 2.94 MPa.

7.100 5.12 ksi.

7.101 *a)* 1.290 MPa. *b)* 0.853 mm.

7.102 *a)* 12.38 ksi. *b)* 0.0545 in.

7.104 43.3 ft.

7.105 16.62 ksi, 8.31 ksi.

7.108 103.5 MPa, 51.8 MPa.
7.109 1.676 MPa.
7.110 89.0 MPa, 44.5 MPa.
7.111 12.55 mm.
7.112 5 650 psi, 1 970 psi.
7.113 56.8°.
7.116 *a*) 419 kPa. *b*) 558 kPa.
7.117 *a*) 33.2 MPa. *b*) 9.55 MPa.
7.118 2.17 MPa.
7.119 −27.0° a 27.0° y 63.0° a 117.0°.
7.122 *a*) 3.15 ksi. *b*) 1.993 ksi.
7.123 *a*) 1.486 ksi. *b*) 3.16 ksi.
7.124 77.4 MPa, 38.7 MPa.
7.125 73.1 MPa, 51.9 MPa.
7.126 *a*) 5.64 ksi. *b*) 282 psi.
7.127 *a*) 2.28 ksi. *b*) 228 psi.
7.128 93.6 μ, −13.58 μ; 641 μ.
7.129 115.0 μ, 285 μ; −5.72 μ.
7.131 36.7 μ, 283 μ; 227 μ.
7.132 93.6 μ, −13.6 μ; 641 μ.
7.133 115.0 μ, 285 μ; −5.7 μ.
7.135 36.7 μ, 283 μ; 227 μ.
7.136 *a*) 64.4°, −26.6°; 750 μ, −150.0 μ, −300 μ.
b) 900 μ. *c*) 1 050 μ.
7.138 *a*) −30.1°, 59.9°; −298 μ, −702 μ, 500 μ.
b) 500 μ. *c*) 1 202 μ.
7.139 *a*) −33.7°, 56.3°; 100 μ, −420 μ, 160 μ.
b) 520 μ. *c*) 580 μ.
7.140 *a*) 31.0°, 121.0°; 513 μ, 87.5 μ, 0. *b*) 425 μ. *c*) 513 μ.
7.142 *a*) 97.8°, 7.8°; 243 μ, 56.6 μ, 0. *b*) 186.8 μ. *c*) 243 μ.
7.143 *a*) 11.3°, 101.3°; 310 μ, 50 μ, 0. *b*) 260 μ. *c*) 310 μ.
7.146 *a*) -300×10^{-6} in./in. *b*) 435×10^{-6} in./in.,
-315×10^{-6} in./in.; 750×10^{-6} in./in.
7.147 *a*) 30.0°, 120.0°; 560×10^{-6} in./in.,
-140.0×10^{-6} in./in.
b) 700×10^{-6} in./in.
7.150 69.6 kips, 30.3 kips.
7.151 34.8 kips, 38.4 kips.
7.154 1.421 MPa.
7.155 1.761 MPa.
7.156 *a*) −22.5°, 67.5°; 426 μ, −952 μ, −224 μ.
b) Igual que en el inciso *a*.
7.157 *a*) 57.9°, −32.1°; −29.8 MPa, −70.9 MPa.
b) Igual que en el inciso *a*.
7.158 *a*) −0.300 MPa. *b*) −2.92 MPa.
7.160 35.4 MPa, −35.4 MPa; 35.4 MPa.
7.161 12.18 MPa, −48.7 MPa; 30.5 MPa.
7.162 $\sigma_0(1 + \cos\theta)$, $\sigma_0(1 - \cos\theta)$
7.164 ±60.0 ksi.
7.166 *a*) 4.97 ksi. *b*) 2.49 ksi.
7.168 392 psi (tensión), 3 130 psi (compresión).
7.169 415×10^{-6} in./in.
7.C1 *Prob. 7.13:* *a*) 24.0 MPa., −104.0 MPa., −1.50 MPa.
b) −19.51 MPa, −60.5 MPa, −60.7 MPa.
Prob. 7.15: *a*) −56.2 MPa., 86.2 MPa., −38.2 MPa.
b) −45.2 MPa, 75.2 MPa, 53.8 MPa.
7.C3 *Prob. 7.165:* *a*) 1.286. *b*) 1.018. *c*) fluencia.
7.C4 *Prob. 7.93:* Ocurre ruptura en $\tau_0 = 3.67$ ksi.
7.C7 *Prob. 7.141:* $\theta_p = 37.9°$; $\epsilon_a = -57.5\mu$;
$\epsilon_b = -383\mu$; $\epsilon_c = 0$.
$\gamma_{\text{máx}} = 325$ micro radianes (en el plano);
$\gamma_{\text{máx}} = 383$ micro radianes
7.C8 *Prob. 7.144:* $\epsilon_x = 253\mu$; $\epsilon_y = 307$; $\gamma_{xy} = -893$.
$\epsilon_a = 727\mu$; $\epsilon_b = -167.2$; $\gamma_{\text{máx}} = -894$.
Prob. 7.145: $\epsilon_x = 725\mu$; $\epsilon_y = -75.0$; $\gamma_{xy} = 173.2$.
$\epsilon_a = 734\mu$; $\epsilon_b = -84.3$; $\gamma_{\text{máx}} = 819$.

CAPÍTULO 8

8.1 *a*) 10.69 ksi. *b*) 19.17 ksi. *c*) no es aceptable.
8.2 *a*) 10.69 ksi. *b*) 13.08 ksi. *c*) aceptable.
8.3 *a*) 96.2 MPa. *b*) 95.4 ksi. *c*) aceptable.
8.4 *a*) 93.4 MPa. *b*) 96.6 MPa. *c*) aceptable.
8.7 *a*) W690 × 125.
b) 128.2 MPa; 47.3 MPa; 124.0 MPa.
8.8 *a*) W360 × 32.9.
b) 146.1 MPa; 27.6 MPa; 118.4 MPa.
8.9 *a*) 134.3 MPa. *b*) 129.5 MPa.
8.10 *a*) 155.8 MPa. *b*) 143.8 MPa.
8.12 *a*) 18.97 ksi. *b*) 19.92 ksi.
8.14 *a*) 22.3 ksi. *b*) 20.6 ksi a la mitad del claro, 16.38 ksi en *C* y *D*.
8.15 21.7 mm para *BC*, 33.4 mm para *CD*.
8.16 44.4 MPa en *BC*, 48.0 MPa en *CD*.
8.19 1.578 in.
8.20 1.698 in.
8.25 46.5 mm.
8.26 45.9 mm.
8.27 37.0 mm.
8.28 43.9 mm.
8.29 1.822 in.
8.30 1.792 in.
8.31 2.08 MPa y 0 en *a*; −2.72 MPa y 0 en *b*; −3.20 MPa y 0.500 MPa en *c*.
8.32 *a*) 11.06 ksi, 0. *b*) −0.537 ksi, 1.610 ksi.
c) −12.13 ksi, 0.
8.33 *a*) −12.34 ksi, 0. *b*) −1.073 ksi, 0.805 ksi.
c) 10.20 ksi, 0.
8.35 *a*) −37.9 MPa, 14.06 MPa. *b*) −131.6 MPa, 0.
8.37 −21.3 ksi, 6.23 ksi.
8.38 *a*) 79.6 MPa, 7.96 MPa. *b*) 0, 13.26 MPa.
8.40 *a*) 20.4 MPa, 14.34 MPa. *b*) −21.5 MPa, 19.98 MPa.
8.41 *a*) 30.0 MPa, −30.0 MPa, 30.0 MPa.
b) 7.02 MPa, −96.0 MPa, 51.5 MPa.
8.42 *a*) 3.79 ksi, −8.50 ksi. *b*) 6.15 ksi.
8.44 55.0 MPa, −55.0 MPa, 55.0 MPa.
8.46 *a*) 3.47 ksi, 1.042 ksi. *b*) 7.81 ksi, 0.781 ksi.
c) 12.15 ksi, 0.
8.47 *a*) 18.39 MPa, 0.391 MPa. *b*) 21.3 MPa, 0.293 MPa.
c) 24.1 MPa, 0.
8.48 *a*) −7.98 MPa, 0.391 MPa.
b) −5.11 MPa, 0.293 MPa. *c*) −2.25 MPa, 0.
8.49 25.2 MPa, −0.87 MPa, 13.06 MPa.
8.50 34.6 MPa, −10.18 MPa; 22.4 MPa.
8.52 1.798 ksi, −0.006 ksi; 0.902 ksi.
8.53 86.5 MPa y 0 en *a*; 57.0 MPa y 9.47 MPa en *b*.

8.55 3.68 ksi, −0.015 ksi; 1.845 ksi.

8.56 0.252 ksi, −6.59 ksi; 3.42 ksi.

8.57 29.8 MPa, −0.09 MPa; 14.92 MPa.

8.60 *a*) 51.4 kN. *b*) 39.7 kN.

8.62 *a*) 12.90 ksi, −0.32 ksi; 6.61 ksi. *b*) 6.43 ksi, −6.43 ksi; 6.43 ksi.

8.64 0.48 ksi, −44.7 ksi; 22.6 ksi.

8.65 *a*) W18 × 35. *b*) 21.9 ksi; 3.06 ksi; 21.0 ksi en C, 19.81 ksi en B.

8.67 41.3 mm.

8.69 −3.96 ksi, 0.938 ksi.

8.71 $P(2R + 4r/3)/\pi r^3$.

8.72 65.5 MPa, −21.8 MPa; 43.8 MPa.

8.74 30.1 MPa, −0.62 MPa. 15.37 MPa.

8.75 −16.41 ksi y 0 en a; −15.63 ksi y 0.047 ksi en b; −7.10 ksi y 1.256 ksi en c.

8.76 *a*) 7.50 MPa. *b*) 11.25 MPa. *c*) 56.3°, 13.52 MPa.

8.C5 *Prob. 8.45:* $\sigma = 6.00$ ksi; $\tau = 0.781$ ksi.

CAPÍTULO 9

9.1 *a*) $y = M_0x^2/2\,EI$. *b*) $M_0L^2/2\,EI$ ↑. *c*) M_0L/EI ⊿.

9.2 *a*) $y = -Px^2(3L - x)/6\,EI$. *b*) $PL^3/3\,EI$ ↓. *c*) $PL^2/2\,EI$ ◹.

9.3 *a*) $y = -w(x^4 - 4L^3x + 3L^4)/24\,EI$. *b*) $wL^4/8\,EI$ ↓. *c*) $wL^3/6\,EI$ ⊿.

9.4 *a*) $y = -w_0(2x^5 - 5Lx^4 + 10L^4x - 7L^5)/120\,EIL$. *b*) $7w_0L^4/120\,EI$ ↑. *c*) $w_0L^3/12\,EI$ ◹.

9.6 *a*) $-w(x^4 - 4Lx^3 + 4L^2/x^2)/24\,EI$. *b*) $wL^4/24\,EI$ ↓. *c*) 0.

9.7 *a*) $y = w(12Lx^3 - 5x^4 - 6L^2x^2 - L^3x)/120\,EI$. *b*) $13wL^4/1920\,EI$ ↓. *c*) $wL^3/120\,EI$ ◹.

9.9 *a*) 6.55×10^{-3} rad ◹. *b*) 0.226 in. ↓.

9.10 *a*) 2.77×10^{-3} rad ◹. *b*) 1.156 mm ↓.

9.11 *a*) $0.00652\,wL^4/EI$ ↓ en $x = 0.519\,L$. *b*) 7.61 mm ↓.

9.12 *a*) $0.01604\,M_0L^2/EI$ en $x = 0.211\,L$. *b*) 21.5 ft.

9.13 0.398 in. ↓.

9.16 *a*) $y = P(3ax^2 - 3aLx + a^3)/6\,EI$. *b*) 1.976 mm ↓.

9.17 *a*) $y = -w_0(5L^2x^4 - 4Lx^5 + x^6 - 5L^4x^2)/24\,EIL^2$. *b*) $w_0L^4/40\,EI$ ↓.

9.18 *a*) $y = w_0(x^6 - 15L^2x^4 + 25L^3x^3 - 11L^5x)/360\,EIL^2$. *b*) $11w_0L^3/360\,EI$ ◹. *c*) $0.00916\,w_0L^4/EI$ ↓.

9.19 $3wL/8$ ↑.

9.20 $3M_0/2L$ ↑.

9.23 14.44 kN ↑.

9.24 3.03 kips ↑.

9.25 $R_B = 5P/16$ ↑; $M_A = -3PL/16$, $M_c = 5PL/32$, $M_B = 0$.

9.26 $R_A = 41wL/128$ ↑; $M_A = 0$, $M_m = 0.0513wL^2$, $M_c = 0.0351wL^2$, $M_B = -7wL^2/128$.

9.27 $R_A = 21w_0L/160$ ↑; 0 en A, $0.0317w_0L^2$ (pos. máx.), $0.0240w_0L^2$ en C, $-0.0354w_0L^2$ en B.

9.28 $R_B = 9M_0/8L$; $M_0/8$ en A, $-7M_0/16$ justo a la izquierda de C, $9M_0/16$ justo a la derecha de C, 0 en B.

9.29 $7wL/128$ ↑, $13wL^4/6144\,EI$ ↓.

9.32 $5M_0/6L$ ↓, $7M_0L^2/486\,EI$ ↑.

9.33 $R_A = P/2$ ↑, $M_A = PL/8$ ↺; $-PL/8$ en A y C, $PL/8$ en B.

9.34 $R_A = wL/2$ ↑, $M_A = wL^2/12$ ↺; $M = w(6xL - 6x^2 - L^2)/12$.

9.35 *a*) $y = P[bx^3 - L\langle x - a\rangle^3 - b(L^2 - b^2)x]/6\,EIL$. *b*) $Pb(L^2 - b^2)/6\,EIL$ ◹. *c*) $Pa^2b^2/3\,EIL$ ↓.

9.36 *a*) $y = M_0[x^3 - 3L\langle x - a\rangle^2 + (3b^2 - L^2)x]/6\,EIL$. *b*) $M_0(3b^2 - L^2)/6\,EIL$ ◹. *c*) $M_0abb - a)/3\,EIL$ ↑.

9.37 *a*) $5Pa^3/2\,EI$ ↓. *b*) $49\,Pa^3/6\,EI$ ↓. *c*) $15\,Pa^3/EI$ ↓.

9.39 *a*) $Pa^2/12\,EI$ ⊿. *b*) $Pa^3/12\,EI$ ↑. *c*) $3\,Pa^3/4\,EI$ ↓.

9.41 *a*) $y = w_0[-5L^3x^2/48 + L^2x^3/24 - \langle x - L/2\rangle^5/60]/EIL$. *b*) $w_0L^4/48\,EI$ ↓. *c*) $121w_0L^4/1\,920\,EI$ ↓.

9.42 *a*) $y = w[Lx^3/27 - \langle x - L/3\rangle^4/24 - 7L^3x/243]/EI$. *b*) $7wL^3/243\,EI$ ◹. *c*) $2wL^4/243\,EI$ ↓.

9.44 *a*) $w[ax^3/6 - x^4/24 + \langle x - a\rangle^4/24 - \langle x - 3a\rangle^4/24 - 5a^3x/6]/EI$. *b*) $23wa^4/24\,EI$ ↓.

9.45 *a*) 14.00×10^{-3} rad ◹. *b*) 0.340 in. ↓.

9.47 *a*) 0.873×10^{-3} rad ◹. *b*) 1.641 mm ↓.

9.48 *a*) 5.46×10^{-3} rad ◹. *b*) 3.09 mm ↓.

9.49 *a*) $5P/16$ ↑. *b*) $7PL^3/168\,EI$ ↓.

9.50 *a*) $9M_0/8L$ ↑. *b*) $M_0L^2/128\,EI$ ↓.

9.51 *a*) $2P/3$ ↑. *b*) $5PL^3/486\,EI$ ↓.

9.53 *a*) 11.54 kN ↑. *b*) 4.18 mm ↓.

9.54 *a*) 33.3 kN ↑. *b*) 3.19 mm ↓.

9.56 *a*) 7.38 kips ↑. *b*) 0.0526 in. ↓.

9.57 *a*) $3wL/32$ ↑, $5wL^2/192$ ↺. *b*) $wL^4/768\,EI$ ↓.

9.58 *a*) $20P/27$ ↑, $4PL/27$ ↺. *b*) $5PL^3/1296\,EI$ ↓.

9.59 *a*) 0.341 in. ↓ a 3.34 ft del extremo izquierdo.

9.60 0.1520 in. ↓ a 26.4 in. del extremo izquierdo.

9.61 1.648 mm ↓ a 2.86 m del extremo izquierdo.

9.62 3.10 mm ↓ a 0.942 m del extremo izquierdo.

9.65 *a*) $5PL^3/162\,EI$ ↓. *b*) $PL^2/9\,EI$ ◹.

9.66 *a*) $Pa^3(L - a)/6\,EIL$ ↑. *b*) $Pa^2(3L - a)/6\,EIL$ ⊿.

9.67 *a*) $M_0L^2/8\,EI$ ↑. *b*) $M_0L/2\,EI$ ⊿.

9.68 *a*) $wL^4/384\,EI$ ↓. *b*) 0.

9.71 $13wa^3/6\,EI$ ◹; $29wa^4/24\,EI$ ↓.

9.72 $wL^3/48\,EI$ ◹; $wL^4/384\,EI$ ↓.

9.73 6.30×10^{-3} rad ◹; 5.53 mm ↓.

9.75 12.55×10^{-3} rad ◹; 0.364 in. ↓.

9.76 12.08×10^{-3} rad ◹; 0.240 in. ↓.

9.77 *a*) 0.601×10^{-3} rad ◹. *b*) 3.67 mm ↓.

9.79 *a*) $R_A = 3M_0(L^2 - a^2)/2L^3$ ↑; $M_A = 0$. *b*) $R_B = 3M_0(L^2 - a^2)/2L^3$ ↓; $M_B = M_0(L^2 - 3a^2)/2L^2$ ↺.

9.80 *a*) $R_A = 7wL/128$ ↑, $M_A = 0$. *b*) $R_B = 57wL/128$ ↑; $M_B = 9wL^2/128$ ↻.

9.81 $R_A = 3P/8$ ↑, $R_C = 7P/8$ ↑, $R_D = P/4$ ↓.

9.83 $R_B = 3M_0/2L$ ↓; $M_B = M_0/4$ ↺.

9.85 *a*) 5.94 mm ↓. *b*) 6.75 mm ↓.

9.86 *a*) 0.221 in. ↓. *b*) 0.368 in. ↓.

9.87 *a*) 5.06×10^{-3} rad ◹. *b*) 0.0477 in. ↓.

9.88 121.5 N/m.

9.89 *a*) $R_A = 10.86$ kN ↑; $M_A = 1.942$ kN · m ↺. *b*) $R_D = 1.144$ kN ↑; $M_D = 0.286$ kN · m ↻.

9.92 43.9 kN.

9.93 0.278 in. ↓.

9.94 9.31 mm ↓.

9.95 *a*) M_0L/EI ◹. *b*) $M_0L^2/2\,EI$ ↑.

9.96 *a*) $PL^2/2\,EI$ ⊿. *b*) $PL^3/3\,EI$ ↓.

9.97 *a*) $wL^3/6\,EI$ ⊿. *b*) $wL^4/8\,EI$ ↓.

9.100 *a*) $3Pa^2/2\,EI$ ◹, $11Pa^3/6\,EI$ ↓. *b*) Pa^2/EI ◹, $Pa^3/2\,EI$ ↓.

9.101 *a*) 16.56×10^{-3} rad ◹. *b*) 0.379 in. ↓.

9.102 *a*) 2.55×10^{-3} rad ⊿. *b*) 6.25 mm ↓.

9.103 *a)* 4.98×10^{-3} rad ∡; 0.1570 in. ↓.
b) 4.59×10^{-3} rad ∡; 0.0842 in. ↓.
9.104 *a)* 5.22×10^{-3} rad ∡. *b)* 10.88 mm ↓.
9.106 *a)* $11PL^2/24\,EI$ ⦩. *b)* $11PL^3/36\,EI$ ↓.
9.107 *a)* 6.10×10^{-3} rad ∡. *b)* 6.03 mm ↓.
9.109 *a)* $Pa(L-a)/2\,EI$ ⦩. *b)* $Pa(3L^2-4a^2)/24\,EI$ ↓.
9.110 *a)* $PL^2/16\,EI$ ⦩. *b)* $PL^3/48\,EI$ ↓.
9.111 *a)* $5PL^2/32\,EI$ ⦩. *b)* $19PL^3/384\,EI$ ↓.
9.112 *a)* $M_0(L-2a)/2\,EI$ ⦩. *b)* $M_0(L^2-4a^2)/8\,EI$ ↓.
9.114 *a)* $wa^2(3L-2a)/12\,EI$ ⦩. *b)* $wa^2(3L^2-2a^2)/48\,EI$ ↓.
9.115 *a)* $5Pa^2/8\,EI$ ⦩. *b)* $3Pa^3/4\,EI$ ↓.
9.118 *a)* 4.72×10^{-3} rad ⦩. *b)* 5.85 mm ↓.
9.119 *a)* 4.50×10^{-3} rad ⦩. *b)* 8.26 mm ↓.
9.121 *a)* 5.17×10^{-3} rad ⦩. *b)* 21.0 mm ↓.
9.122 3.84 kN/m.
9.123 0.211 L.
9.124 0.223 L.
9.125 *a)* $3M_0/L^2/64\,EI$ ↓. *b)* $5M_0L/32\,EI$ ⦩.
9.126 *a)* $4PL^3/243\,EI$ ↓. *b)* $4PL^2/81\,EI$ ⦩.
9.127 *a)* $5wL^4/768\,EI$ ↓. *b)* $3wL^3/128\,EI$ ⦩.
9.129 *a)* 8.70×10^{-3} rad ⦩. *b)* 15.03 mm ↓.
9.130 *a)* 5.31×10^{-3} rad ⦩. *b)* 0.204 in. ↓.
9.132 *a)* 7.48×10^{-3} rad ⦩. *b)* 5.35 mm ↓.
9.134 *a)* $Pa(2L+3a)/6\,EI$ ⦩. *b)* $Pa^2(L+a)/3\,EI$ ↓.
9.135 *a)* 5.33×10^{-3} rad ∡. *b)* 0.01421 in. ↓.
9.136 *a)* 3.61×10^{-3} rad ⦩. *b)* 0.960 mm ↑.
9.137 *a)* 2.34×10^{-3} rad ⦩. *b)* 0.1763 in. ↓.
9.139 *a)* $9wL^3/256\,EI$ ⦩. *b)* $7wL^3/256\,EI$ ∡.
c) $5wL^4/512\,EI$ ↓.
9.140 *a)* $17PL^3/972\,EI$ ↓. *b)* $19PL^3/972\,EI$ ↓.
9.141 $0.01792PL^3/EI$ ↓ a 0.544 L del extremo izquierdo.
9.144 0.212 in. ↓ a 5.15 ft del extremo izquierdo.
9.145 0.1049 in.
9.146 1.841 in.
9.147 $9M_0/8L$ ↑.
9.148 $5P/16$ ↑.
9.150 $7wL/128$ ↑.
9.152 $3P/32$ ↓ en A, $13P/32$ ↑ en B, $11P/16$ ↑ en C.
9.153 *a)* 6.95 mm ↑. *b)* 46.3 kN ↑.
9.154 $R_B = 10.18$ kips ↑; -87.9 kip · ft en A, 46.3 kip · ft en D, 45.8 kip · ft en E, 0 en B.
9.155 $48\,EI/7L^3$.
9.156 $144\,EI/L^3$.
9.157 *a)* $y = -w_0(x^5 - 5L^4x + 4L^5)/120\,EIL$.
b) $w_0L^4/30\,EI$ ↓. *c)* $w_0L^3/24\,EI$ ∡.
9.159 *a)* $y = w_0(x^6 - 3Lx^5 + 5L^3x^3 - 3L^5x)/90\,EIL^2$.
b) $w_0L^3/30\,EI$ ⦩. *c)* $61w_0L^4/5760\,EI$ ↓.
9.160 $R_A = Pb^2(3a+b)/L^3$ ↑; $M_A = Pab^2/L^2$ ↰; $-Pab^2/L^2$ en A, $2Pa^2b^2/L^3$ en D, $-Pa^2b/L^2$ en B.
9.161 *a)* 9.51×10^{-3} rad ⦩. *b)* 5.80 mm ↓.
9.163 0.210 in. ↓.
9.165 *a)* 5.84×10^{-3} rad ⦩. *b)* 0.300 in. ↓.
9.167 $0.00677\,PL^3/EI$ ↓ en 0.433 L del extremo izquierdo.
9.168 $R_A = 65.2$ kN ↑; 0 en A, 58.7 kN · m en D.
55.8 kN · m en E, -82.8 kN · m en B.
9.C1 *Prob. 9.74:* 5.56×10^{-3} rad ⦩; 2.50 mm ↓.
9.C2 *$a = 6$ ft: a)* 3.14×10^{-3} rad ⦩, 0.292 in. ↓;
b) 0.397 in. ↓ en 11.27 ft a la derecha de A.
9.C3 *$x = 1.6$ m: a)* 7.90×10^{-3} rad ⦩, 8.16 mm ↓;
b) 6.05×10^{-3} rad ⦩, 5.79 mm ↓;
c) 1.021×10^{-3} rad ⦩, 0.314 mm ↓.
9.C5 *a) $a = 3$ ft:* 1.586×10^{-3} rad ⦩; 0.1369 in. ↓;
b) $a = 1.0$ m: 0.293×10^{-3} rad ⦩, 0.479 mm ↓.
9.C7 *$x = 2.5$ m:* 5.31 mm ↓; *$x = 5.0$ m:* 12.28 mm ↓.

CAPÍTULO 10

10.1 K/L.
10.2 kL.
10.3 $2kL/9$.
10.4 K/L.
10.7 $k > 4.91$ kN/m.
10.8 $8K/L$.
10.9 81.2 N.
10.11 $d = 0.849$ in.; acero $P_{cr} = 647$ lb,
aluminio $P_{cr} = 1\,872$ lb.
10.12 *a)* 647 lb. *b)* 0.651 in. *c)* 58.8%
10.13 *a)* 6.25%. *b)* 17.17 kN.
10.15 2.81.
10.16 15.02 kips.
10.17 25.1 kips.
10.20 4.00 kN.
10.21 5.37 kN.
10.24 *a)* $L_{BC} = 4.2$ ft, $L_{CD} = 1.05$ ft.
b) 4.21 kips.
10.25 657 mm.
10.26 *a)* $b/d = 0.500$. *b)* $d = 28.3$ m,
$b = 14.15$ mm.
10.27 (1) 2.64 kN, (2) 0.661 kN, (3) 10.57 kN,
(4) 5.39 kN, (5) 2.64 kN.
10.28 *a)* 2.29. *b)* (2) 1.768 in.;
(3) 1.250 in.; (4) 1.046 in.
10.29 *a)* 0.410 in. *b)* 14.43 ksi.
10.30 *a)* 4.84 mm. *b)* 135.7 MPa.
10.32 *a)* 0.0399 in. *b)* 19.89 ksi.
10.33 *a)* 1.552 mm. *b)* 47.8 MPa.
10.35 *a)* 78.2 kips. *b)* 27.5 ksi.
10.36 *a)* 52.9 kips. *b)* 20.4 ksi.
10.39 *a)* 368 kN. *b)* 103.8 MPa.
10.40 *a)* 223 kN. *b)* 62.8 MPa.
10.41 37.2°C.
10.42 5.81 mm.
10.43 *a)* 32.1 kips. *b)* 39.4 kips.
10.45 *a)* 195.4 kN. *b)* 0.596.
10.46 *a)* 247 kN. *b)* 0.437.
10.47 1.337 m.
10.48 9.57 ft.
10.50 *a)* 8.31 m. *b)* 2.54 m.
10.51 W200 × 26.6.
10.52 W200 × 35.9.
10.53 2.125 in.
10.54 2.625 in.
10.57 *a)* 114.7 kN. *b)* 208 kN.
10.58 95.8 kips.
10.59 *a)* 220 kN. *b)* 839 kN.

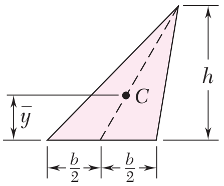
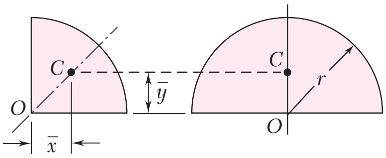
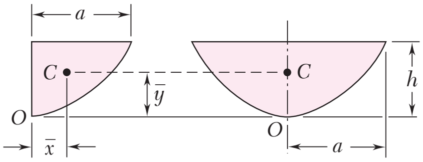
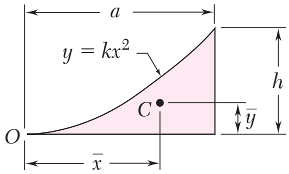
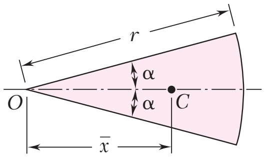
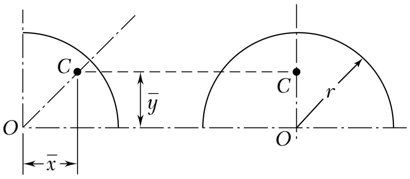
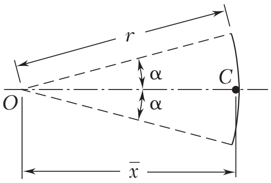
10.61 35.9 kN.
10.63 *a*) 26.4 kN. *b*) 32.4 kN.
10.64 76.6 kips.
10.65 1 600 kN.
10.68 173.8 kips.
10.69 107.7 kN.
10.70 38.9 kips.
10.71 6.53 in.
10.73 123.1 mm.
10.74 0.884 in.
10.75 44.9 mm.
10.78 W250 × 67.
10.79 W14 × 82.
10.80 W200 × 46.1.
10.81 L89 × 64 × 12.7 mm.
10.82 L89 × 64 × 12.7 mm.
10.84 $L3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ in.
10.85 56.1 kips.
10.86 *a*) 433 kN, 321 kN. *b*) 896 kN, 664 kN.
10.87 5/16 in.
10.88 W310 × 74.
10.89 *a*) 320 kN. *b*) 273 kN.
10.91 *a*) 18.26 kips. *b*) 14.20 kips.
10.92 *a*) 21.1 kips. *b*) 18.01 kips.
10.93 35.3 kN.
10.95 19.27 ft.
10.97 1.016 m.
10.98 1.159 m.
10.99 *a*) 11.89 mm. *b*) 6.56 mm.
10.100 7.78 mm.
10.102 *a*) 0.426 in. *b*) 1.277 in.
10.103 5.5 in.
10.105 70.0 mm.
10.106 80.4 mm.
10.107 1.894 in.
10.109 83.4 mm.
10.110 87.2 mm.
10.111 12 mm.
10.113 W14 × 145.
10.114 W14 × 68.
10.115 W200 × 59.
10.117 229 lb.
10.119 *a*) 94.8 kN. *b*) 449 kN.
10.120 2.85.
10.121 4.21 kips.
10.123 *a*) 0.1073 in. *b*) 14.62 ksi.
10.124 *a*) 1 532 kN. *b*) 638 kN.
10.126 W10 × 54.
10.128 W8 × 40.
10.C1 $r = 8$ *mm:* 9.07 kN. $r = 16$ *mm:* 70.4 kN.
10.C2 $b = 1.0$ *in.:* 3.85 kips. $b = 1.375$ *in.:* 6.07 kips.
10.C3 $h = 5.0$ *m:* 9 819 kg. $h = 7.0$ *m:* 13 255 kg.
10.C4 $P = 35$ *kips: a*) 0.086 in.; *b*) 4.69 ksi.
$P = 55$ *kips: a*) 0.146 in.; *b*) 7.65 ksi.
10.C5 *Prob. 10.60: a*) 86.7 kips. *b*) 88.2 kips.
10.C6 *Prob. 10.113:* $P_{perm} = 282.6$ kips.
Prob. 10.114: $P_{perm} = 139.9$ kips.

CAPÍTULO 11

11.1 *a*) 21.6 kJ/m^3. *b*) 336 kJ/m^3.
c) 163.0 kJ/m^3.
11.2 *a*) 43.1 in · lb/in^3. *b*) 72.8 in · lb/in^3.
c) 172.4 in · lb/in^3.
11.4 *a*) 177.9 kJ/m^3. *b*) 712 kJ/m^3. *c*) 160.3 kJ/m^3.
11.5 *a*) 58 in · lb/in^3. *b*) 20 kip · in/in^3.
11.6 *a*) 1296 kJ/m^3. *b*) 90 MJ/m^3.
11.7 *a*) 150.0 kJ/m^3. *b*) 63 MJ/m^3.
11.9 *a*) 176.2 in · lb. *b*) 11.72 in · lb/in^3, 5.65 in · lb/in^3.
11.10 *a*) 12.18 J. *b*) 15.83 kJ/m^3, 38.6 kJ/m^3.
11.11 *a*) 264 in · lb. *b*) 1.378 in · lb/in^3, 8.83 in · lb/in^3.
11.13 *a*) 44.0 J. *b*) 31.4 J.
11.15 102.7 in · lb.
11.17 1.398 P^2l/EA.
11.18 3.81 P^2l/EA.
11.20 2.37 P^2l/EA.
11.21 1 015 J.
11.23 $w^2L^5/40\ EI$.
11.24 $M_0^2(a^3 + b^3)/6\ EIL^2$.
11.26 $P^2a^2\ a + L)/6\ EI$.
11.29 1 048 J.
11.30 894 in · lb.
11.31 662 J.
11.33 2.45×10^6 in · lb.
11.34 14.70 J.
11.37 de -2.65 MPa a 122.6 MPa.
11.38 *a*) 2.33. *b*) 2.02.
11.40 $2\ M_0^2L\ (1 + 3\ Ed^2/10\ GL^2)/Ebd^3$.
11.41 $(Q^2/4\pi\ GL)\ \ln\ (R_2/R_1)$.
11.42 *a*) 79.8 kN. *b*) 254 MPa. *c*) 1.523 mm.
11.44 11.50 in.
11.45 7.87 in.
11.46 4.76 kg.
11.48 8.50 ft/s.
11.50 *a*) 21.0 kN. *b*) 171.7 MPa. *c*) 8.58 mm.
11.51 *a*) 7.67 kN. *b*) 312 MPa. *c*) 23.5 mm.
11.52 *a*) 0.1064 in. *b*) 20.1 ksi.
11.53 *a*) 15.63 mm. *b*) 83.8 N · m. *c*) 208 MPa.
11.54 *a*) 23.6 mm. *b*) 64.4 N · m. *c*) 157.6 MPa.
11.56 *b*) 7.12
11.57 *b*) error relativo 0.152, $y'_m/2h = 0.166$.
11.58 $Pa^2b^2/3\ EIL \downarrow$.
11.59 $Pa^2a + L)/3\ EI \downarrow$.
11.61 $M_0\ (L + 3a)/3\ EI$ ↻.
11.62 $3PL^3/16\ EI \downarrow$.
11.63 $3Pa^3/4\ EI \downarrow$.
11.64 $5M_0L/16\ EI$ ↻.
11.67 386 mm.
11.69 5.28°.
11.71 $2.375\ Pl/EA \rightarrow$.
11.73 0.0447 in. ↓.
11.74 0.366 in. ↓.
11.75 3.19 mm ↓.
11.77 *a*) y *b*) $P^2L^3/96\ EI - PM_0L^2/16\ EI + M_0^2L/6\ EI$.
11.79 *a*) y *b*) $P^2L^3/48\ EI + PM_0L^2/8\ EI + M_0^2L/2\ EI$.
11.81 *a*) y *b*) $P^2L^3/48\ EI$.

11.82 *a*) y *b*) $7P^2L^3/24\,EI$.
11.83 $5PL^3/48\,EI$ ↓.
11.84 $0.0443wL^4/EI$ ↓.
11.85 $3PL^2/8\,EI$ ∡.
11.87 $M_0L/6\,EI$ ⦩.
11.88 $PaL^2/16\,EI$ ↑.
11.89 $wL^4/128\,EI$ ↑.
11.91 $wL^3/192\,EI$ ∡.
11.92 0.987 in. ↓.
11.94 7.25 mm ↓.
11.95 5.08 mm ↓.
11.96 0.698×10^{-3} rad ⦩.
11.98 2.07×10^{-3} rad ∡.
11.99 3.19 mm ↓.
11.101 0.233 in. ↓.
11.102 0.1504 in. →.
11.103 0.1459 mm ↓.
11.105 *a*) $PR^3/2\,EI$ →. *b*) $\pi PR^3/4\,EI$ ↓.
11.106 $\pi PR^3/2\,EI$ ↓.
11.107 *a*) $2Pl^3/3\,EI$ →. *b*) $Pl^2/6\,EI$ ∡.
11.109 *a*) Pl^3/EI ↑. *b*) $3Pl^2/2\,EI$ ∡.
11.111 $5P/16$ ↑; $-3PL/16$ en *A*, 0 en *B*, $5PL/32$ en *C*.
11.112 $3M_0/2L$ ↑; $M_0/2$ en *A*, $-M_0$ en *B*.
11.114 $7wL/128$ ↑; $7wLx/128 - w\langle x - L/2\rangle^2/2$.
11.116 $wL/6$ ↓ en *A*, $3wL/4$ ↑ en *B*, $5wL/12$ ↑ en *C*.
11.117 $7\,P/8$.
11.118 $0.652\,P$.
11.119 $P/(1 + 2\cos^3\phi)$.
11.121 $2\,P/3$.
11.122 $7\,P/12$.
11.123 2.09.
11.125 12.70 J.
11.127 9.12 lb.
11.129 11.57 mm ↓.
11.131 1.030 mm →.
11.134 $PL^2/6\,EI$ ↰.
11.C2 *a*) $a = 15$ in.: $\sigma_D = 17.19$ ksi, $\sigma_C = 21.0$ ksi;
$a = 45$ in.: $\sigma_D = 36.2$ ksi, $\sigma_C = 14.74$ ksi.
b) $a = 18.34$ in., $\sigma = 20.67$ ksi.
11.C3 *a*) $L = 200$ mm: $h = 2.27$ mm;
$L = 800$ mm: $h = 1.076$ mm.
b) $L = 440$ mm: $h = 3.23$ mm.
11.C4 $a = 300$ mm: 1.795 mm. 179.46 MPa:
$a = 600$ mm: 2.87 mm. 179.59 MPa.
11.C5 $a = 2$ m: *a*) 30.0 J; *b*) 7.57 mm, 60.8 J.
$a = 4$ m: *a*) 21.9 J; *b*) 8.87 mm, 83.4 J.
11.C6 $a = 20$ in.: *a*) 13.26 in.; *b*) 99.5 kip · in.;
c) 803 lb.
$a = 50$ in.: *a*) 9.46 in.; *b*) 93.7 kip · in.; *c*) 996 lb.

Centroides de áreas y líneas comunes

Figuras		$\bar{x}$	$\bar{y}$	**Área**
Área triangular	 h C $\bar{y}$ $\frac{b}{2}$ $\frac{b}{2}$		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de un cuarto de círculo	 C C $\bar{y}$ r O O $\bar{x}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica	 a C C h $\bar{y}$ O O $\bar{x}$ a	$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica	 a $y = kx^2$ h C $\bar{y}$ O $\bar{x}$	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular	 C $\bar{y}$ C r O O $\bar{x}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de un círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo†	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^{6}$	mega	M
$1\ 000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto†	h
$10 = 10^{1}$	deca†	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci†	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi†	c
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.\ 000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	ato	a

† Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

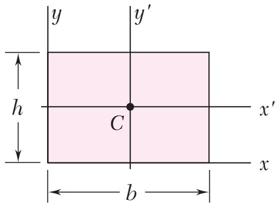
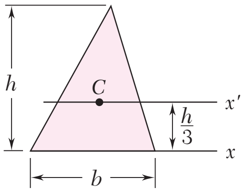
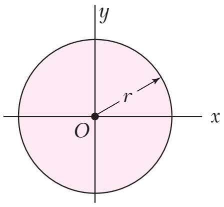
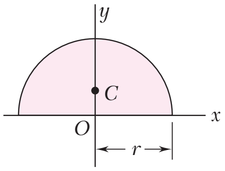
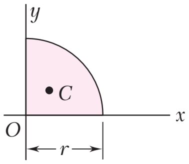
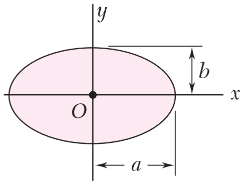
Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	⋯	$\mathrm{m/s^2}$
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	⋯	$\mathrm{rad/s^2}$
Velocidad angular	Radián por segundo	⋯	rad/s
Área	Metro cuadrado	⋯	$\mathrm{m^2}$
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	⋯	$\mathrm{kg/m^3}$
Energía	Joule	J	$\mathrm{N \cdot m}$
Fuerza	Newton	N	$\mathrm{kg \cdot m/s^2}$
Frecuencia	Hertz	Hz	$\mathrm{s^{-1}}$
Impulso	Newton-segundo	⋯	$\mathrm{kg \cdot m/s}$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	⋯	$\mathrm{N \cdot m}$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	$\mathrm{N/m^2}$
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	⋯	m/s
Volumen, sólidos	Metro cúbico	⋯	$\mathrm{m^3}$
Líquidos	Litro	L	$\mathrm{10^{-3}\ m^3}$
Trabajo	Joule	J	$\mathrm{N \cdot m}$

† Unidad suplementaria (1 revolución $= 2\pi$ rad $= 360°$).

‡ Unidad básica.

Momentos de inercia de figuras geométricas comunes

Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$